

512

M-25

N 388

1

165 pgs.

2446

512
M-25

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА

КУРСЪ СИСТЕМАТИЧЕСКІЙ

ВЪ ДВУХЪ ТОМАХЪ.

Составилъ Н. Н. Маракуевъ.

ТОМЪ I.

ТЕОРІЯ.

Издание второе, исправленное и дополненное.

проверено
1966 г.



МОСКВА.

Типо-литографія Т-ва И. Н. Кушнеревъ и К^о, Писневская ул., соб. докт.

1903.



2446

Православный
Институтъ в Кіевѣ



ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Алгебраическія дѣйствія.

	Стр.		Стр.
Предисловіе	V	Глава IX.	
Глава I.		Алгебраическія дроби	107
Предварительныя понятія и опредѣленія	1	Глава X.	
Глава II.		Возвышеніе въ степень	120
Положительныя и отрицательныя количества	10	Глава XI.	
Глава III.		Извлеченіе корня (общія правила)	126
Цѣль алгебраическихъ дѣйствій. — Законъ Ганкеля. — Сложеніе и вычитаніе	17	Глава XII.	
Глава IV.		Извлеченіе квадратнаго корня изъ чиселъ и многочленовъ	130
Умноженіе	34	Глава XIII.	
Глава V.		Извлеченіе кубическаго корня изъ чиселъ и многочленовъ	159
Дѣленіе	51	Глава XIV.	
Глава VI.		Объ ирраціональныхъ числахъ	170
Разложеніе на множители. — Умноженіе и дѣленіе многочленовъ съ буквенными коэффициентами	60	Глава XV.	
Глава VII.		Объ ирраціональныхъ выраженіяхъ	186
О дѣлимости на биномы $x \pm a$. — Основаніе способа неопредѣленныхъ коэффициентовъ	77	Глава XVI.	
Глава VIII.		Степени и корни съ дробными и отрицательными показателями	199
Общій наивысшій дѣлитель и наиб. кратное	93	Глава XVII.	
		Замѣчательныя формы алгебраическихъ выраженій	209

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

Уравненія и неравенства первой степени.

Глава XVIII.		Глава XXIII.	
Уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ	221	Теорія пропорцій	283
Глава XIX.		Глава XXIV.	
Уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными	245	Неравенства первой степени	300
Глава XX.		Глава XXV.	
Рѣшеніе системы трехъ уравненій съ 3 неизвѣстными	258	Исслѣдованіе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ	331
Глава XXI.		Глава XXVI.	
Рѣшеніе системы уравненій первой степени съ какою угодно числомъ неизвѣстныхъ	266	Исслѣдованіе уравненій первой степени съ 2 неизвѣстными	359
Глава XXII.		Глава XXVII.	
Составленіе уравненій со многими неизвѣстными	277	Неопредѣленный анализъ первой степени	385

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

Уравненія и неравенства второй и высшихъ степеней.

	Стр.		Стр.
Глава XXVIII.		Глава XXXV.	
Минимы величины и дѣйствія надъ ними	414	Рациональныя уравненія, приводи- мая къ квадратнымъ (продолженіе) . .	538
Глава XXIX.		Глава XXXVI.	
Геометрическое представленіе ми- нимыхъ величинъ	421	Ирраціональныя уравненія	552
Глава XXX.		Глава XXXVII.	
Рѣшеніе квадратныхъ уравненій . .	432	Системы уравненій высшихъ степеней	578
Глава XXXI.		Глава XXXVIII.	
Связь между коэффициентами и кор- нями квадратнаго уравненія	460	Уравненія: кубическое и четвертой степени	594
Глава XXXII.		Глава XXXIX.	
Квадратный триномъ	489	Численные вопросы высшихъ степеней	604
Глава XXXIII.		Глава XL.	
Неравенства высшихъ степеней и ирраціональныя	502	Исслѣдованіе замѣненій изъ которыхъ функций	609
Глава XXXIV.		Глава XLI.	
Рациональныя уравненія, приводи- мая къ квадратнымъ	524	Образцы исслѣдованія вопросовъ второй степени (24 задачи)	634
		Глава XLII.	
		Maxima и minima въ задачахъ . .	709

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Анализъ соединеній и его приложенія.

Глава XLIII.		Глава XLIV.	
Соединенія безъ повтореній и съ по- втореніями	778	Виномъ Ньютона	790

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

Теорія рядовъ и логарифмовъ.

Глава XLV.		Глава L.	
Прогрессія арифметическая	810	Вычисленіе логарифмовъ посред- ствомъ рядовъ	876
Глава XLVI.		Глава LI.	
Прогрессія геометрическая	814	О десятичныхъ логарифмахъ.—Таб- лицы	885
Глава XLVII.		Глава LII.	
Элементарная теорія рядовъ . . .	834	Приложеніе логарифмовъ къ рѣшенію показательныхъ уравненій и къ фи- насовымъ операціямъ	896
Глава XLVIII.			
Формула бинома для всякаго пока- зателя	852		
Глава XLIX.			
Логарифмы	866		

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

Непрерывныя дроби и ихъ приложенія.

Глава LIII.		Глава LIV.	
Непрерывныя дроби	922	Неопредѣленный анализъ второй степени	950

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Выпуская въ свѣтъ 2-е изданіе своего курса элементарной алгебры, авторъ позаботился тщательно исправить всякіе случайные недосмотры и промахи, почти неизбежныя въ первомъ изданіи. Весь курсъ сплошь былъ внимательно пересмотрѣнъ, причѣмъ введены всѣ усовершенствованія и всѣ новинки, какія успѣли накопиться со времени появленія 1-го изданія. Изложенію, при полной его ясности и простотѣ, авторъ старался придать совершенную научную строгость, съ устраненіемъ всякихъ мнимыхъ доказательствъ и недомолвокъ, обычныхъ въ нашихъ ходовыхъ курсахъ. Подъ мнимыми доказательствами мы разумѣемъ такіе приемы, какъ, наприкладъ, выводъ разложеній функций въ безконечные ряды по способу неопредѣленныхъ коэффициентовъ и т. п. Къ особенностямъ курса, отличающимъ его отъ другихъ аналогичныхъ явленій, принадлежитъ широкое развитіе одной стороны дѣла, весьма существенной и, несмотря на то, обыкновенно почти игнорируемой учебниками, именно *изслѣдованія* вопросовъ 1-й и 2-й степени. Въ связи съ этимъ дано и болѣе широкое развитіе статьямъ о неравенствахъ и объ измѣненіи простѣйшихъ функций, куда примыкаютъ и элементарные способы нахожденія максимальныхъ и минимальныхъ значеній функций. Благодаря этому, въ нашемъ курсѣ элементарная алгебра приведена въ болѣе тѣсную связь съ аналитическою геометріею и съ высшимъ анализомъ: читатель исподволь готовится къ этимъ высшимъ частямъ математики. Что касается новинокъ, введенныхъ во 2-е изданіе, то изъ числа ихъ важнѣе другихъ усовершенствованія въ методахъ изслѣдованія вопросовъ 2-й степени: я разумѣю пла-

ны *Жирода*, и особенно *Тартэнвилля*. Расположеніе изслѣдованія, предложенное *Тартэнвиллемъ*, вноситъ въ это нелегкое дѣло необыкновенную ясность, стройность, порядокъ и относительную простоту. Изъ числа другихъ новинокъ стоитъ упомянуть: объ особомъ методѣ разложенія на множители симметричныхъ функцій; о новыхъ приѣмахъ для отличенія паразитныхъ корней резольвента ирраціональнаго уравненія отъ корней, удовлетворяющихъ этому уравненію; о безукоризненно строгихъ доказательствахъ теоремы о тахітитѣ произведенія, данныхъ *Дарбу* и *Гурза*; о преданномъ было забвенію, но возстановленномъ въ новыхъ курсахъ *Эйлера* доказательствѣ формулы *Ньютона* бинома и т. д. Кроме того, прибавлены двѣ новыя главы, изъ коихъ въ одной разсматривается рѣшеніе полныхъ уравненій 3-й и 4-й степени, въ другой—рѣшеніе неопредѣленной ур—нія 2-й степени съ двумя переменными.

Количество задачъ значительно увеличено введеніемъ тамъ и сямъ задачъ новыхъ типовъ и, кроме того, прибавленіемъ 400 смѣшанныхъ задачъ, носящихъ характеръ болѣе трудныхъ упражненій, на которыхъ могутъ испытать свои силы болѣе успѣвающіе и болѣе талантливые учащіеся старшаго возраста.

Такъ какъ авторъ имѣлъ въ виду не только учениковъ, обучающихся въ учебныхъ заведеніяхъ, идѣ они всегда найдутъ опору въ своихъ наставникахъ, но и такихъ лицъ, которыхъ обстоятельствами вынуждены готовить дома, идѣ они по большей части лишены опытныхъ руководителей,—въ виду этого, въ настоящемъ изданіи всѣ задачи снабжены отвѣтами, а болѣе трудныя—и полными рѣшеніями; вслѣдствіе этого, пришлось весь матеріалъ задачъ соединить въ особый томъ. Такимъ образомъ, весь курсъ раздѣленъ на два тома: I—Теорія; II—Задачи.

Въ видахъ удобства покупателей каждый томъ продается отдѣльно.

Составитель.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ ДѢЙСТВІЯ.

ГЛАВА I.

Предварительныя понятія и опредѣленія.

1. Истинно назвать алгебру „*общей арифметикой*“.

Начавши ее арифметикой, мы хотѣли этимъ выразить, что предметъ алгебры тотъ же, что и арифметики, — изученіе чиселъ, слѣдовательно, что алгебра есть какъ бы продолженіе арифметики. Начавъ же *общей*, мы этимъ самымъ указали, что цѣль алгебры заключается въ *обобщеніи* какъ самихъ вопросовъ о числахъ, такъ и способовъ ихъ рѣшенія.

Возьмемъ задачу: *найти два числа, которыхъ сумма равна 105, а разность 15?*

Рѣшая эту задачу *арифметическимъ путемъ*, мы стали бы разуждать такъ: если бы оба искомыя числа были равны, то мы нашли бы ихъ, раздѣливъ пополамъ ихъ сумму. Но мы можемъ уравнивать меньшее съ большимъ, если къ первому прибавимъ 15, и если эту прибавку сдѣлать къ суммѣ обоихъ чиселъ, то результатъ $105 + 15$, или 120, будетъ ни что иное, какъ удвоенное большее число, которое и найдемъ, раздѣливъ 120 на 2. Итакъ, большее число $= 120 : 2$, или 60; а слѣдовательно, меньшее найдемъ, уменьшивъ 60 на 15, что дастъ 45.

Для повѣрки достаточно числа 60 и 45 сложить, чтобы убѣдиться, составятъ ли ихъ сумма 105; повѣрка по отношенію къ разности (15) не нужна, такъ какъ меньшее число найдено вычитаніемъ этой разности изъ большаго.

Можно бы было идти инымъ путемъ: приравнивая большее число меньшему, можно уменьшать для этого большее число на 15. Если уменьшить 15-ью суммъ, то результатъ, $105 - 15 = 90$, представлялъ бы удвоенное меньшее число; и слѣдовательно, раздѣливъ 90 пополамъ, нашли бы въ результатѣ меньшее число — 45; а прибавъ къ нему 15, нашли бы большее.

Рѣшеніе задачи значительно *упростится*, если искомыя мы обозначимъ буквами, что *сокращаетъ рѣчь*, а дѣйствія будемъ обозначать знаками, что *сокращаетъ письмо*. Этого рода сокращенія допускаетъ и арифметика.

Итакъ, обозначимъ меньшее число буквою x ; тогда большее число будетъ

$x = 15$, а оба вместе составлять $x + x = 15$, или, короче, $2x = 15$, что, по условию, равно 105; записываемъ

$$2x + 15 = 105.$$

Неизвестное слагаемое ($2x$) определяется вычитаніемъ изъ суммы (105) известнаго слагаемаго (15); слѣд. $2x = 105 - 15 = 90$. Отсюда $x = 90 : 2 = 45$. Придавъ 15 къ 45, найдемъ большее число.

Отсюда видно, какимъ образомъ введение знаковъ для обозначенія дѣйствій, и буквы x для обозначенія искомага *сокращаетъ рѣчь и мысль*, и этимъ самымъ ускоряетъ рѣшеніе задачи. Чѣмъ сложнее задача, тѣмъ важнѣе введение этихъ, сокращающихъ запись и рѣчь, знаковъ.

2. Окончательные результаты, полученные нами при рѣшеніи задачи, т.-е. числа 45 и 60, не носятъ на себѣ слѣда данныхъ чиселъ и тѣхъ дѣйствій, путемъ которыхъ эти результаты найдены. Въ самомъ дѣлѣ, по мѣрѣ выполненія дѣйствій, данныя числа замѣняются новыми; потому-то найденные результаты не даютъ никакого понятія о томъ, какія дѣйствія и въ какомъ порядкѣ нужно совершить надъ данными числами для получения искомага. Чтобы это было видно, нужно только обозначать дѣйствія знаками, воздерживаясь отъ всякихъ вычислений. Поступая такъ въ будущей задачѣ, мы нашли бы для меньшаго числа выраженіе

$$x = \frac{105 - 15}{2}.$$

Изъ котораго можно заключить, что для нахождения меньшаго числа нужно изъ заданной суммы вычесть данную разность и остатокъ раздѣлить на 2. Но чтобы такая *арифметическая формула* служила отчетливымъ выраженіемъ правила для рѣшенія данного вопроса, нужно, чтобы она удовлетворяла нѣкоторымъ требованіямъ. Необходимо: 1) чтобы данныя величины были выражены небольшими числами, иначе формула будетъ не достаточно *проста*; 2) чтобы числа эти были разнообразны: иначе формула будетъ лишена *ясности*. Но если эти условія и будутъ удовлетворены, то все-таки неизбежное выношеніе нѣкоторыхъ дѣйствій (каково, напр., было соединеніе вместе нѣсколькихъ *c*—совъ) можетъ ввести въ формулу числа одинаковыя съ данными, а вълѣтѣе этого формула потеряетъ совершенную ясность. Неудобства подобнаго этому, очевидно, будутъ возрастать вмѣстѣ съ сложностью задачъ. Но они легко устранимы, и легко видѣть—какими средствами.

Имѣла цѣль состоятъ въ томъ, чтобы достичь возможности выражать формулами правила для рѣшенія сколькихъ угодно задачъ *одного рода*, т.-е. развѣншихся не условіями, а лишь числовыми значеніями данныхъ въ задачѣ величинъ. Пусть, напр., мы хотимъ найти правило для рѣшенія задачи: *найти два числа по даннымъ суммамъ ихъ и разности, каковы бы ни были эти суммы и эта разность*. Легко видѣть, что такое *общее рѣшеніе* для всѣхъ задачъ одного рода найти возможно. Въ самомъ дѣлѣ, дѣйствія, которыхъ требуетъ рѣшеніе задачи, зависятъ *исключительно* отъ *соотношеній* между данными въ задачѣ числами, но никакимъ образомъ не отъ частныхъ значеній этихъ чиселъ. А слѣдовательно, эти данныя числа можно обозначить *буквами*, но буквы не могутъ сливаться, не могутъ исчезать, замѣняясь другими; дѣйствія надъ ними можно только обозначать, но не выполнять; сл. полученное выраженіе будетъ ясно указывать, какія дѣйствія и въ какомъ порядкѣ нужно совершать надъ данными для нахождения искомага во всѣхъ задачахъ одного рода.

Итакъ, пусть данная сумма равна s , а данная разность d . Пусть, далѣе, меньшее число x ; большее будетъ $y = x + d$; по условію, $x + y + d = s$, или $2x + d = s$, откуда $2x = s - d$, и слѣд.

$$x = \frac{s - d}{2} \dots (1)$$

Формула (1) опредѣляетъ меньшее число. Большее число будетъ $\frac{s - d}{2} + d$, или $\frac{s - d + 2d}{2}$, или, наконецъ,

$$y = \frac{s + d}{2} \dots (2)$$

Формулы (1) и (2) ясно показываютъ правило: для нахождения большаго числа надо къ данной суммѣ придать данную разность и результатъ раздѣлить на 2; а для нахождения меньшаго числа слѣдуетъ изъ данной суммы вычесть данную разность и остатокъ раздѣлить на 2.

Разъ такія буквенныя формулы найдены, мы при ихъ помощи можемъ рѣшать какія угодно задачи, однородныя съ данной; стоитъ только вмѣсто буквъ подставлять числа и выполнять указанныя дѣйствія.

Такъ, если данная сумма = 500, а разность 200, то, подставивъ 500 вмѣсто s и 200 вмѣсто d , найдемъ, что:

$$\text{большая часть} = \frac{500 + 200}{2} = \frac{700}{2} = 350,$$

$$\text{а меньшая часть} = \frac{500 - 200}{2} = \frac{300}{2} = 150.$$

Преимущества буквенныхъ формулъ передъ числовыми, какъ видно изъ изложеннаго, заключаются въ слѣдующемъ:

1) Подъ буквами можно разумѣть какія угодно числа, поэтому рѣшеніе, выраженное буквенною формулою, пригодно для всѣхъ однородныхъ задачъ: буквенная формула даетъ *общее рѣшеніе* цѣлаго класса задачъ.

2) Алгебраическая формула даетъ наиболѣе ясное рѣшеніе задачи, ибо въ ней наиболѣе ясно изображаются порядокъ и послѣдовательность дѣйствій, которыя надо совершить надъ данными для нахождения искомого; между тѣмъ какъ въ арифметической формулѣ эта ясность, какъ мы видѣли, иногда терится.

3) Результатъ, представленный алгебраическою формулою, выражается обыкновенно коротко и потому позволяетъ легко удерживать въ памяти правило рѣшенія вопроса.

Но это еще не все. Алгебраическая формула, указывая связь между количествами задачи, позволяетъ вывести рядъ другихъ формулъ, дающихъ рѣшенія ряда другихъ задачъ, если брать послѣдовательно за неизвѣстное каждое изъ количествъ, входящихъ въ формулу. Для пріятнаго вывода общую формулу, которая давала бы рѣшеніе всѣхъ вопросовъ о простыхъ процентахъ.

Найти прибыль, приносимую капиталомъ a , помещеннымъ на t лѣтъ по $p\%$, въ годъ, считая простые проценты?

100 руб. даютъ въ годъ прибыль $p\%$ руб.; слѣд. 1 р дастъ въ то же время прибыль во 100 разъ меньшую, или $\frac{p}{100}$ р. а капиталъ a р. дастъ прибыль въ

a разъ большую, или $\frac{ap}{100}$. Это есть прибыль, приносимая капиталомъ a въ

1 год; прибыль въ t лѣтъ будетъ въ t разъ больше, такъ что, называя эту прибыль i , получимъ соотношеніе

$$i = \frac{arp}{100} \dots (1)$$

Это равенство связываетъ 4 количества: a , p , t , i и даетъ рѣшеніе 4 задачъ, позволяя по тремъ даннымъ тремъ количествамъ вычислить четвертое. Формула (1) позволяетъ находить прибыль, когда извѣстны—капиталъ, время и проценты.

Разсматривая a какъ одинъ изъ сомножителей, мы его найдемъ, раздѣливъ произведеніе (1) на другой сомножитель ($\frac{pt}{100}$), такъ обр.

$$a = i \cdot \frac{100}{pt}, \text{ или } a = \frac{100i}{pt} \dots (2)$$

Формула (2) даетъ рѣшеніе задачи: *На сколько лѣтъ капиталъ надо помѣстить по $p\%$, чтобы онъ принеся 1 рубъ прибыли?*

Положивъ въ формулу (2) $i = 1$, а все остальное p , мы найдемъ, что $t = \frac{100}{p}$. Раздѣливъ формулу (1) на другой сомножитель $\frac{at}{100}$,

$$p = i : \frac{at}{100}, \text{ или } p = \frac{100i}{at} \dots (3)$$

Формула (3) даетъ рѣшеніе задачи: *На какие проценты надо помѣстить капиталъ a , чтобы онъ въ t лѣтъ далъ прибыль 1 рубъ?*

Принимая, наконецъ, въ равенствѣ (1) за неизвѣстное t , найдемъ

$$t = \frac{100i}{ap} \dots (4)$$

Такова формула, по которой рѣшается вопросъ: *на сколько лѣтъ надо помѣстить капиталъ a по $p\%$, чтобы онъ принеся 1 рубъ прибыли?*

Поставляя въ формулы (1), (2), (3) и (4) вместо буквъ числа, мы можемъ рѣшить любую числовую задачу на простые проценты. Напр.: на сколько t надо помѣстить капиталъ 3000 р., чтобы въ 4 года получить 360 р. прибыли?

Положивъ въ формулу (3)

$$a = 3000, t = 4, i = 360,$$

найдемъ

$$p = \frac{100 \times 360}{3000 \times 4} = 3.$$

Такимъ образомъ возможно обобщеніе какъ самыхъ вопросовъ, такъ и способовъ ихъ рѣшенія.

Наука, занимающаяся обобщеніемъ вопросовъ о числахъ и способахъ ихъ рѣшенія, называется алгеброю.

3. Знаны, употребляемые въ алгебрѣ, частью тѣ же самые, что и въ арифметикѣ, частью другіе. Ихъ можно раздѣлить на три группы: 1) знаки, употребляемые для изображенія чиселъ; 2) для изображенія дѣйствій надъ числами; и 3) для изображенія соотношеній между числами.

1. **Знаки для изображенія чиселъ.** Числа изображаются въ алгебрѣ не цифрами, какъ въ арифметикѣ, а *буквами*; это обозначеніе было введено фран-

цузскимъ математикомъ второй половины XVI вѣка *Вьетомъ* (1540—1603). Вѣтъ употребляютъ большія литеры: малыя буквы введены англійскимъ математикомъ *Томасомъ Гарриотомъ* (1560—1621).

Для обозначенія известныхъ чиселъ употребляются первыя буквы латинской азбуки: a, b, c, d, e, f, \dots ; для обозначенія неизвѣстныхъ — послѣднія буквы: x, y, z, \dots .

Нюгда при буквахъ ставятъ значки или указатели (индексы), когда хотѣтъ сохранить въ обозначеніи аналогію, существующую между изображаемыми количествами.

Такимъ образомъ пишутъ: $a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, \dots$; или: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$. Съ тою же цѣлью употребляютъ еще буквы греческаго алфавита, соотвѣтствующія латинскимъ: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$.

Числа, изображенныя буквами, называются *общими числами*, потому-что подъ каждою буквою разумѣютъ не одно какое-либо число, но какинъ-угодно числа.

2. Знаки для изображенія дѣйствій.

Сложение обозначается знакомъ $+$ (плюсъ); такъ $a + b$ означаетъ сумму количествъ a и b .

Вычитаніе обозначается знакомъ $-$ (минусъ); такъ $a - b$ означаетъ разность между a и b .

Знаки $+$ и $-$ введены во всеобщее употребленіе нѣмецкимъ математикомъ XV столѣтія *Нильсомъ*, что первый началъ ихъ употреблять *Нурбаръ* (1423—1461). Въ *Арифметикѣ* *Риффанда* напечатанной въ 1525 г. подъ заглавіемъ *Rechnung*, и въ *Арифметикѣ* *Штефеля*, напечатанной въ 1544 г., приняты уже эти знаки.

Умноженіе обозначается знакомъ \cdot , или \cdot (точкою), или же между сомножителями не ставится никакого знака; такимъ образомъ $a \cdot b$, $a . b$, и ab одинаково означаютъ произведеніе a на b .

Нужно замѣтить, что знакъ умноженія нельзя опускать, когда числа изображены цифрами; произведеніе 4 на 7 нельзя представить въ видѣ 47, такъ какъ 47, по принятому способу изображенія чиселъ, означаетъ не произведеніе 4 на 7, а число сорокъ семь.

Опущеніе всякаго знака умноженія между различными факторами произведенія впервые встрѣчается у *Штефеля* (*Arithmetica* 1544); знакъ \times (крестъ) введенъ *Оутридомъ* (*Oughtred*), въ сочиненіи *Clavis mathem.* 1631; знакъ \cdot (точка) введенъ *Лейбницемъ* во второй половинѣ XVII столѣтія.

Дѣленіе обозначается или двоеточіемъ, или чертою; такъ $a : b$ и $\frac{a}{b}$ одинаково означаютъ частное отъ раздѣленія a на b .

Полагать, что знакъ $:$ введенъ во всеобщее употребленіе *Лейбницемъ*; знакъ \cdot (черта) встрѣчается уже въ сочиненіи *Фибоначчи* Пизавскаго (1202 г.)

3. **Знаки соотношеній.** Соотношенія между величинами могутъ быть двоякаго рода: двѣ величины могутъ быть или равны между собою, или неравны одна другой. Для изображенія равенства двухъ количествъ употребляется знакъ $=$; такъ, выраженіе

$$A = B$$

означаетъ: A равно B .

Знакъ равенства ($=$) введенъ англійскимъ математикомъ *Рекордомъ*, который въ первый разъ употребилъ его въ своемъ сочиненіи «Врусокъ для ума»

(The Wletstone of Wit), изданномъ въ 1557 г. Во всеобщее употребленіе знакъ этотъ вошелъ сто лѣтъ спустя.

Слово *большіе* изображается знакомъ $>$, слово *меньше* знакомъ $<$. Такъ $a > b$ означаетъ: a больше b ; $a < b$ означаетъ: a меньше b .

Когда хотѣть выразить, что два количества не равны, не указывая, которое изъ нихъ больше, ихъ отдѣляютъ знакомъ \neq ; такъ $a \neq b$ означаетъ, что a не равно b . Въмѣсто этого также пишутъ $a \neq b$.

Чтобы выразить, что a не меньше b , пишутъ $a \geq b$.

Такимъ же образомъ $a \leq b$ означаетъ, что a не больше b .

Знаки $>$ и $<$ введены английскимъ математикомъ Робертомъ.

Коэффициентъ. — Если какое-нибудь произведение, наприм., ab , требуется повторить столько-нибудь разъ, сколько разъ a или b берется въ суммѣ, то можно написать ab въ скобкахъ, а передъ ними поставить число, показывающее, сколько разъ это произведение берется въ суммѣ. Такъ, наприм., $3(ab)$ означаетъ, что ab берется въ суммѣ три раза. Если же требуется повторить ab не столько разъ, сколько разъ берется a или b , то можно написать ab въ скобкахъ, а передъ ними поставить число, показывающее, сколько разъ это произведение берется въ суммѣ. Такъ, наприм., $\frac{2}{3}(ab)$ означаетъ, что ab берется въ суммѣ $\frac{2}{3}$ раза. Если же требуется повторить ab не столько разъ, сколько разъ берется a или b , то можно написать ab въ скобкахъ, а передъ ними поставить число, показывающее, сколько разъ это произведение берется въ суммѣ. Такъ, наприм., $\frac{2}{3}(ab)$ означаетъ, что ab берется въ суммѣ $\frac{2}{3}$ раза.

Число, стоящее передъ скобками, называется коэффициентомъ или предстоящимъ. Коэффициенту можно дать и другое преддѣленіе. Въ самомъ дѣлѣ, повторить ab нѣтъ разницы, сколько разъ берется a или b , такъ какъ это произведение можно написать въ видѣ $1 \cdot ab$.

Такъ, въ выраженіяхъ $7ab$, $\frac{2}{3}mn$, множители 7 и $\frac{2}{3}$ суть коэффициенты. Иногда и буквенные производители рассматриваются какъ коэффициенты по отношенію къ слѣдующимъ за ними произведеніямъ; такъ, въ выраженіи abc можно a считать коэффициентомъ произведенія bc . Если произведение состоитъ изъ однихъ буквенныхъ множителей, то коэффициентъ его есть 1; напр. коэффициентъ произведенія abc есть 1, такъ какъ это произведение можно написать въ видѣ $1 \cdot abc$.

Степень. — Степенью называется произведение равныхъ множителей.

Если число берется множителемъ два раза, то произведение называется *второю степенью* или *квадратомъ* этого числа; такъ $5 \cdot 5$ или 25 есть квадратъ пяти. Когда число берется множителемъ три раза, то произведение называется *третьею степенью* или *кубомъ* этого числа; такъ $5 \cdot 5 \cdot 5$ или 125 есть кубъ пяти. Произведение четырехъ равныхъ множителей наз. *четвертою степенью*; напр. $a \cdot a \cdot a \cdot a$ есть четвертая степень числа a . (Замѣтимъ, что если число равныхъ множителей велико, то письменное изображеніе степени займетъ много времени и мѣста. Для устраниенія этого неудобства введено слѣдующее сокращенное изображеніе степени: перемножаемое само на себя количество пишутъ одинъ разъ, а надъ нимъ справа ставятъ число, показывающее, сколько разъ это количество берется множителемъ. Согласно этому условію, квадратъ количества a , т.е. произведеніе $a \cdot a$, сокращенно пишется въ видѣ: a^2 ; кубъ a , т.е. произведеніе $a \cdot a \cdot a$, сокращенно изображается въ видѣ: a^3 ; четвертая степень a , т.е. $a \cdot a \cdot a \cdot a$ — въ видѣ a^4 и т.д. — Каждый изъ равныхъ множителей называется *основаніемъ* степени; такъ въ формулѣ a^4 основаніе есть a . Числа 2, 3, 4 и т.д., стоящія надъ основаніемъ, называются *показателями*

степени. Имять, *показатель степени есть число, которое ставится надъ буквою и означаетъ, сколько разъ эта буква берется множителемъ.*

Показатель 1 не пишется, а подразумевается; такъ, вмѣсто b^1 пишутъ b .

Изъ основаній сказаннаго, произведение $aaaabbbccc$ сокращенно пишутъ въ видѣ $a^4b^3c^3$. Обратно, a^4b^3 есть сокращенно написанное произведение $aaaabbb$.

Дѣйствіе на возвышеніи степени даннаго числа называется возвышеніемъ въ степень. Такъ, возвысивъ 7 въ кубъ, т.-е. взявъ 7 множителемъ три раза, получимъ 343. Возвысивъ $\frac{1}{2}$ въ четвертую степень, т.-е. взявъ $\frac{1}{2}$ множителемъ четыре раза, найдемъ $\frac{1}{16}$ и т. д.

Полезно знать на память квадраты и кубы, по крайней мѣрѣ, первыхъ десяти чиселъ, которые мы и помещаемъ въ слѣдующей таблицѣ:

Числа:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Квадраты:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Кубы:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Корень. Корнемъ второй степени или квадратнымъ изъ даннаго числа называется такое число, квадратъ котораго равенъ данному числу. Такъ, квадратъ корня изъ 9 равенъ 3, потому что квадратъ трехъ дастъ 9.

Кубическимъ корнемъ изъ даннаго числа называется такое число, которое кубъ равенъ данному числу. Напр., кубическій корень изъ 64 равенъ 4, потому-что кубъ четырехъ равенъ 64.

Корнемъ четвертаго порядка изъ даннаго числа называется такое, четвертая степень котораго равна данному числу. Такъ, корень четвертаго порядка изъ 16 равенъ 2, ибо $2^4 = 16$.

Въобще, *корнемъ n-го порядка изъ даннаго числа наз. такое число, котораго n-ая степень равна данному числу.* Такимъ образомъ корень n-го порядка изъ a^n есть a .

Для обозначенія корня употребляютъ знакъ $\sqrt{\quad}$, подъ которымъ ставятъ данное число, называемое поэтому *подкореннымъ числомъ*. Въ отверстіе этого знака ставятъ число, которое показываетъ, въ какую степень должно возвысить корень для полученія даннаго числа: его называютъ *показателемъ корня*.

Такъ, чтобы обозначить именованно, что корень четвертаго порядка изъ 16 равенъ 2, пишутъ: $\sqrt[4]{16} = 2$; здѣсь 2 есть самый корень, 16 — подкоренное число, 4 — показатель корня.

Если показатель корня равенъ 2, то его не пишутъ, а подразумеваютъ. Такъ, для обозначенія, что квадратный корень изъ $\frac{1}{4}$ равенъ $\frac{1}{2}$, пишутъ: $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Коренью или $\sqrt{\quad}$ называется также *радикаломъ*. *Дѣйствіе извлеченія корня называется извлеченіемъ корня.*

Первые слѣды употребленія показателей находятся у Лароша (Arismetique et Geometrie, 1520); онъ употребляетъ показатели 1, 2, 3. — Знакъ $\sqrt{\quad}$ находятъ впервые у Христиана Рудольфа (1524). — Окончательно же эти знаки введены Декартомъ. — Знакъ $\sqrt{\quad}$ есть ни что иное, какъ искаженная буква r (начальная буква слова radix — корень).

Скобки. — Для обозначенія дѣйствія употребляютъ еще особые знаки, называемые *скобками*. Ихъ даютъ видъ: (\quad) , или $[\quad]$, или $\{ \quad \}$. Скобки первого вида называютъ *простыми*, второго — *квадратными*, третьего — *фигурными*.

Такъ, для обозначенія, что разность $a - b$ нужно умножить на c , пишутъ:

$$(a - b) \cdot c$$

Если это выраженіе написать безъ скобокъ, т.-е. такъ:

$$a - b \cdot c,$$

то смыслъ его былъ бы иной, именно: оно выразило бы то, что a — вычетъ изъ a произведение b на c , между тѣмъ какъ требуется разность $a - b$ умножить на c .

Если бы требовалось сумму $a + b$ умножить на c и изъ полученной суммы вычесть d , то слѣдуетъ написать такъ:

$$(a + b) \cdot (c - d).$$

Если опустить скобки, т.-е. написать

$$a + b \cdot c - d,$$

то смыслъ небаго выраженія не былъ бы согласенъ съ требованіемъ, потому что подобное выраженіе означало бы слѣдующее требованіе: къ a придать произведение куба b на c и изъ полученной суммы вычесть d .

Скобки не ставятъ всякій разъ, когда и безъ нихъ обозначеніе дѣйствія не представляетъ недоразумѣній, или когда для обозначенія дѣйствія вводится особый знакъ, утрачивающій необходимость скобокъ. Напр., если бы требовалось выраженіе $a^2 + (a - b) \cdot c$ разложить на $m^2 - n^2$, то, обозначая дѣленіе знакомъ двоеточія, необходимо и дѣлимое и дѣлитель заключить въ скобки, написавъ:

$$[a^2 + (a - b) \cdot c] : (m^2 - n^2).$$

Но если вмѣсто двоеточія знакомъ дѣленія взять черту, проведя ее подъ всѣмъ дѣлмымъ, то она устранитъ необходимость заключенія дѣлимаго и дѣлителя въ скобки; частное изобразится въ такомъ случаѣ въ видѣ

$$\frac{a^2 + (a - b) \cdot c}{m^2 - n^2}.$$

Точно также для обозначенія, что изъ выраженія $a + b - c$ надо извлечь кубичный корень, слѣдуетъ данное выраженіе заключить въ скобки, написавъ:

$$\sqrt[3]{a + b - c}.$$

Но если протянемъ горизонтальную черту радикала надъ всѣмъ даннымъ выраженіемъ, то послѣдній устранитъ необходимость заключенія выраженія $a + b - c$ въ скобки; дѣйствіе изобразится слѣд. обр.:

$$\sqrt[3]{a + b - c}.$$

Употребленіе скобокъ въ первый разъ встрѣчается въ сочиненіи *Альберта Жирара*: «*Invention nouvelle dans l'Algebre etc.*», изданномъ въ Амстердамѣ въ 1629 г.

4. Классификація алгебраическихъ формулъ. — *Алгебраическимъ выраже-
ніемъ* или *формулою* называютъ совокупность буквъ, чиселъ и знаковъ, ука-
зывающую рядъ действий надъ числами, которыя подразумѣваются подъ данными
буквами. Такии образоиъ:

$$\frac{a-d}{\sqrt{2}}, \quad \frac{8a^2-4ab+3b^2}{a^2-b^2}, \quad 18a^3(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}) \\ b^2(\sqrt{a}+\sqrt[3]{c})$$

суть алгебраическія выраженія или формулы.

Всякое алгебраическое выраженіе, не содержащее корней изъ буквенныхъ вы-
раженій, называется *раціональнымъ*; оно называется *ирраціональнымъ*, если
содержитъ *буквенные радикалы*. Первые два изъ вышеприведенныхъ выраженій
раціональны, третье — ирраціональное. Нужно замѣтить, что выраженіе можетъ
быть раціонально относительно некоторыхъ буквъ, и ирраціонально относительно
другихъ буквъ. Такъ, выраженіе $ax^2 + x + b$ раціонально по отношению къ a
и x , но ирраціонально относительно b .

Раціональныя выраженія раздѣляются на *цѣлыя* и *дробныя*: цѣлымъ на-
зываютъ раціональное выраженіе, не содержащее буквенныхъ дѣлителей; дроб-
нымъ — выраженіе, содержащее буквенныхъ дѣлителей. Такъ, выраженія

$$4a^2b, \quad 7ab^2, \quad \frac{3}{7}a^4b^4, \quad 19a^4 - \frac{2}{3}a^2b + \frac{5}{8}b^4$$

суть алгебраическія цѣлыя, хотя второе и третье и содержатъ числовыхъ дѣли-
телей; выраженія же

$$\frac{a+b}{a-b}, \quad \frac{8a^2-4ab+3b^2}{a^2-b^2}$$

алгебраически дробныя, такъ какъ имѣютъ буквенныхъ дѣлителей.

Одночленомъ называютъ такое выраженіе, въ которомъ послѣднее дѣйствіе
суть умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень или извлеченіе корня, но не
сложеніе и не вычитаніе. Такъ выраженія

$$7a^3b^2c, \quad \frac{7a^3b^2}{4c^2+d^2}, \quad (a^2-b^2)(c+d), \quad (x-y-z)^4, \quad \sqrt{x^2-y^2}$$

суть одночлены.

Многочленомъ наз. выраженіе, состоящее изъ нѣсколькихъ одночленовъ,
соединенныхъ знаками $+$ или $-$.

Такъ, выраженія

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \quad \frac{3a^3\sqrt[3]{b}}{c} - \frac{7a^2b^2}{4c^2} + \frac{5a^3b^3c}{3} - 1.$$

суть многочлены.

Одночлены, составляющіе многочленъ, называются его *членами*. Знакъ, пред-
шествующій одночлену, считается составною частью члена, такъ, члены первого
многочлена суть

$$+a^3, \quad -3a^2b, \quad +3ab^2, \quad -b^3.$$

Если передъ первымъ членомъ не поставлено знака, то нужно подразумѣвать +.

Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, напр. $a^2 - b^2$, наз. *биномомъ* или *двучленомъ*; состоящій изъ трехъ членовъ, какъ $a^2 - 2ab + b^2$, *триномъ* или *трехчленомъ*; если же число членовъ больше, то многочлену не даютъ особаго названія.

Измѣреніе. — Число буквенныхъ множителей цѣлаго одночлена называется его *измѣреніемъ*, такъ, одночленъ $4a^3b^2c$ будетъ *шести измѣреній*, потому что, произведя всѣ буквы въ видѣ $4aabbcc$, видимъ, что онъ содержитъ шесть буквѣнныхъ множителей. Сложивъ показатели, получимъ $3 + 2 + 1$ или 6; сл. для опредѣленія измѣренія цѣлаго одночлена нужно взять сумму показателей его буквѣ.

Цѣлый многочленъ, состоящій изъ членовъ одинаковаго измѣренія, называется *однороднымъ*, а если изъ цѣлаго члена такого многочлена называется также *нѣкоррктнымъ* или *нечеткимъ*. Напр., выраженіе $a^3 - ab^2 - 3ab^2 - b^3$ есть *однородный многочленъ*, состоящій изъ членовъ измѣренія 6, а выраженіе, котораго $a^4 - 3a^3 + ab^3 + c$ измѣренія 4, 3, 4 и 1, наз. *разнороднымъ* или *нечеткимъ*.

Сложивъ показатели измѣренія цѣлаго одночлена, получимъ высшій показатель буквы въ многочленѣ. Такъ

$$8ax^3 - 2a^2x^2 + 7a^3x + a^4$$

есть многочленъ третьей степени относительно буквы x .

5. Числовое значеніе формулы. — Числовымъ значеніемъ формулы называется то число, которое получится, если буквы замѣнимъ числами и выполнимъ указанныя знаками дѣйствія.

Такъ, если требуется вычислять числовое значеніе выраженія

$$2a^2 - 4a^2 - b^2 \\ 3c$$

при $a = 4$, $b = 3$ и $c = 1$, то, подставивъ вмѣсто буквѣ данныхъ числа, найдемъ

$$\frac{2 \times 4^2 - 4 \times 4^2 - 3^2}{3 \times 1} = \frac{2 \times 16 - 4 \times 16 - 9}{3} = \frac{32 - 64 - 9}{3} = \frac{-41}{3} = -12 \frac{1}{3}.$$

$-12 \frac{1}{3}$ и есть числовое значеніе данной формулы.

ГЛАВА II.

Положительныя и отрицательныя количества.

6. Изображеніе количествъ буквами вмѣсто цифръ не составляетъ еще существеннаго отличія алгебры отъ арифметики; и арифметика, при доказательствѣ теоремъ и при рѣшеніи задачъ, также пользуется для изображенія чиселъ буквами, хотя въ ней употребленіе буквѣ и не такъ систематично какъ въ алгебрѣ. Существенная разниа между этими науками состоитъ въ томъ, что въ разсмотрѣніе величинъ алгебра вводитъ *идею о направленіи*, совершенно чуждую арифметикѣ.

Всё, что может увеличиваться или уменьшаться и быть измеряемо, называется *математическою величиною*. Такъ — вѣсъ, объёмъ, время, температура, скорость, сила и т. п. суть величины.

Измерить величину значитъ сравнить ее съ другою однородною съ нею величиною, на чёмъ и при этомъ *единицею*. *Мѣры*; точнѣе говоря, это значитъ найти какое отношеніе измеряемой величины къ единицѣ мѣры. Такъ, измеряя вѣсъ чего нибудь, мы узнаемъ, сколько разъ въ немъ содержится единица вѣса (пудъ, фунтъ и т. п.), или какая-нибудь доля ея. Поэтому результатомъ измерения вѣса, является *число отвлеченное*. Цѣлое или дробное отвлеченное число, измеренное какую величину, называется *абсолютнымъ числомъ*; вместе съ называемою мѣрою оно даетъ намъ точное понятіе о разсматриваемой величинѣ, и для опредѣленія величины достаточно знать только ея мѣры.

Величины, которыя имѣютъ дѣло *арифметика*, вполне опредѣляются, какъ слѣдуетъ, указаніемъ отношеніе къ 1-цѣ мѣры и самая эта единица; такъ — число, вѣсъ, капиталъ и т. п. Ихъ называютъ *абсолютными величинами (скаляры)*.

Но для полнаго опредѣленія которыхъ недостаточно указать, каково отношеніе къ единицѣ мѣры и какова самая эта единица. Такъ, если я выхожу изъ комнаты сначала у двери, а отошелъ отъ нея на 4 аршина, то мое положеніе относительно двери еще не будетъ известно, пока не скажутъ, куда идти — *въ какую сторону* относительно двери и куда идти — *въ комнату*, или *вышелъ изъ нея*. Еще примѣръ. Если мы идемъ по прямой улицѣ, то не имѣемъ еще понятія о величинѣ измѣненія; въ самомъ дѣлѣ, мы должны указать *направленіе* измѣненія, т. е. сказать, куда идти — *въ какую сторону* — *идти* на 2 минуты. Третій примѣръ. Если мы скажемъ, что температура воздуха измѣнилась на 10 градусовъ, то этимъ мы не опредѣлимъ еще точно это измѣненіе: для полнаго опредѣленія измѣненія температуры надо указать — *повысилась* она на 10 градусовъ или *понижилась*, т. е. опять надо указать *направленіе* измѣненія.

Большинство величинъ, существующихъ въ природѣ, имѣютъ два противоположныя направленія, и потому называются *противоположными величинами*. Такъ — *время*, которое можно считать въ направленіи будущаго и прошедшаго отвлеченнаго даннаго момента; *пространство*, проходимое прямолинейно движущимся тѣломъ: *ускореніе* и *замедленіе* движенія; *температура*, потому что она можетъ быть выше нуля и ниже нуля; *прибыль* и *убытокъ*, ибо они имѣютъ капиталъ въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ; суммы *поступленийъ* въ банкъ банкира и суммы *выдаваемыхъ* денегъ; наконецъ *линии*, напослѣдкѣ на неограниченной прямой отъ некоторой постоянной точки, называемой началомъ.

Такого рода величины, взятая въ одномъ направленіи, называются *положительными*, а въ противоположномъ — *отрицательными*. Отъ насъ зависитъ, въ какомъ направленіи считать противоположныя величины положительными и въ какомъ — отрицательными; если условимся считать положительными: 1) разстояніе вправо отъ начала, 2) время будущее, 3) ускореніе, 4) прибыль, 5) капиталъ, 6) температуру выше нуля, то противоположныя этимъ величины, т. е. разстояніе влево отъ начала, время прошедшее, замедленіе, убытокъ, долгъ, температуру ниже нуля, нужно принимать отрицательными.

7. Существуютъ два способа изображенія противоположныхъ величинъ — *графическій* и *алгебраическій*.

1. Условимся каждую единицу рассматриваемой величины изображать прямой линией определенной длины, наприм. линией ab (черт. 1); отложив линию ab на неограниченной прямой столько раз, сколько въ рассматриваемой вели-



Черт. 1.

чинѣ находится единица, мы и получимъ графическое изображеніе абсолютнаго значенія этой величины.

[Для изображенія противоположныхъ величинъ, каково бы ради онѣ ни были, условимся представлять ихъ прямыми, наводимыми на вѣдѣнную прямую (называемую *осью*) xx' , начиная отъ нѣкоторой точки o въ *направленіи* *начала*; при чемъ положительныя величины будемъ изображать въ *направленіи* отъ o къ x , а отрицательныя въ *направленіи* отъ x къ x' , т. е. въ *противоположную* сторону (черт. 2).



Черт. 2

Итакъ, абсолютныя значенія противоположныхъ величинъ можно представлять *длиною* извѣстныхъ линій, а *направленія* — *положеніемъ* этихъ линій относительно начала.

При такомъ представленіи противоположныхъ величинъ каждая изъ нихъ имѣетъ определенное *начало* и *конечъ*. Отрѣзки прямой, конечныя точки которыхъ играютъ различную роль, одна — начала, другая — конца, называются *векторами*.

Примѣчаніе. Графическимъ представленіемъ противоположныхъ величинъ пользуются при доказательствахъ тамъ, гдѣ чисто алгебраическіе методы трудно примѣнны. Къ преимуществамъ графическихъ методовъ принадлежитъ ихъ наглядность, позволяющая легко усвоить истины весьма отвлеченнаго характера. Ниже мы воспользуемся этимъ методомъ при доказательствѣ теоремъ, относящихся къ свойствамъ суммы.

2. [Для изображенія противоположныхъ величинъ, очевидно, можно поступить еще такъ. Взявъ арифметическое число, выражающее абсолютное значеніе взятой величины, можно снабдить это число какимы-либо условнымъ значкомъ, который служить бы указаніемъ *направленія* величины. На первый взглядъ кажется, что такой значокъ можно бы было выбрать произвольно; для указанія температуръ, наприм., можно бы было обозначить число градусовъ цифрою, ставя въ возлѣ этой цифры букву $+$ для обозначенія градусовъ выше нуля, и букву $-$ для обозначенія градусовъ ниже нуля. Такимъ образомъ, 5^+ обозначало бы 5 градусовъ выше нуля, а 5^- обозначало бы 5 градусовъ ниже нуля. Можно бы было условиться обозначать градусы выше нуля знакомъ ударенія, градусы ниже нуля — двумя такими знаками; при такомъ условіи вышеуказанныя температуры были бы выражены знаками: 5^+ и $5''$. Однако, болѣе глубокое изученіе вопроса привело къ заключенію, что изъ всѣхъ различительныхъ знаковъ, которыми можно пользоваться для обозначенія *направленія* противоположныхъ величинъ, всего лучше служатъ этой цѣли, и даже почти *необходимы*, знаки \perp и $-$, которыми въ ариметикѣ указывается сложеніе и вычитаніе, при чемъ по-

положительныя величины обозначаютъ знакомъ $+$, а отрицательныя—знакомъ $-$. Такимъ образомъ, вмѣсто того чтобы писать „5 градусовъ выше нуля“ или „5_а“ пишутъ < 5 градъ > и произносятъ „плюсъ 5 градусовъ“. Вмѣсто выраженія „5 градусовъ ниже нуля“ или „5_н“ пишутъ < — 5 гр. >, произнося „минусъ 5 градусовъ“. Точно также, вмѣсто того чтобы писать „5 футовъ вправо“ пишутъ < - 5 фут. >, произнося „плюсъ 5 ф.“; вмѣсто выраженія „семь лѣтъ тому назадъ“, пишутъ < — 7 лѣтъ >, говоря: „минусъ 7 лѣтъ“, и т. п.

Въ отвѣтъ на вопросъ: почему для обозначенія направленія величинъ взяты знаки $+$ и $-$, т. е. знаки дѣйствій сложения и вычитанія, замѣтимъ пока слѣдующее. Положительныя величины одного рода слѣдуетъ разсматривать какъ слагаемыя между собою, дѣйствительно, имѣя какую-нибудь прибыль, мы всякую новую прибавку будемъ прикладывать къ прежней, такъ какъ она служитъ къ увеличенію уже имѣющейся прибыли; если точка, находящаяся на прямой, перемѣщается вправо, то всякое новое перемѣщеніе вправо будетъ прикладываться къ предыдущему и т. д. Потому-то положительныя величины, какъ слагаемыя между собою, и сопровождаются знакомъ плюсъ. Отрицательныя величины одного рода, по отношенію къ положительнымъ, слѣдуетъ разсматривать какъ вычитаемыя. Дѣйствительно, имѣя капиталъ, мы всякій долгъ будемъ изъ него вычитать, такъ какъ долгъ служитъ къ уменьшенію капитала. Всякій проигрышъ, служа къ уменьшенію капитала, должно разсматривать какъ вычитаемое. Всякое перемѣщеніе влѣво, служа къ уменьшенію существующаго перемѣщенія вправо, есть вычитаемое и т. д. Потому-то отрицательныя величины, какъ вычитаемыя по отношенію къ положительнымъ, и сопровождаются знакомъ минусъ. Нулю также иногда приписываютъ тотъ же другой знакъ, когда въ изслѣдованіи значенія нулю, чтобы осталась какой-нибудь слѣдъ, показывающій происхожденіе отъ нуля. Наприм., когда температура низшая нуля увеличивается, дѣлаясь положительною, то, очевидно, нужно ее обозначить знакомъ $(+ 0)$. Тригонометрія представляетъ множество примѣровъ этого рода.

8 Мы обобщили понятіе объ арифметическомъ количествѣ, введя въ это понятіе новый элементъ—*направленіе*, при чемъ самое обобщеніе вывели изъ разсматриванія величинъ. Но къ тому же обобщенію можно придти еще другимъ путемъ, изъ разсмотрѣнія дѣйствій надъ числами.

Пусть изъ нѣкотораго числа a требуется вычесть b : разность выразится формулою $a - b$. Здѣсь слѣдуетъ разсмотрѣть три случая:

1) Когда a больше b , то-есть уменьшаемое больше вычитаемого, то вычитаніе такое всегда возможно. Такъ, если $a = 10$ и $b = 4$, то численная величина разности $a - b$ равна 6.

2) Если $a = b$, т. е. вычитаемое равно уменьшаемому, то вычитаніе снова возможно, потому что отъ a всегда можно отнять столько единицъ, сколько ихъ въ немъ находится; но остатокъ вычитанія уже не представляетъ никакого числа: онъ есть нуль, выражающій отсутствіе всякой величины. Однако, уже и въ арифметикѣ принято и нуль называть числомъ.

3) Когда $a < b$, т. е. вычитаемое больше уменьшаемаго, то вычитаніе не всегда возможно; разсмотримъ, когда оно возможно и когда нѣтъ.

Разсмотримъ сначала величину арифметическую, т. е. такую, для которой не существуетъ противоположной. Различныя состоянія такой величины можно представлять графически разстояніями точекъ прямой, неограниченно простирающейся только въ одну сторону отъ своей начальной точки, наприм., отъ точки O вправо (по направленію Ox).

Вычитаніе b изъ a выразится графически нанесеніемъ линіи a вправо отъ точки O въ направленіи возрастающихъ разстояній, а вычитаемой линіи b отъ конца M линіи $OM = a$ въ направленіи, противоположномъ направленію возрастающихъ разстояній, т.-е. влѣво отъ M (черт. 3). Самое построеніе показы-



Черт. 3.

ваетъ, что вычитаніе возможно до тѣхъ поръ, пока $b < a$. Если же b больше a , то построеніе укажетъ *невозможность* его. Такъ, что до конца N линіи $MN = b$ упадетъ въ томъ случаѣ, если $b > a$. Тогда O упадетъ влѣво отъ O , т.-е. линія OM , простирается влѣво отъ O , а линія MN простирается вправо отъ M . Тогда O упадетъ влѣво отъ O .

Пусть $a = 5$, $b = 7$; тогда

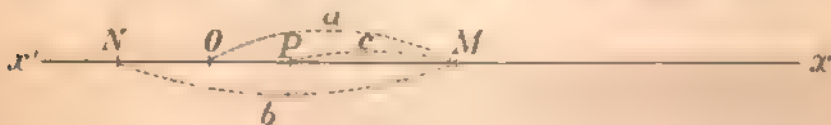
$$a - b = 5 - 7.$$

Разность $5 - 7$ можно выразить однимъ числомъ; въ самомъ дѣлѣ, вычесть 7 изъ 5 все равно что сперва вычесть 5, а затѣмъ 2, слѣд.

$$5 - 7 = 5 - 5 - 2;$$

но $5 - 5 = 0$, слѣд. $5 - 7 = 0 - 2$; опуская 0, получимъ въ остаткѣ -2 . Разность выражается отрицательнымъ числомъ -2 ; но это отрицательное число въ данномъ случаѣ ничего не представляетъ, не имѣетъ никакого реальнаго значенія.

Но если разсматриваемая прямая простирается не только вправо, но и влѣво отъ точки O , представляя такимъ образомъ величинны, имѣющія два противоположныхъ направленія, то дѣйствіе вычитанія большаго числа изъ меньшаго, бывшее въ первомъ случаѣ невозможнымъ, теперь становится возможнымъ, ибо ли-



Черт. 4.

нія $x'x$ имѣетъ точки влѣво отъ O , и разность $a - b = -2$ имѣетъ совершенно реальное значеніе, представляя линію ON , лежащую влѣво отъ начала O .

Итакъ, при вычитаніи большаго числа изъ меньшаго получается *отрицательное число*; оно не имѣетъ никакого реальнаго значенія въ случаѣ абсолютныхъ величинъ и, напротивъ, имѣетъ совершенно реальное значеніе въ случаѣ величинъ противоположныхъ.

Самое правило вычитанія большаго числа изъ меньшаго легко видѣть изъ приведеннаго прилѣра

$$5 - 7 = -2.$$

именно: нужно изъ большого числа вычесть меньшее и передъ остаткомъ поставить знакъ (—).

Въ противоположность отрицательнымъ числамъ, числа, получаемыя при всегда возможномъ вычитаніи меньшаго числа изъ большаго, называются положительными и означаются знакомъ +.

Такъ, если $a = 5$, $c = 3$; то

$$a - c = 5 - 3 = 2.$$

Легко видеть на чертежѣ, что значение положительнаго числа противоположно значенію отрицательнаго: въ то время какъ отрицательное число $a - b = -2$ означаетъ длину OA , лежащую *влѣво* отъ точки O , положительное число $a - c = 2$ выражаетъ длину OP , лежащую *справа* отъ начала (черт. 4).

9. Алгебраическое количество. Количество, состоящее изъ двухъ элементовъ: 1) изъ количественной величины, которая можетъ быть цѣлая или дробная, и 2) знака + или (—), указывающаго направленіе величины, и называется собственнымъ алгебраическимъ количествомъ. Такъ

$$+5, -6, +\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}, +a, -a, +3a^2, -5a^2$$

суть количества алгебраическія.

Если отъ количества отбросить знакъ, то получится арифметическое число, которое называется абсолютнымъ или числовымъ значеніемъ, также — модулемъ количества. Такъ, количества 8 и $-\frac{1}{2}$ имѣютъ абсолютными значеніями или модулями числа 8 и $\frac{1}{2}$.

Для обозначенія абсолютнаго значенія или модуля числа ставятъ это число между двумя вертикальными чертами. Такъ, $|a|$ означаетъ абсолютное значеніе или модуль алгебраическаго числа a . Такимъ же образомъ:

$$|5| = 5; |-3| = 3.$$

Иногда ставятъ число въ квадратныя скобки; такъ $|a|$ означаетъ модуль числа a .

10. Выгоды, происходящія отъ введенія отрицательныхъ количествъ.— Введеніе отрицательныхъ количествъ въ алгебру имѣетъ чрезвычайно большое значеніе, такъ какъ оно даетъ математическимъ выводамъ ту общность, которая для отрицательныхъ величинъ была бы недостижима. Пояснимъ это при мѣрахъ.

Примѣръ I. Купленъ товаръ за a руб., а проданъ за b руб. Какое количество произошло отъ этого оборота въ капиталѣ?

Для опредѣленія измѣненія капитала вычтемъ изъ b руб. a руб., найдемъ

$$b - a.$$

Здѣсь могутъ быть три случая.

1) Если $b > a$, то разность $b - a$ будетъ положительная и выразитъ собой прибыль, полученную при продажѣ товара, потому что цѣна (b), за которую проданъ товаръ, больше цѣны (a), за которую онъ купленъ.

2) Если $b = a$, то разность $b - a$ равна 0 и означаетъ, что при продажѣ не получено ни прибыли, ни убытка, что очевидно.

3) Если $b < a$, то разность $b - a$ будетъ отрицательная и выразитъ

убыток, полученный при продажѣ товара, потому что цѣна (b), которую купецъ беретъ, продавая товаръ, меньше цѣны (a), которую онъ самъ заплатилъ за товаръ.

Итакъ, всѣ частные случаи, которые могутъ встрѣтиться при рѣшеніи данной задачи, можно соединить въ одной формулѣ: $b - a$, которая и выражаетъ собою измѣненіе капитала во всѣхъ случаяхъ, при чемъ положительный результатъ означаетъ прибыль, а отрицательный — убытокъ. Правда, мы могли бы избѣжать получения отрицательныхъ выводовъ, еслибы при $b < a$ стали дѣлать вычитаніе по формулѣ $a - b$; но такое дробленіе задачи и формулы на нѣсколько отдѣльныхъ задачъ и формулъ соответствовало бы частнымъ случаямъ, а не самымъ вопросамъ, такъ и ихъ рѣшеніямъ.

Примеръ II. *Изъ какого событія случается, что въ 1-й день послѣ Р. Х., а другое событіе и тогда раньше? Или, когда мы имеемъ второе событіе?*

Время второго событія найдемъ, вычитая изъ 600 л. то, что вычитаетъ формула

$$t - n.$$

Здѣсь опять возможны три случая:

1) Если $t = n$, то разность $t - n$ положительная, значитъ, если первое событіе имѣло мѣсто въ 600 лѣтъ послѣ Р. Х., а второе 400 годами раньше, то подставляя въ формулу $t - n$ вмѣсто t число 600 и 400 вмѣсто n , найдемъ

$$t - n = 600 - 400 = + 200.$$

Очевидно, этотъ положительный результатъ означаетъ, что второе событіе имѣло мѣсто черезъ 200 лѣтъ послѣ Р. Х.

2) Если $t = n$, то разность $t - n = 0$. Нулевое рѣшеніе, очевидно, означаетъ, что второе событіе совершилось въ самое Р. Х.

3) Если, наконецъ, $t < n$, то разность $t - n$ будетъ отрицательная. Если положимъ, что первое событіе совершилось спустя 600 лѣтъ послѣ Р. Х., а второе въ 800 лѣтъ до первого, то подставляя въ формулу $t - n$ эти числа, найдемъ

$$t - n = 600 - 800 = - 200 \text{ л.}$$

Ясно, что отрицательный результатъ означаетъ, что второе событіе совершилось за 200 л. до Р. Х.

Итакъ, замѣтимъ, что положительный результатъ означаетъ время послѣ Р. Х., а отрицательный — время до Р. Х., что въ формулѣ $t - n$ имѣемъ рѣшеніе всѣхъ частныхъ случаевъ данной задачи. И здѣсь мы могли бы избѣжать отрицательнаго вывода, если бы вторую задачу рѣшили по иной формулѣ: $n - t$; но такое дробленіе задачи и формулы не соответствовало бы духу общности, составляющей отличительный характеръ алгебры.

Итакъ, введеніе отрицательныхъ количествъ даетъ возможность какъ самые вопросы давать въ совершенно общей формѣ, такъ и рѣшенія всѣхъ частныхъ случаевъ выводить изъ одной общей формулы.

11. Свойства положительныхъ и отрицательныхъ количествъ. — Если имѣемъ нѣсколько примѣровъ вычитанія, въ которыхъ уменьшаемый равенъ, то остатки будутъ тѣмъ меньше, чѣмъ больше вычитаемая. Такъ, вычитая изъ 5 послѣдовательно 1, 2, 3, ..., получимъ остатки

$$\begin{aligned} 5 - 1 &= +4 \\ 5 - 2 &= +3 \\ 5 - 3 &= +2 \\ 5 - 4 &= +1 \\ 5 - 5 &= 0 \\ 5 - 6 &= -1 \\ 5 - 7 &= -2 \\ 5 - 8 &= -3 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Педagogический
Институт в Казани

величина которой становится все меньше и меньше. Сравнивая между собою остатки, найдем таким образом, что

$$-4 > -3 > -2 > -1 > 0 > +1 > +2 > +3 \text{ и т. д.}$$

Отсюда слѣдуетъ, что:

- 1) Любое положительное количество больше нуля;
- 2) Изъ двухъ положительныхъ чиселъ то больше, у котораго модуль

большее.

- 3) Любое отрицательное количество меньше нуля;

4) 0 составляетъ границу, отдѣляющую положительные количества отъ отрицательныхъ;

5) Изъ двухъ отрицательныхъ количествъ то больше, котораго абсолютное значеніе меньше.

Въ поясненіе выводовъ — третьяго и пятаго приведемъ слѣдующіе примѣры. Пусть изъ двухъ лицъ, А и В, первое ничего не имѣетъ (ни имущества ни долга), а второе, не имѣя никакого имущества, имѣетъ долгъ въ 50 руб. Долгъ и имущество величины противоположныя, при чемъ, согласно съ вышеприведеннымъ условіемъ, долгъ есть величина отрицательная, а имущество — положительная. Такимъ образомъ, состояніе А равно 0, состояніе В равно — 50 р. Лицо, имѣющее только долгъ, имѣетъ менѣе лица, ничего не имѣющаго, поэтому мы въ правѣ сказать, что отрицательное имущество В (— 50 р.) меньше нулевого имущества А: *отрицательное количество меньше нуля*. Положимъ теперь, что А и В не имѣютъ никакого имущества, но А имѣетъ долгу 30 р., а В — 80 р.; состояніе первого выразится отрицательнымъ числомъ — 30 р., второго — отриц. числомъ — 80 р. Очевидно, что лицо, имѣющее долгу 30 р., богаче лица, долгу котораго равенъ 80 р., слѣд. — 30 р. > — 80 р.: *изъ двухъ отрицательныхъ количествъ то больше, котораго численное значеніе меньше*.

ГЛАВА III.

Цѣль алгебраическихъ дѣйствій. — Законъ Ганкеля — свойства суммы и разности. — Свойства полинома. — Сложеніе и вычитаніе.

12. — Цѣль арифметическихъ дѣйствій состоитъ въ нахожденіи окончательнаго результата. Иное дѣло въ алгебрѣ. Количество, выраженныя буквами, не слѣдуетъ сливаться, поэтому какое алгебраическое дѣйствіе не можетъ быть доведено до конца. Такимъ образомъ, алгебраическія дѣйствія имѣютъ цѣль: указать какими производимыя дѣйствія и преобразовать полученный результатъ, съ тѣмъ, чтобы сдѣлать выраженіе его болѣе короткимъ

или более яснымъ Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что далѣе идти нельзя. При этомъ, такъ какъ алгебраическое количество состоитъ изъ двухъ элементовъ — абсолютной величины и знака, то и правило каждого алгебраическаго дѣйствія должно состоять изъ двухъ частей: правила абсолютныхъ величинъ и правила знаковъ.

13. Приступая къ какому-либо дѣйствию, надо прежде всего опредѣлить смыслъ его. При этомъ, уже въ арифметикѣ мы видѣли, что обобщеніе понятія о числѣ идетъ къ *обобщенію опредѣлений самихъ дѣйствій*. въ тѣхъ видахъ, чтобы избѣжать накопленія частныхъ случаевъ и въ эти случаи соединить въ одно общее выраженіе. Такъ, опредѣленіе дѣйствія умноженія расширяется при переходѣ отъ цѣлыхъ чиселъ къ дробнымъ. При этомъ въ дѣйствіи обобщеніяхъ могутъ иногда утратиться тѣ изъ правилъ, которые были приняты. Такъ, мы увидимъ далѣе, что извлеченіе корня, — дѣйствіе въ алгебраическомъ смыслѣ дающее одинъ результатъ, въ алгебраическомъ же смыслѣ можетъ дать нѣсколько различныхъ результатовъ; въ такомъ случаѣ дѣйствіе теряетъ свойство давать *одинъ результатъ*.

Но если, въ видахъ обобщенія, и *мыслимъ* *отбрасывать* тѣ или другія свойства операции, необходимо установить не *отбрасывая* никакихъ новыхъ свойствъ къ тѣмъ, которые были *нѣтъ* для *нѣтъ* и надъ количествами менѣе общими, и это въ тѣхъ видахъ, чтобы *нѣтъ* правило, установленное для обобщеннаго дѣйствія, было приложимо и къ менѣе общему случаю, содержа въ себѣ, какъ частный случай, правило, найденное ранее для дѣйствія, рассматриваемаго въ болѣе узкомъ смыслѣ, совершенно такъ же, какъ менѣе общій видъ количествъ содержитъ какъ частный случай въ количествахъ обобщенныхъ.

Это начало, которое слѣдуетъ соблюдать при обобщеніи опредѣлений количествъ и дѣйствій надъ ними, называю Ганкелемъ *началомъ постоянства правилъ вычисленія*. Въ силу этого начала всякое правило, относящееся къ количествамъ обобщеннымъ, должно прилагаться и къ количествамъ низшаго порядка, такъ какъ обобщеніе не вводитъ новыхъ свойствъ, а стало быть и не дѣлаетъ мѣста такимъ правиламъ, которыя не вытекаютъ бы уже изъ свойствъ ранее принятыхъ.

14. — Установленіе правилъ вычисленія зависитъ единственно отъ свойствъ дѣйствій; отсюда необходимость предварительнаго изученія этихъ свойствъ. Основными прежде всего съ фундаментальными свойствами суммы и разности.

При выводѣ этихъ свойствъ мы будемъ означать противоположныя величины — каждую одну буквою, такимъ образомъ подъ буквами: a, b, c, d, \dots будемъ представлять противоположныя величины, т.-е. абсолютныя значенія съ сопро-
вождающими ихъ знаками.

Свойства суммы.

15. Понятіе о *сложеніи* есть основное, а потому и не поддается никакимъ опредѣленіямъ.

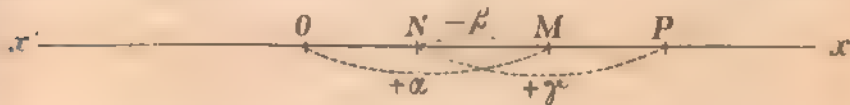
Мы видѣли, что каковы бы ни были противоположныя величины (скорости, времена, температуры), ихъ всегда можно представить прямыми линіями, нанесенными на неограниченной прямой въ томъ и и другомъ направленіи. Поэтому, если мы желаемъ сложить вѣроятное значеніе, то должны помѣстить ихъ одну за другой, каждую въ направленіи, опредѣляемомъ ея знакомъ, т.-е. начало второй помѣстить въ концѣ первой, начало ея въ направленіи, указываемомъ ея знакомъ, и т. д. Суммою будетъ разстояніе отъ начала первой до конца послѣдней. Это геометрическое предъавленіе сложения подлито такъ, составляющее средство при доказательствахъ вѣроятныхъ изъ нижеслѣдующихъ теоремъ.

ТЕОРЕМА. I. — Придать къ данному количеству последовательно столько других — все равно, что придать им сумму; т.-е.

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Этой теоремою выражается такъ называемый законъ сочетательный въ сложении.

Доказательство. — Пусть, напр., $a = +\alpha$, $b = -\beta$, $c = +\gamma$, гдѣ α , β и γ суть абсолютныя величины. На линіи $x'x$ отъ точки O вправо нанесемъ отрезокъ a : придемъ въ нѣкоторую точку M . Затѣмъ нанесемъ $-\beta$, сообразно съ знакомъ этого количества, влѣво отъ точки M : придемъ въ точку N . Наконецъ,



Черт. 5.

отъ точки N вправо нанесемъ отрезокъ γ : приходимъ въ точку P . Сумма $a + b + c$ выразится линіею OP отъ начала перваго слагаемаго до конца третьяго.

Но $b + c$ составляетъ въ то же время сумму MP , ибо M есть начало слагаемаго b , а P — конецъ слагаемаго c ; сл. представляя линію OP суммою $OM + MP$, замѣчая, что $OM = a$, а $MP = b + c$, имѣемъ:

$$OP = a + (b + c) \dots (1).$$

А раньше мы нашли, что

$$OP = a + b + c \dots (2).$$

Изъ (1) и (2) заключаемъ, что

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Такъ какъ оба эти выраженія представляютъ одну и ту же линію OP .

ТЕОРЕМА II. — Сумма не измѣнится отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.

Этой теоремою выражается законъ перемѣстительный въ сложении.

Доказательство. — I. Докажемъ эту теорему сначала для двухъ слагаемыхъ, т.-е. что

$$a + b = b + a.$$

Доказательство это, въ свою очередь, распадается на нѣсколько случаевъ, смотря по знакамъ количествъ a и b .



Черт. 6.

Пусть a и b — положительныя количества. Нанесемъ a по линіи Ox , отъ точки O : придемъ въ точку M . Затѣмъ, отъ точки M въ томъ же

направленія наносимъ b , и такимъ образомъ приходимъ въ точку Р. Сумма равна линіи OP отъ начала перваго слагаемаго до конца втораго:

$$a + b = OP \dots (1).$$

Если теперь на линіи OP отложимъ часть $OQ = b$, то осталая ея часть QP будетъ равна a ; слѣдов. линію OP можно разсматривать также какъ сумму линій b и a :

$$b + a = OP \dots (2).$$

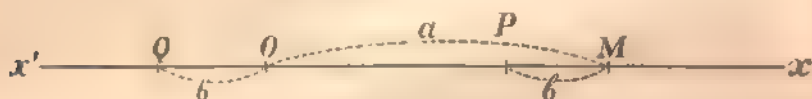
Изъ (1) и (2) слѣдуетъ, что

$$a + b = b - a.$$

2) Составимъ сумму $a - b$, полагая, что a положительно и равно $+a$, а b отрицательно и равно $-b$; положимъ сверхъ того, что $a > b$.

Нанесемъ a на линію Ox : придемъ въ точку М; отъ точки М наносимъ линію b , сообразно съ ея знакомъ, влѣво: придемъ въ точку Р. Сумма $a - b$ выразится линіей OP отъ начала перваго до конца втораго слагаемаго:

$$a - b = OP \dots (3).$$



Черт. 7.

Нанесемъ теперь b , сообразно съ знакомъ этой линіи, влѣво отъ О; придемъ въ точку Q; очевидно, что линія $QP = OM$ (ибо каждая состоитъ изъ b , сложеннаго съ OP); а потому, нанеся a отъ точки Q вправо, придемъ въ точку Р, и сумма $b - a$ выразится линіей OP отъ начала слагаемаго b до конца a .

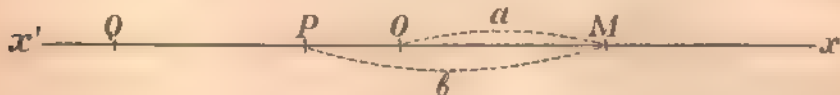
$$b - a = OP \dots (4).$$

Изъ равенствъ (3) и (4) находимъ опять, что

$$a - b = b - a,$$

ибо та и другая сумма выражаетъ одну и ту же линію OP .

Пусть $a < b$. Нанеся a на линію Ox вправо отъ начала, придемъ въ точ-



Черт. 8.

ку М; отъ точки М наносимъ b въ направленіи Ox' ; такъ какъ $b > a$, то придемъ въ вѣдую точку Р, лежащую влѣво отъ О. Сумма $a - b$ выразится линіей OP , отъ начала перваго до конца втораго слагаемаго:

$$a - b = OP \dots (5).$$

Отложимъ отъ точки О влѣво линію $OQ = MP = b$; очевидно, что QP

— Если OM или a . Слѣд., линія OP будетъ выражать сумму линій:
 — $OP = a + b$, т.е.

$$b + a = OP. \dots (6).$$

Изъ равенствъ (5) и (6) заключаемъ:

$$a + b = b + a.$$

Если бы количества a и b были оба отрицательны, то доказательство было бы то же самое, что и въ случаѣ 1-мъ, только объ линіи пришлось бы сказать влѣво отъ начала.

Такимъ образомъ теорема доказана для двухъ слагаемыхъ.

Скажемъ теперь, что если имѣемъ сумму трехъ слагаемыхъ, то можно перемѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы I имѣемъ:

$$a + b + c = a + (b + c);$$

въ скобкахъ порядокъ слагаемыхъ, отъ чего, по теоремѣ II для двухъ слагаемыхъ, сумма ихъ не измѣнится, находимъ

$$a + b + c = a + (c + b);$$

замѣняя, на основаніи теоремы I, выраженіе $a + (c + b)$ равнымъ ему $a + c + b$, получаемъ

$$a + b + c = a + c + b.$$

III Въ суммѣ, состоящей изъ сколькихъ угодно слагаемыхъ, можно измѣнить мѣста двухъ послѣднихъ. Въ самомъ дѣлѣ, такую сумму можно разсматривать какъ состоящую изъ трехъ слагаемыхъ.

IV Во всякой суммѣ можно перемѣнить мѣста двухъ послѣдовательныхъ слагаемыхъ, гдѣ бы они ни находились.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи пункта III имѣемъ

$$a + b + c + d = a + b + d + c;$$

примѣняя къ равнымъ величинамъ поровну (по 4), получимъ равныя, слѣд.

$$a + b + c + d + e = a + b + d + c + e;$$

и такимъ же образомъ

$$a + b + c + d + e + f = a + b + d + c + e + f, \text{ и т. д.}$$

I Можно измѣнить какъ угодно мѣста слагаемыхъ въ суммѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, перемѣняя два послѣдовательныхъ члена одинъ на мѣсто другого, можно всякое слагаемое помѣстить на какомъ угодно мѣстѣ.

Теорема III. Нѣсколько слагаемыхъ можно замѣнить ихъ суммой (или ея), и наоборотъ—одно слагаемое можно замѣнить нѣсколькими слагаемыми, сумма которыхъ оно представляетъ.

Доказательство.—I. Помѣстимъ въ началѣ всѣ слагаемыя, которыя мы хотимъ суммировать; вычислимъ ихъ сумму, сообразно съ ихъ знаками; наконецъ, этотъ результатъ помѣстимъ тамъ, гдѣ хотимъ. Эти преобразованія, законченныя выше доказана, доказываютъ первую часть теоремы.

II. Помѣстимъ на первомъ мѣстѣ слагаемое, которое желаемъ разложить; разложимъ его на части, сумму которыхъ оно составляетъ; наконецъ, размѣ-

стимъ какъ угодно эти части въ данной суммѣ. Всѣ эти преобразования, которыя по вышедоказанному всегда можно сдѣлать, служатъ доказательствомъ второй части теоремы.

Свойства разности.

16. Определеіе вычитанія. — Вычитаніе есть оіѣйствиіе обратное сложенію. Вычесть изъ первой величины вторую значитъ найти такую третью величину, которая будучи сложена со второю, давала бы первую. Итакъ, вычитаніе служитъ для рѣшенія слѣдующей задачи: «по данной суммѣ a двухъ количествъ и одному изъ нихъ b найти другое».

Дѣйствиіе вычитанія и результатъ его, называемый *остаткомъ*, или *разностью*, обозначается слѣдующимъ образомъ:

$$a - b.$$

Назвавъ остатокъ буквою z , мы опредѣлили вычитанія имѣемъ

$$a - b = z.$$

Теорема I. — Вычитаніе какой угодно величины всегда можно замѣнить приложеніемъ величины ей противоположной (т.-е. противоположнаго знака).

Доказательство. Замѣтимъ сначала, что сумма двухъ количествъ a и a^* (одинаковой абсолютной величины, но противоположныхъ знаковъ, равна нулю, т.-е.

$$a + a^* = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, наприм., a есть количество положительное и выражается отрезкомъ OM ; придать a значитъ отъ точки M влѣво отложить линію MO ; придемъ въ точку O . Такимъ образомъ сумма, т.-е. разстояніе отъ начала пераго до конца второго слагаемаго, равна 0 (см. черт. 3.)

Состояніе лица, имѣющаго 5 р. капитала и 5 р. долга, очевидно, равно нулю, сл. $+5 \text{ р.} + (-5 \text{ р.}) = 0$; и т. п.

Пусть теперь изъ a нужно вычесть b . По опредѣленію вычитанія, это значитъ: найти такое третье количество, которое, будучи сложено съ b , давало бы a . Такимъ свойствомъ обладаетъ количество $a - b$; въ самомъ дѣлѣ:

$$a - b + b = a + \{b - b\}$$

по теоремѣ I свойствъ суммы. Но, въ силу только что сдѣланнаго замѣчанія, количество въ скобкахъ равно нулю; слѣд.

$$a - b = a + b.$$

что и требовалось доказать.

Теорема II — Чтобы вычесть сумму, нужно вычесть последовательно ея члены.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, пусть нужно вычислить выраженіе

$$A - (a + b + c + d);$$

*) Въ этой теоремѣ и въ теоремѣ IV мы употребляемъ буквы, но противоположныя количества одинаковыми знаками (дѣлать начертаній).

имъ разность буквою δ , т. е. по опредѣленію вычитанія, имѣемъ равенство

$$N - \delta = (a - b + c + d),$$

или, по теоремѣ I свойствъ суммы,

$$N = \delta + a - b + c + d,$$

а переимѣнивъ мѣста слагаемыхъ:

$$N = a - \delta + d + c + b,$$

или, по той же теоремѣ:

$$N = a + (\delta + d + c + b).$$

Здесь N есть сумма, $\delta + d + c + b$ — одно слагаемое, a — другое; по опредѣленію вычитанія (по данной суммѣ N и одному слагаемому, a , другое опредѣляется вычитаніемъ) имѣемъ:

$$N - a = \delta + d + c + b.$$

Такимъ же точно разсужденіемъ изъ послѣдняго равенства находимъ послѣдовательно:

$$N - a - b = c + (\delta + d);$$

$$N - a - b - c = \delta + d;$$

$$N - a - b - c - d = \delta.$$

Подставивъ вмѣсто δ равную ему величину, находимъ

$$N - (a + b + c + d) = N - a - b - c - d,$$

что и требовалось доказать.

Принципъ, выражаемый этою теоремою, служить, между прочимъ, основаніемъ теоріи вычитанія цѣлыхъ чиселъ: изъ уменьшаемаго послѣдовательно отнимаютъ всѣ части вычитаемого, разсматривая его какъ сумму единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д.

Теорема III. — Чтобы придать разность, нужно придать уменьшаемое и изъ результата отнять вычитаемое.

Доказательство. — Пусть будетъ дана разность

$$a - b = \delta;$$

по опредѣленію вычитанія, имѣемъ

$$a = \delta + b.$$

Придавая равныя къ равнымъ, получимъ равныя величины (приданіе $\delta + b$ означаемъ скобками); сн.

$$N + a = N + (\delta + b);$$

отсюда, по теор. I св. сум., имѣемъ:

$$N + a = N + \delta + b,$$

а по опредѣленію вычитанія:

$$N + a - b = N + \delta,$$

или, замѣнивъ δ его величиною, получаемъ

$$N + a - b = N + (a - b),$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА IV. — Чтобы вычесть разность, нужно вычесть уменьшаемое и къ результату прибавить вычитаемое.

Доказательство. — Изъ равенства

$$a - b = \delta,$$

имѣемъ

$$a = \delta + b.$$

Придавая къ обѣимъ частямъ по b , имѣемъ:

$$a + b = \delta + b + b = \delta;$$

вычитая равныя изъ равныхъ, получимъ:

$$N - (a + b) = N - \delta;$$

отсюда, по теор. II св. разн., имѣемъ

$$N - a - b = N - \delta$$

но вычесть b — то же самое, что прибавить b ; слѣд.

$$N - a + b = N - \delta = N - (a - b),$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Придавая или вычитая разность, всегда можемъ измѣнить порядокъ двухъ производимыхъ дѣйствій.

Доказательство. — Чтобы доказать теорему для случая придаванія разности, напишемъ равенство

$$N + a - b = a + N - b,$$

справедливое потому, что въ суммѣ $N + a$ можно перемѣнить порядокъ слагаемыхъ.

Вторую часть равенства, на основаніи теоремы III св. разн., можно представить въ видѣ: $a + (N - b)$; слѣд.

$$N + a - b = a + (N - b);$$

перемѣнивъ снова мѣста слагаемыхъ во второй части, получимъ

$$N + a - b = (N - b) + a;$$

опустивъ скобки, такъ какъ и безъ нихъ смыслъ дѣйствій ясенъ, имѣемъ

$$N + a - b = N - b + a.$$

Для случая вычитанія разности, на основаніи случая придаванія прямо имѣемъ:

$$N - a + b = N - b + a.$$

ТЕОРЕМА V. — Разность не измѣнится, если къ уменьшаемому и вычитаемому прибавить или изъ нихъ вычесть одно и то же количество.

Доказательство. — Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства

$$a = b = z,$$

— предѣленію вычитанія, имѣемъ

$$a = z = b.$$

Придавая къ равнымъ поровну, получимъ количества равныя, слѣд.

$$a + m = z = b + m,$$

или по теоремѣ I св. суммы:

$$a + m = z = (b + m).$$

Отсюда по предѣленію вычитанія,

$$(a + m) - (b + m) = z.$$

или, замѣнивъ z его величиною, имѣемъ

$$(a + m) - (b + m) = a - b.$$

Совершенно аналогичнымъ приемомъ докажемъ, что

$$(a - m) - (b - m) = a - b.$$

Слѣдствіе. — *Всякая разность равна обращенной разности, взятой со знакомъ минусъ.*

Доказательство. — Имѣя разность $a - b$, мы не измѣнимъ ее, вычтя изъ обоихъ членовъ ея по a ; поэтому

$$a - b = (a - a) - (b - a);$$

или

$$a - b = 0 - (b - a);$$

опустивъ ноль, получимъ окончательно

$$a - b = -(b - a).$$

Теорема VI. — *Количество не измѣнится, если къ нему прибавить и затѣмъ вычесть одну и ту же величину.*

Доказательство. — Въ самомъ дѣлѣ, по теоремѣ III о прибавленіи разности имѣемъ:

$$P + a - a = P + (a - a) = P + 0 = P.$$

Свойства полинома.

17. Выраженіе вида

$$a + b + c + d + e$$

состоящее рядъ сложений и вычитаній, называется *полиномомъ* или *многочленомъ*. Члены, предшествоваемые знакомъ $+$, называются *положительными*, а предшествоваемые знакомъ $-$, *отрицательными*. Если передъ первымъ членомъ не стоитъ никакого знака, надо подразумѣвать $+$. Члены полинома суть слагаемые, которыя сами по себѣ могутъ быть или положительныя, или отри-

пательный. Отдельный членъ, называемый *одночленомъ* или *мономомъ*, всегда можно разсматривать какъ двучленъ или биномъ; въ самомъ дѣлѣ:

$$a = a + 0 = 0 + a = a - 0.$$

18. Теорема. *Во всякомъ полиномѣ можно какъ угодно измѣнять порядокъ членовъ, сохраняя между ними ихъ знаки, величина полинома отъ этого не измѣнится.*

Доказательство. — I. Сначала докажемъ, что можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ членовъ; т.-е., назвавъ ~~сумму~~ предшествующихъ членовъ буквою P, докажемъ справедливость равенствъ

$$\begin{aligned} P + a + b &= P + b + a, \\ P + a + b + 1 &= P + b + a + 1, \\ P + a - b &= P - b + a \end{aligned}$$

Въ самомъ дѣлѣ, по теоремѣ II ~~измѣненіе~~ величина суммы не измѣнится отъ перемѣны мѣстъ ~~слагаемыхъ~~, если 1-е равенство доказано.

Для доказательства ~~второго равенства~~ замѣнимъ, что на основаніи теоремы II свойство разности имѣемъ

$$P + a - b = P - (b - a),$$

измѣнивъ въ суммѣ $a - b$ мѣста слагаемыхъ, получимъ

$$P + a - b = P - (b - a);$$

отсюда, основываясь опять на теор. II св. разн., вторую часть замѣнимъ формулою $P - b + a$, послѣ чего окончательно находимъ

$$P + a - b = P - b + a.$$

Наконецъ, на основаніи слѣдствія теоремы IV св. разн., прямо имѣемъ

$$P + a + b = P + b + a,$$

и третье равенство доказано.

II. Докажемъ теперь, что можно имѣнить порядокъ двухъ послѣдовательныхъ (рядомъ стоящихъ) членовъ полинома.

Въ самомъ дѣлѣ, любые два рядомъ стоящіе члена суть послѣдніе члены полинома, составленнаго изъ нихъ и изъ предшествующихъ членовъ; а по I пункту нашей теоремы такіе два члена могутъ быть переставлены одинъ на мѣсто другого.

III. Можно измѣнить какъ угодно порядокъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, переставляя два послѣдовательные члена одинъ на мѣсто другого, можно какой угодно членъ полинома перевести постепенно на какое угодно мѣсто.

19. Приведеніе подобныхъ членовъ полинома. — Два члена, состоящіе изъ одинаковыхъ буквъ и надъ одинаковыми буквами имѣющіе одинаковыхъ показателей, а коэффициенты и знаки которыхъ могутъ быть какъ угодно, называются *подобными*. Иначе, *подобными одночленами* называются такіе, у которыхъ буквенная часть одинакова. Такъ, $3a^2b^3c$ и $-7a^2b^3c$ — подобны; также $4(x-y)^2z^3$ и $-\frac{1}{2}(x-y)^2z^3$ — подобны между собою.

Когда многочленъ содержитъ подобные члены, его можно упростить, соеди-

и подобные члены въ одинъ. Соединеніе подобныхъ членовъ въ одинъ называется *приведеніемъ*.

При выводѣ правилъ приведенія нужно рассмотреть слѣдующіе случаи.

1) *Знаки подобныхъ членовъ одинаковы*. Пусть данъ двучленъ, состоящій изъ положительныхъ членовъ, напр., $3a^2b - 5a^2b$. Знакъ $-$, обозначаваемый передъ членомъ $5a^2b$, показываетъ, что слѣдуетъ *присчитать* $5a^2b$; $+$ передъ первымъ членомъ означаетъ, что *присчитается* $3a^2b$; а затѣмъ $5a^2b - 3a^2b$ — все равно что сразу присчитать $2a^2b$, слѣдовательно

$$3a^2b - 5a^2b = -2a^2b.$$

Возьмемъ двучленъ $-4ab^3 - 5ab^3$. Знакъ $-$ передъ первымъ членомъ показываетъ, что нужно отнять $4ab^3$; тотъ же знакъ передъ вторымъ членомъ означаетъ, что нужно отнять $5ab^3$; но отнять $4ab^3$ и затѣмъ $5ab^3$ — все равно что сразу отнять $9ab^3$; такъ

$$-4ab^3 - 5ab^3 = -9ab^3.$$

Итакъ правило: *если знаки подобныхъ членовъ одинаковы, то для приведенія членовъ въ одинъ нужно буквенное выраженіе оставить безъ перемѣны, коэффициенты сложить, а знакъ поставить общий*.

2) *Знаки подобныхъ членовъ различны*. Возьмемъ выраженіе, состоящее изъ двухъ подобныхъ членовъ съ разными знаками, напр., $5a^2b^3 - 3a^2b^3$. Знакъ $-$, подразумеваемый передъ первымъ членомъ, означаетъ, что нужно отнять $3a^2b^3$; $(-)$ передъ вторымъ членомъ показываетъ, что нужно вычесть $3a^2b^3$. Присчитать 5 разъ a^2b^3 , а затѣмъ вычесть 3 разъ a^2b^3 — все равно что присчитать 2 разъ a^2b^3 ; слѣд.

$$5a^2b^3 - 3a^2b^3 = +2a^2b^3.$$

Въ выраженіи $5a^2b^3 - 2a^2b^3$ знакъ $(-)$ передъ первымъ членомъ показываетъ, что нужно 5 разъ вычесть a^2b^3 ; $(-)$ передъ вторымъ членомъ показываетъ, что нужно присчитать 2 разъ a^2b^3 ; но это — все равно что отнять 3 разъ a^2b^3 . Слѣд.

$$-5a^2b^3 + 2a^2b^3 = -3a^2b^3.$$

Итакъ правило: *когда знаки подобныхъ членовъ разные, то для соединенія членовъ въ одинъ нужно — буквенное выраженіе оставить безъ измѣненія, изъ большаго коэффициента вычесть меньшій и передъ разностью поставить знакъ большаго коэффициента*.

Можетъ случиться, что подобные члены имѣютъ одинаковые коэффициенты, но разные знаки, напр., $+2a - 2a$; очевидно, что такіе члены взаимно уничтожаются, т. е. даютъ въ результатъ ноль. Слѣд.

$$+2a - 2a = 0.$$

При помощи этихъ правилъ можно дѣлать приведеніе подобныхъ членовъ въ одно, сколько бы ихъ ни было. Въ самомъ дѣлѣ, применяя первое правило, соединимъ въ одинъ членъ всѣ подобные члены, имѣющіе одинаковые знаки; затѣмъ этого придется сдѣлать приведеніе членовъ съ разными знаками, применяя второе правило. Пусть, напр., данъ полиномъ

$$7a^5 - 5a^4b^2 - 5a^4b^2 - 3a^4b^2 - 8a^4b^2 - 13a^4b^2 - a^4b^2 - b^6.$$

Членъ $7a^6$, не имѣющій себѣ подобнаго, остается неприводимымъ. Члены: $-5a^4b^2$ и $+5a^4b^2$, какъ подобные члены съ разными знаками и равными коэффициентами, взаимно уничтожаются. Затѣмъ: $-3a^4b^2$ и $-13a^4b^2$ даютъ, по первому правилу, $-16a^4b^2$; члены: $+8a^4b^2$ и $-a^6b^2$, по тому же правилу, даютъ $+9a^4b^2$. Члены: $-16a^4b^2$ и $+9a^4b^2$, по второму правилу, даютъ $-7a^4b^2$. Наконецъ $-b^6$, какъ не имѣющій себѣ подобнаго, остается не приводимымъ. Такимъ образомъ данный полиномъ приводится къ слѣдующему сокращенному виду:

$$7a^6 - 7a^4b^2 - b^6.$$

20. Расположеніе многочлена по степенямъ главной буквы — Когда показатели нѣкоторой буквы въ последовательныхъ членахъ идутъ постоянно уменьшаясь или увеличиваясь, то говорятъ, что полиномъ расположенъ по степенямъ этой буквы, которая въ такомъ случаѣ называется главной.

Такъ, полиномъ

$$3 - 5x - 6x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4$$

расположенъ по возрастающимъ степенямъ буквы x .

Многочленъ

$$3x^4 - \frac{5a}{b^2}x^3 - \frac{6a^2}{b}x^2 + \frac{3a^3}{5}x - 1$$

расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы x .

Многочленъ

$$9ax^2y - 12x^4y^4 + 7a^2x^2y^3$$

расположенъ одновременно по убывающимъ степенямъ буквы x и по возрастающимъ буквы y .

Многочленъ называется полнымъ, если показатели главной буквы идутъ увеличиваясь или уменьшаясь постоянно на единицу и если имѣется членъ, не содержащій главной буквы. Таковъ, наприм., многочленъ

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e;$$

это есть полный многочленъ относительно буквы x .

Если же нѣкоторыхъ степеней главной буквы недостаетъ, многочленъ называется неполнымъ. Наприм.,

$$x^4 - 3x^2 + 2x + 1$$

есть неполный многочленъ четвертой степени относительно буквы x : въ немъ недостаетъ члена, содержащаго x^3 .

Сложеніе.

21. Сложеніе полиномовъ. Теорема. — Чтобы придать полиномъ къ какому-нибудь количеству, надо всѣ члены полинома приписать къ этому количеству — каждый съ тѣмъ знакомъ, какой передъ нимъ находится.

Первое доказательство — Оно основано на правилѣ приданія суммы или разности. Пусть требуется къ P придать полиномъ $a - b + c - d$; дѣйствіе обозначаемъ, заключивъ многочленъ въ скобки:

$$P + (a - b + c - d).$$

Разсматривая d как количество вычитаемое из $a - b + c$, обозначаетъ то дѣйствіе, заключивъ $a - b + c$ въ нѣбныя скобки; такимъ образомъ получимъ:

$$P + (a - b - c - d) = P - [(a - b + c) - d].$$

Разсматривая $a - b + c$ какъ одинъ членъ разности, а d какъ другой, и вспоминая, что по теор. III св. разн. для приданія разности надо придать первому члену и отнять второй, найдемъ:

$$P + (a - b + c - d) = P - (a - b + c) - d.$$

Разсматривая $a - b$ какъ одинъ членъ суммы, а c какъ другой, что обозначаемъ соответствующими скобками, имѣемъ:

$$P + (a - b - c - d) = P - [(a - b) + c] - d.$$

На основаніи теоремы III св. суммы можно членъ $[(a - b) + c]$ замѣнять суммой составляющихъ его членовъ; такъ, обр.

$$P - (a - b - c - d) = P - (a - b) - c - d.$$

Наконецъ, по теоремѣ о приданіи разности получимъ окончательно

$$P + (a - b + c - d) = P + a - b + c - d.$$

Второе доказательство. — Оно проще перваго. Разсматривая приданный полиномъ какъ одинъ членъ, мы, переимѣняя мѣста слагаемыхъ, можемъ написать:

$$P - (a - b - c - d) = (a - b - c - d) - P.$$

Вторая часть равенства означать, что изъ a надо вычесть b , затѣмъ при-
данный c , вычесть d и, наконецъ, придать P ; но тотъ же смыслъ будетъ имѣть
выраженіе, если въ немъ опустить скобки; сл. имѣемъ право написать

$$P - (a - b - c - d) = a - b - c - d - P.$$

Переставивъ затѣмъ послѣдній членъ второй части на первое мѣсто, получимъ окончательно

$$P - (a - b - c - d) = P + a - b - c - d.$$

Итакъ, для сложения многочленовъ надо члены одного многочлена приписать другому, каждый съ тѣмъ знакомъ, какой переходъ нимъ находится, и, если нужно, сдѣлать приведеніе. На практикѣ, для удобства приведенія, пишутъ члены одного многочлена подъ другими, наблюдая, чтобы подобные члены находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. Такъ, пусть требуется сдѣлать сло-

$$5a^2x - 7ax^2 - a^3 \quad (8a^3 - x^3 - 4ax^2 - 3a^2x) \quad (4a^2x - 2x^3 + a^3).$$

полагая многочлены сказаннымъ образомъ, имѣемъ:

$$\begin{array}{l} \text{Слагаемыя} \left\{ \begin{array}{l} 4x^3 - 5a^2x + 7ax^3 - a^3 \\ - x^3 - 3a^2x + 4ax^3 + 8a^3 \\ - 2x^3 + 4a^2x \qquad \qquad \qquad + a^3 \end{array} \right. \\ \text{Сумма} \dots \qquad \qquad \qquad x^3 - 4a^2x + 11ax^3 + 8a^3 \end{array}$$

или, располагая члены по убывающим степенямъ буквы a :

$$8a^3 - 4a^2x + 11ax^2 + x^3.$$

22. Сложение мономовъ. — Правило этого дѣйствія можетъ быть выведено на основаніи правила сложения полиномовъ, такъ какъ всякій мономъ можно разсматривать какъ биномъ.

Пусть къ какому-нибудь количеству P , подъ которымъ будемъ подразумѣвать или полиномъ, или мономъ, требуется придать $+a$. Разсматривая $+a$ какъ биномъ $0 + a$, на основаніи правила сложения полиномовъ, получимъ

$$P + (+a) = P + (0 + a) = P + 0 + a;$$

опуская 0, имѣемъ:

$$P + (+a) = P + a. \dots (1).$$

Разсматривая $-a$ какъ биномъ $0 - a$, подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$P + (-a) = P + (0 - a) = P + 0 - a = P - a. \dots (2)$$

Итакъ, *придаваемый мономъ надо приписывать къ данному количеству съ его знакомъ.*

Такъ, наприм.

$$5a^3b^2x + (-11a^3b^2x) = 5a^3b^2x - 11a^3b^2x;$$

по приведеніи же найдемъ: $-6a^3b^2x$.

Такимъ же образомъ найдемъ:

1. $5 + 7 = 12$, ибо 5 положительныхъ единицъ да 7 такихъ же единицъ даютъ 12 положительныхъ единицъ или $+12$.

2. $-5 - 7 = -12$, ибо 5 отрицательныхъ да 7 отриц. единицъ даютъ всего 12 отрицательныхъ единицъ или -12 .

3. $8 - 5 = 3$, ибо 8 положительныхъ да 5 отриц. единицъ даютъ въ совокупности 3 положительныхъ единицы или $+3$.

Примѣчаніе. — Изъ послѣднихъ примѣровъ заключаемъ, что съ алгебраическимъ сложеньемъ не всегда соединяется понятіе объ увеличеніи: приданіе положительнаго числа означаетъ увеличеніе, приданіе отрицательнаго — уменьшеніе.

ТЕОРЕМА. — *Всякій полиномъ можно разсматривать какъ сумму членовъ, его составляющихъ.*

Такимъ образомъ:

$$a - b + c - d = (+a) + (-b) + (+c) + (-d).$$

Въ самомъ дѣлѣ, применяя правило сложения мономовъ ко второй части равенства, найдемъ выраженіе, стоящее въ первой его части; заключаемъ, что преобразование, указываемое этимъ равенствомъ, законно.

ВЫЧИТАНІЕ.

23 Вычитаніе многочленовъ. **ТЕОРЕМА.** — *Чтобы вычесть многочленъ изъ какого-нибудь количества, надо къ этому количеству приписать ось членовъ вычитаемого съ обратными знаками.*

Первое доказательство. Оно основано на правилахъ вычитанія

или разности Пусть требуется из P вычесть многочлен $a - b + c - d$; первые обозначаемъ, заключивъ вычитаемое въ скобки:

$$P - (a - b + c - d).$$

Разсматривая d какъ количество, вычитаемое изъ $a - b + c$, обозначаемъ действие этого вычитанія, заключивъ $a - b + c$ въ скобки. Такимъ образомъ

$$P - (a - b + c - d) = P - [(a - b + c) - d].$$

Разсматривая $a - b + c$ какъ одинъ членъ разности, а d —какъ другой, на основании теоремы IV св. разности, имеемъ:

$$P - [(a - b + c) - d] = P - (a - b + c) + d.$$

Выраженіе въ скобкахъ разсматриваемъ какъ сумму двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно $a - b$, а другое c ; обозначая это соответствующими скобками, имеемъ второй части послѣдняго равенства видъ

$$P - [(a - b) + c] + d.$$

Это выраженіе примененіемъ теоремы II св. разн. преобразовываемъ въ слѣдующее:

$$P - (a - b) - c + d.$$

Примѣняя сюда теорему IV свойствъ разности, находимъ

$$P - a + b - c + d.$$

Итакъ, указанныя преобразованія приводятъ къ равенству:

$$P - (a - b + c - d) = P - a + b - c + d,$$

что и требовалось доказать.

Второе доказательство.—Эту теорему можно доказать иначе, основываясь на опредѣленіи вычитанія и на правилѣ сложенья многочленовъ.

Вычесть изъ P многочленъ $a - b + c - d$, значитъ найти такой многочленъ, прибавивъ къ которому вычитаемое, найдемъ бы уменьшаемое P . Полиномъ, имѣющій такое свойство, есть

$$P - a + b - c + d;$$

къ нему, давая къ нему данное вычитаемое, для чего надо всѣ члены послѣдняго приписать съ ихъ знаками, находимъ

$$P - a + b - c + d - (a - b + c - d);$$

сдѣлавъ въ этомъ выраженіи приведеніе, находимъ въ результатѣ P . Стало совершенно очевидно $P - a + b - c + d$ есть остатокъ вычитанія многочлена $a - b + c - d$ изъ P , т.е.

$$P - (a - b + c - d) = P - a + b - c + d.$$

Итакъ, для вычитанія многочленовъ надо къ уменьшаемому приписать члены вычитаемого съ обратными знаками и, если можно, сдѣлать приведеніе.

Замѣтимъ, для удобства приведенія, писать члены вычитаемого подъ членами уменьшаемаго, т.е. чтобы подобные члены находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ.

Такъ, пусть требуется сдѣлать вычитаніе:

$$(5a^3b^2 - 7a^2b^3 + 8ab^4 - b^5) - (2a^3b^2 - 7a^2b^3 + 3ab^4 - 6b^5).$$

Располагая многочлены сказаннымъ образомъ и перемѣняя въ вычитаемомъ знаки на противоположные (измѣненные знаки поставлены на верху), имѣемъ:

$$\begin{array}{rcl} \text{Уменьшаемое} & . & . & . & . & 5a^3b^2 - 7a^2b^3 + 8ab^4 - b^5 \\ \text{Вычитаемое} & . & . & . & . & - 2a^3b^2 + 7a^2b^3 - 3ab^4 + 6b^5 \\ \text{Остатокъ} & . & . & . & . & 3a^3b^2 - 14a^2b^3 + 11ab^4 - 7b^5 \end{array}$$

24. Вычитаніе мономовъ.—Правило вычитанія одночленовъ можно вывести на основаніи правила вычитанія многочленовъ, такъ какъ всякій одночленъ можно разсматривать какъ двучленъ.

Пусть изъ какого-нибудь количества P , подѣ которымъ можно подразумѣвать или многочленъ, или одночленъ, требуется вычесть $+a$. Разсматривая $+a$ какъ биномъ $0 + a$, на основаніи правила вычитанія многочленовъ находимъ

$$P - (+a) = P - (0 + a) = P - 0 - a;$$

опустивъ 0, имѣемъ:

$$P - (+a) = P - a . . . (1).$$

Разсматривая $-a$ какъ биномъ $0 - a$, подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$P - (-a) = P - (0 - a) = P - 0 + a = P + a . . . (2).$$

Такимъ образомъ, *вычитаемый одночленъ надо приписывать къ уменьшаемому съ обратнымъ знакомъ*,

Напримѣръ

$$5a^3b^2c - (-2a^3b^2c) = 5a^3b^2c + 2a^3b^2c = 7a^3b^2c.$$

Такимъ же образомъ найдемъ:

$$\begin{array}{l} 1) \quad 3 - 5 = 3 - 5 = -2. \\ 2) \quad 3 - (-5) = 3 + 5 = +8. \end{array}$$

Замѣчая, что остатокъ перваго вычитанія (-2) меньше уменьшаемаго, между тѣмъ какъ остатокъ втораго ($+8$) больше уменьшаемаго, заключаемъ, что съ алгебраическимъ вычитаніемъ не всегда соединяется понятіе объ уменьшеніи: вычесть положительное число — значить уменьшить, вычесть отрицательное — значить увеличить.

Примѣчаніе.—Правило вычитанія одночленовъ можно бы было вывести непосредственно, основываясь на опредѣленіи этого дѣйствія; такой выводъ ничѣмъ не отличается отъ втораго доказательства правила вычитанія многочленовъ, потому мы его и опускаемъ.

Употребленіе скобокъ.

25. Если многочленъ или нѣсколько его членовъ заключены въ скобки, то можно ихъ опустить, написавъ многочленъ безъ скобокъ. Дѣйствіе это назыв. *раскрытіемъ скобокъ*, а правила сто непосредственно вытекаютъ изъ правилъ сложения и вычитанія многочленовъ. При этомъ слѣдуетъ разсмотрѣть два случая.

1. Если перед скобками стоит знак $+$, то можно опустить скобки вместе со знаком, который перед ними находится, перечислив члены, стоявшие в скобках, со их знаками. Такъ, выражено

$$a + (-b + c - d + e),$$

раскрыв скобки, дасть, по правилу сложения,

$$a = b - c + d - e.$$

2. Если многочлен или часть его заключены в скобки, передъ которыми стоит знак $-$, то можно опустить скобки вместе со знакомъ, который имъ предшествуетъ, переменить знаки у всехъ членовъ, стоящихъ въ скобкахъ. Такъ, если

$$a - b - (-c + f - h),$$

то съ правиломъ вычитанія, по раскрытіи скобокъ дасть:

$$a = b - c + f - h.$$

Если многочленъ содержитъ нѣсколько паръ скобокъ, то ихъ можно уничтожить постепенно, начиная или съ внутреннихъ, или съ наружныхъ, руководясь каждымъ разъ вышеприведенными правилами. Такъ, въ выраженіи $(b - (c - d))$, раскрывъ сперва наружныя скобки, найдемъ

$$a - b - (c - d),$$

и на время $c - d$ за одинъ членъ. Раскрывая оставшіяся скобки, найдемъ окончательно

$$a - b - c + d.$$

Наоборотъ, раскрывая сначала внутреннія скобки, т.е. вида (\quad) , въ вы-

$$a - \{ -b + [c - (d - e)] \},$$

получимъ

$$a - \{ -b + [c - d + e] \};$$

и, раскрывъ затѣмъ квадратныя скобки, найдемъ

$$a - \{ -b + c - d + e \};$$

и, наконецъ, фигурныя скобки, получимъ окончательно:

$$a + b - c + d - e$$

Наоборотъ, можно многочленъ или часть его заключить въ скобки, такъ, какъ передъ ними былъ определенный знакъ. Здѣсь опять надо рассмотреть два случая

1. Если многочленъ или часть его желаетъ заключить въ скобки со знакомъ $+$ передъ ними, то у членовъ, вносимыхъ въ скобки, слѣдуетъ сохранить свои знаки. Такъ въ выраженіи $a - b - c + d - e$, внося три послѣдніе члена въ скобки со знакомъ $+$ передъ ними, получимъ

$$a + b + (-c + d - e);$$

2. Истинность этого преобразованія подтверждается тѣмъ, что, раскрывъ скобки, данное выраженіе $a + b - c + d - e$.

2 Если же многочлен или часть его требуется заключить въ скобки со знакомъ — передъ ними, то у членовъ, заключаемыхъ въ скобки, надо знаки переменить на обратные. Такъ, если три средніе члена многочлена $a - b + f - h + k$ нужно заключить въ скобки со знакомъ — передъ ними, то найдемъ:

$$a - (b - f + h) + k;$$

правильность преобразованія доказывается тѣмъ, что, раскрывъ скобки, найдемъ данное выраженіе

$$a - b + f - h + k.$$

Можно въ данный многочленъ вводить и нѣсколько паръ скобокъ. Такъ, наприм., многочленъ $a - b + c - d + e - f$ можно написать въ видѣ

$$a - [-b + c - (d - e + f)].$$

ГЛАВА IV.

Умноженіе

Опредѣленіе — Правило знаковъ. Законъ перемѣстительный. Умноженіе одночленовъ. — Умноженіе многочлена на одночленъ и обратно. — Умноженіе многочленовъ. — Замѣчательные случаи умноженія.

26. Определѣніе. — Если для умноженія даны два ариметическія цѣлыя числа, напр. 5 и 4, то умножить первое на второе значитъ взять первое слагаемымъ 4 раза. Но если бы требовалось умножить 5 на $\frac{4}{7}$, то данное опредѣленіе теряетъ смыслъ въ примѣненіи къ этому случаю, потому что нельзя взять 5 слагаемымъ $\frac{4}{7}$ раза. Такимъ образомъ, опредѣленіе дѣйствія умноженія, въ случаѣ умноженія на дробь, должно быть измѣнено, но такъ, чтобы оно не противорѣчало опредѣленію умноженія на цѣлое число. Умножая 5 на 4, мы имѣемъ четыре слагаемыхъ, т.-е. составляемъ изъ множимаго новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицъ. Распространяя такое понятіе объ умноженіи на случай дробнаго множителя, т. е. понимая подъ умноженіемъ наприм. 5 на $\frac{4}{7}$ составленіе изъ 5 новаго числа такъ, какъ $\frac{4}{7}$ составлено изъ единицъ, мы даемъ такое опредѣленіе умноженія, которое, омысливая случай умноженія на дробь, не противорѣчитъ въ то же время опредѣленію дѣйствія умноженія на цѣлое число. Распространяя это опредѣленіе и на алгебраическія количества. *Задача* дать слѣдующее общее опредѣленіе умноженія: *умножить одно количество на другое значитъ изъ множимаго составить новое количество такъ, какъ множитель составленъ изъ положительной единицы.*

27. Правило знаковъ. — Примѣняя это опредѣленіе къ выводу правила знаковъ при умноженіи.

Пусть требуется положительное количество (+5) помножить на положительное количество (+4). Это значитъ, изъ +5 составить новое количество такъ, какъ множитель +4 составленъ изъ положительной единицы. Но для составле-

4 взять ∓ 1 надо 1 повторить слагаемым четыре раза; въ самомъ
 $(+1) + (+1) + (+1) + (+1) = 1 + 1 + 1 + 1 = +4$; а по-
 сле нахождения произведения надо и 5 взять слагаемымъ четыре раза.

$$(+4) + (+5) + (+5) + (+5) + (+5) = 5 + 5 + 5 + 5 = 20. \quad (1).$$

Итъ требуется (-5) помножить на $(+4)$. По опредѣленію, это значить
 5) составить новое количество такъ, какъ $(+4)$ составлено изъ поло-
 ловой единицы, т.е. надо (-5) повторить слагаемымъ четыре раза. На-

$$(+4) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = 5 + 5 + 5 - 5 = 20. \quad (2).$$

Зано: $(+5)$ помножить на (-4) . По опредѣленію, надо изъ $(+5)$ состав-
 новое количество такъ, какъ (-4) составлено изъ $(+1)$. Но для состав-
 ления (-4) изъ $(+1)$ нужно у $(+1)$ переменить знакъ на обратный, и съ
 этимъ измѣненнымъ знакомъ взять ее слагаемой четыре раза; дѣйствительно,
 $(+1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$.

Вторая надъ множимымъ тѣ же дѣйствія, что и надъ $(+1)$, должно: у
 переменить знакъ на обратный, вследствие чего получимъ (-5) , а за-
 темъ (-5) повторить слагаемымъ четыре раза. Найдѣмъ

$$(-4) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = 5 + 5 + 5 - 5 = -20. \quad (3).$$

Итъ, наконецъ, требуется (-5) помножить на (-4) . Согласно опредѣ-
 ленію, нужно у (-5) переменить знакъ на обратный, и съ этимъ измѣненнымъ
 знакомъ взять его слагаемымъ четыре раза. Получимъ

$$(-4) + (+5) + (+5) + (+5) + (+5) = 5 + 5 + 5 + 5 = 20. \quad (4).$$

Результаты: (1), (2), (3) и (4) приводятъ къ слѣдующему правилу: при
 умноженіи двухъ количествъ надо перемножить ихъ абсолютныя вели-
 чины и передъ результатомъ поставить знакъ $+$, если множимое и
 множитель имѣютъ одинаковые знаки, и $-$, если оба сомножителя
 имѣютъ знаки разные.

Выводъ этого правила мы брали числа цѣлыя. Возьмемъ теперь дроб-
 ные: пусть, наприм., требуется $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$. По опредѣленію умно-
 жить $\frac{2}{3}$ надо изъ $\frac{2}{3}$ составить новое количество такъ, какъ $(-\frac{5}{7})$ соста-
 влено изъ $(+1)$. Но для составления $(-\frac{5}{7})$ изъ $(+1)$ надо: 1) $+1$ раздѣлить
 на 7, вследствие чего получимъ $+\frac{1}{7}$, въ самомъ дѣлѣ, помноживъ $+\frac{1}{7}$ на
 7, повторивъ слагаемымъ 7 разъ, найдемъ $+\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 1$. 2) затѣмъ слѣдуетъ $-\frac{5}{7}$ повторить слагаемымъ пять разъ; слѣ-
 довательно, найдемъ $+\frac{5}{7}$; в 3) въ результатѣ переменить знакъ на обратный,
 получимъ $-\frac{5}{7}$. Поступая съ $\frac{2}{3}$ такъ, какъ сейчасъ мы поступали
 съ $\frac{2}{3}$, во-первыхъ, $-\frac{2}{3}$ на 7, вследствие чего находимъ $-\frac{2}{3 \cdot 7}$;

повторяемъ, затѣмъ, $\frac{2}{3}$ ставимъ пять разъ, что даетъ $\frac{2 \times 5}{3 \times 7}$; наконецъ, въ результатѣ перемѣняемъ знакъ и находимъ $\frac{2 \times 5}{3 \times 7}$, или $+\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$.

Итакъ:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = +\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7},$$

что согласно съ вышеприведеннымъ правиломъ.

Такимъ образомъ, обозначая буквами x и y абсолютныя числа, цѣлыя или дробныя, имѣемъ

$$(+x) \cdot (+y) = +xy$$

$$(-x) \cdot (-y) = +xy$$

$$(+x) \cdot (-y) = -xy$$

$$(-x) \cdot (+y) = -xy$$

28. Обобщеніе правила знаковъ — Пусть a и b будутъ два количества, которыя сами по себѣ могутъ быть положительныя или отрицательныя; и распространимъ правило знаковъ въ этотъ случай. Докажемъ, напр., что каковы бы ни были знаки a и b , всегда $(-a) \cdot (-b) = +ab$. Разсмотримъ четыре случая:

I. Пусть $a = +x$, $b = +y$, гдѣ x и y — числа абсолютныя, цѣлыя или дробныя. Въ такомъ случаѣ: $-a = -(+x) = -x$, $-b = -(+y) = -y$; слѣдовательно

$$(-a) \cdot (-b) = -x \cdot -y = +xy.$$

Съ другой стороны

$$+ab = +(+x \cdot +y) = +(+xy) = +xy.$$

Итакъ, количества $(-a) \cdot (-b)$ и $+ab$, какъ равныя порознь одному и тому же количеству $+xy$, равны между собою, слѣд.

$$(-a) \cdot (-b) = +ab.$$

II. Пусть $a = -x$, $b = +y$, гдѣ x и y числа абсолютныя.

Въ этомъ случаѣ: $-a = -(-x) = +x$, и $-b = -(+y) = -y$; слѣд.

$$(-a) \cdot (-b) = +x \cdot -y = -xy.$$

Съ другой стороны

$$+ab = +(-x \cdot +y) = +(-xy) = -xy.$$

Заключаемъ опять, что и въ этомъ случаѣ

$$(-a) \cdot (-b) = +ab.$$

III. Пусть $a = +x$, $b = -y$; отсюда: $-a = -(+x) = -x$, и $-b = -(-y) = +y$; слѣд. $(-a) \cdot (-b) = -x \cdot +y = -xy$.

Но $-ab = -(+x \cdot -y) = -(-xy) = +xy$.

Опять находя, что

$$(-a) \cdot (-b) = +ab.$$

Пусть, наконец, $a = \alpha$, $b = \beta$; в таком случае:

$$-a = -(-\alpha) = +\alpha; \quad b = +\beta = +\beta; \text{ слѣд.} \\ (-a) \cdot (-b) = +\alpha \cdot +\beta = +\alpha\beta.$$

$$\text{Но } +ab = +(-\alpha \cdot -\beta) = +(+\alpha\beta) = +\alpha\beta.$$

Снова имѣемъ

$$(-a) \cdot (-b) = +ab$$

А-зѣ, каковы бы ни были знаки количествъ a и b , всегда имѣемъ:

$$(-a) \cdot (-b) = +ab.$$

Понимать же точно образомъ можно убѣдиться, что вышедоказанное правило распространяется и на три остальные случая: такъ что, каковы бы ни были количества a и b — положительные или отрицательныя, и каковы бы ни были абсолютныя величины — цѣлыя или дроби, всегда имѣемъ:

$$\begin{aligned} (+a) \cdot (-b) &= -ab; \\ (-a) \cdot (+b) &= -ab; \\ (+a) \cdot (-b) &= -ab; \\ (-a) \cdot (-b) &= +ab. \end{aligned}$$

Правило знаковъ при умноженіи, въ сокращенной формѣ, выражаютъ такъ: *одинаковые знаки даютъ въ произведеніи плюсъ, а разные — минусъ.*

Слѣдствія. — Укажемъ нѣкоторые слѣдствія правила знаковъ:

1) Произведеніе положительныхъ количествъ всегда положительное; такъ,

$$(+2) \cdot (+3) \cdot (+4) = +24.$$

2) Знакъ произведенія отрицательныхъ множителей зависитъ отъ числа ихъ, а-зѣ если число ихъ четное, то произведеніе будетъ положительное, потому что въ такомъ случаѣ его можно разбить на пары изъ которыхъ каждая даетъ положительное; если же число отрицательныхъ множителей нечетное, то произведеніе будетъ отрицательное, такъ какъ въ этомъ случаѣ будетъ одинъ отрицательный множитель, для котораго нѣтъ пары. Такъ:

$$1) (+8) \cdot (-5) \cdot (-2) = (-40) \cdot (-2) = +80;$$

$$2) (-8) \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-3) = (+80) \cdot (+3) = +240;$$

$$3) (+8) \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-7) = (-240) \cdot (-7) = +1680 \text{ и}$$

т. д.

Примѣчаніе. — Правило знаковъ встречаемъ уже у Диофанта (365 по X), но безъ доказательства. Знаменитый *Алгебра* въ своей алгебрѣ даетъ общее доказательство: $(-a) \cdot (-b)$ равно или ab , или $-ab$, третьяго случая быть не можетъ. Отнять результатъ не можетъ быть $-ab$, потому что такое произведеніе происходитъ или отъ $(-a) \cdot (+b)$, или отъ $(+a) \cdot (-b)$. Поэтому, произведеніе будетъ $+ab$. Очевидно, это доказательство, какъ и доказательство *Крилла*, не выдерживаетъ критики. Крайне *Всѣобщій Арифметикъ* говоритъ: «Теорема, въ силу которой два отрицательные множителя даютъ произведеніе со знакомъ, противоположнымъ множителямъ слѣд. положительное, сводится къ известному правилу грамматики: *negatio affirmat*».

Поэтому каждыя скобки дают Pm ; это количество повторяется n разъ, сл. сумма $= Pmn$.

Иначе: въ каждомъ вертикальномъ ряду имѣемъ n слагаемыхъ, изъ ко-
ихъ каждое $= P$; сл. каждый вертикальный рядъ даетъ Pn ; а какъ въѣхъ вер-
тикальных рядовъ m , то общая сумма $= Pnm$. Итакъ

$$Pmn = Pnm$$

Основываясь на этомъ выводѣ, докажемъ, что если дано произведение изъ
нѣсколькихъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, то каждое изъ нихъ можно помѣ-
стить на каждомъ мѣстѣ.

Такъ, имѣя произведеніе $abcde$, можемъ, на основаніи предыдущей теоремы,
измѣнить его произведеніемъ $abced$. Затѣмъ, разсматривая e и c какъ два по-
слѣдніе множителя произведенія $abec$, замѣняемъ последнее равнымъ ему произ-
веденіемъ $abce$, такъ что $abced = abced$. Разсматривая b и e какъ два по-
слѣдніе множителя произведенія $abce$, замѣняемъ последнее равнымъ ему произ-
веденіемъ aeb , такъ что $abced = aebcd$. Наконецъ, перемѣняя мѣста множи-
телей произведенія ae , находимъ $aebcd = eabcd$. Такимъ образомъ, последова-
тельно имѣемъ

$$abcde = abced = abced = aebcd = eabcd,$$

откуда видимъ, что множитель e можетъ быть поставленъ на каждомъ мѣстѣ
произведенія, не измѣняя величины его.

Это справедливо относительно каждаго множителя; слѣд. въ произведеніи цѣ-
лыхъ положительныхъ множителей можно каждое изъ нихъ помѣстить послѣ-
днимъ на каждомъ мѣстѣ, не измѣняя этимъ величины произведенія.

II. Пусть множители будутъ положительныя дроби. Означая буквою P про-
изведеніе, предшествующее двумъ послѣднимъ множителямъ $\frac{m}{n}$ и $\frac{r}{s}$, припоми-
ная правило умноженія дробей и замѣтая, что правило знаковъ доказано и для
дробныхъ множителей, выходимъ

$$P \times \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = P \cdot \frac{mr}{ns} = P \cdot \frac{rm}{sn} = P \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{m}{n}$$

Такимъ образомъ и здѣсь произведеніе не измѣняется отъ перестановки двухъ
послѣднихъ множителей. А отсюда, прямѣяя вышесприведенныя разсужденія,
находимъ, что

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{h}{i} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{h}{i} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{h}{i} \\ = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{h}{i} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{h}{i}$$

т. е. въ произведеніи нѣсколькихъ дробныхъ положительныхъ множителей мож-
но послѣдній изъ нихъ помѣстить на какомъ угодно мѣстѣ произведенія, не
измѣняя величины послѣдняго. Правило это справедливо и для всѣхъ дробныхъ
положительныхъ множителей.

III. Если множители произведенія будутъ отрицательныя, дробныя или цѣ-
лыя, то произведеніе, по абсолютной величинѣ, равно будетъ произведенію тѣхъ
же множителей, но взятыхъ съ положительными знаками. Но, по доказанному,
въ произведеніи положительныхъ множителей можно измѣнять порядокъ ихъ какъ
угодно, не измѣняя этимъ величины произведенія. Поэтому абсолютная величина

нашего произведѣнія не замѣнится отъ перемѣны мѣстъ множителей. Следовательно, если измѣненіе порядка множителей можетъ оказать какое-нибудь влияние на величину произведенія, то это влияние можетъ простираться только на его знакъ. Но выше было доказано (§ 28, сл. 2), что знакъ произведенія отрицательныхъ множителей зависитъ только отъ ихъ числа, но не отъ порядка, въ которомъ они размѣщены; а какъ число ихъ при произвольныхъ перестановкахъ остается то же самое, то и знакъ произведенія всегда будетъ одинъ и тотъ же. Итъмъ, измѣняя порядокъ множителей въ произведеніи отрицательныхъ чиселъ, мы этимъ не измѣнимъ ни величины, ни знака произведенія.

Слѣдствіе I. Чтобы умножить данное количество на произведение нѣсколькихъ другихъ, нужно его послѣдовательно умножить на множители этого произведенія. Это — такъ-называемый законъ *сочетательный* въ умноженіи.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$m(abc) = (abc)m,$$

по закону перемѣстительности выражаемое въ слѣдующемъ: чтобы умножить a нужно умножить на b , полученное на c , и наконецъ произведение на m ; опустивъ, для сокращенія скобки, найдемъ

$$m(abc) = abcm,$$

но по закону перемѣст., $abcm = mabc$, сл. окончательно

$$m(abc) = mabc.$$

II. Чтобы умножить произведение на нѣкоторое количество, нужно на это количество помножить одного изъ производителей.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\begin{aligned} (abcd)m &= abcdm \text{ (опустивъ скобки)} \\ &= mabdc \text{ (по закону перемѣстительности)} \\ &= (cm)abd \text{ (по смыслу скобокъ)} \\ &= ab(cm)d \text{ (по закону перемѣст.)}. \end{aligned}$$

III. Во всякомъ произведеніи можно: нѣсколько множителей замѣнить ихъ вычисленными произведеніями и обратно, какой угодно множитель другими, которыхъ произведенію онъ равенъ.

Въ самомъ дѣлѣ:

1) Всегда возможно рассматриваемые множители перемѣстить такъ, чтобы они стояли рядомъ: составить изъ нихъ произведеніе; и помножить последнее куда угодно какъ множителя.

2) Всегда возможно множители, которые же ась разложить, помѣстить на первомъ мѣстѣ; замѣнить его сомножителями, произведеніемъ которыхъ онъ равенъ бы; и наконецъ разложить этихъ множителей, какъ угодно.

30. Правило показателей. — Рассмотримъ умноженіе степеней одного и того же показателя. Пусть, напр., требуется умножить a^5 на a^3 . Мы знаемъ, что a^5 a, a, a, a, a и a^3 a, a, a ; следовательно $a^5 a^3 = a, a, a, a, a, a, a, a$ a^8 . Откуда заключаемъ, что произведение имѣетъ то же самое основаніе, а показателемъ равно суммѣ показателей множителей. Пусть теперь дано помножить a^m на a^n , гдѣ a какое-нибудь количество; а m и n — числа лѣвые и правыя.

Замѣчая, что

$a^m = a \cdot a \cdot a \dots$ гдѣ a повторяется множителемъ m разъ,
и $a^n = a \cdot a \cdot a \dots$ гдѣ a берется множителемъ n разъ,

находимъ, что

$$\begin{array}{c} \overbrace{a^m \cdot a^n}^{m \text{ разъ}} \quad \overbrace{a^m \cdot a^n}^{n \text{ разъ}} \\ a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{m+n \text{ разъ}} \quad a^{m+n} \end{array}$$

Итакъ: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Слѣд. имѣемъ правило:

Применение одной степенной основы и того же основанія есть другая степень того же самого основанія, которой показатель равенъ суммѣ показателей множителей.

31. Умноженіе одночленовъ. — Пусть дано перемножить одночлены

$$6a^3b^2c^2d^4 \quad 5a^2b^4cf^2.$$

Перемѣнивъ порядокъ множителей $6, a^3, b^2, c^2, d^4, 5, a^2$ и г. д., отъ чего величина произведенія не измѣнится, даемъ произведенію видъ

$$6 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^4 \cdot c^2 \cdot c^2 \cdot d^4 f^2;$$

примѣняя сюда правило показателей (§ 30), имѣемъ

$$6 \cdot 5 \cdot a^7 b^6 c^4 d^4 f^2.$$

Итакъ

$$6a^3b^2c^2d^4 \times 5a^2b^4cf^2 = 30a^7b^6c^4d^4f^2.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило умноженія одночленовъ:

1) Коэффициенты слѣдуетъ перемножить.

2) Затѣмъ написать одну за другою всѣ различныя буквы, входящія въ оба одночлена, и при каждой поставить показатель, равный суммѣ показателей той буквы въ множителяхъ, если же буква входитъ только въ одинъ изъ множителей, ее ничему въ произведеніи съ тѣмъ показателемъ, какой она имѣетъ.

Примѣръ. Умножить: $-7x^m y^{3z^2}(u-v)^8$ на $\frac{3}{4} x^n y^4(u-v)^5$.

Замѣчая, что знакъ произведенія долженъ быть $(-)$, и примѣняя выведенное правило, получимъ въ произведеніи

$$-\frac{21}{4} x^{m+n} y^{3z^2+4} (u-v)^{13}.$$

Умноженіе многочлена на одночленъ.

32. Пусть требуется умножить $a^2b^3c^4$ на d , гдѣ подъ буквами a, b и можно разумѣть какія угодно числа. Что же касается множителя d , то слѣдуетъ различать нѣсколько случаевъ.

1. Пусть d есть дѣльное положительное число, напр. $d = 4$. Припоминая рѣшеніе умноженія и замѣчая, что 4 составлено изъ трехъ положительной

единицы, какъ слагаемаго, четыре раза, заключаемъ, что и множимое надо повторять слагаемымъ столько же разъ. Получимъ

$$(a + b - c) \cdot 4 = (a + b - c) + (a + b - c) + (a + b - c) + (a + b - c) = 4a + 4b - 4c.$$

Результатъ показываетъ, что для умноженія многочлена на цѣлое положительное число нужно каждый членъ множимаго отдѣльно помножить на это число, соблюдая правило знаковъ.

2. Пусть d равно некоторой положительной дроби, напр. $\frac{3}{4}$. По опредѣленію, умножить $a + b - c$ на $\frac{3}{4}$ значитъ изъ множимаго составить новое количество такъ, какъ множитель составленъ изъ $\frac{3}{4}$. Но для составленія $\frac{3}{4}$ изъ $\frac{1}{4}$, надо отъ $\frac{1}{4}$ взять четверть, вслѣдствіе чего получимъ $\frac{1}{4}$, а затѣмъ $\frac{1}{4}$ помножить на 3, что и дастъ дѣйствительно $\frac{3}{4}$. Итакъ, мы должны: 1) взять четверть отъ $a + b - c$ и 2) полученный результатъ умножить на 3.

Можно доказать, что для раздѣленія многочлена $a + b - c$ на 4 нужно каждый его членъ раздѣлить на 4, удѣливая передъ каждымъ изъ отдѣльныхъ частныхъ тотъ знакъ, какой имѣетъ дѣлитель членъ, т. е. что

$$\frac{a + b - c}{4} = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} - \frac{c}{4}.$$

Для доказательства помножимъ частное на 4; по извѣстному уже правилу умноженія многочлена на цѣлое положительное число найдемъ:

$$\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} - \frac{c}{4} \right) \cdot 4 = \frac{a}{4} \cdot 4 + \frac{b}{4} \cdot 4 - \frac{c}{4} \cdot 4.$$

Замѣчая, что $\frac{a}{4}$ или $\frac{1}{4}a$, умноженная на 4, даетъ $\frac{1}{4}a$ или a и т. д., находимъ, что

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{4} - \frac{c}{4} = \frac{1}{4}(a + b - c).$$

Итакъ, помноживъ частное на дѣлителя, мы нашли въ результатѣ дѣлимое, а потому дѣйствительно

$$\frac{a + b - c}{4} = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c.$$

Это выраженіе надо умножить на 3. По извѣстному уже правилу умноженія на цѣлое положительное число получаемъ

$$\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c \right) \cdot 3 = \frac{1}{4}a \cdot 3 + \frac{1}{4}b \cdot 3 - \frac{1}{4}c \cdot 3,$$

или, отнесъ 3 множителемъ къ $\frac{1}{4}$, найдемъ окончательно:

$$(a + b - c) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}b - \frac{3}{4}c,$$

т. е. для умноженія многочлена на положительную дробь нужно каждый членъ множимаго умножить отдѣльно на эту дробь, соблюдая правило знаковъ.

3. Пусть d равно некоторому отрицательному целому числу, напр., $d = -3$. По определению умножения, нужно съ множимым поступать такъ, какъ съ $+1$ при составленіи изъ нея -3 , т.-е. переменить у множимаго знакъ, что даетъ $-(a+b-c)$, и затѣмъ повторять это выраженіе складываемымъ три раза. Итакъ

$$(a+b-c) \cdot -3 = (a+b-c) - (a+b-c) - (a+b-c)$$

По раскрытіи скобокъ и по приведеніи, находимъ

$$(a+b-c) \cdot -3 = -3a - 3b + 3c.$$

Результатъ этотъ привести къ тому же заключенію, какъ и два первые случая.

4. Пусть наконецъ $d = \frac{2}{3}$, т.-е. отрицательной дроби. Замѣтвъ, что

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1, \text{ имѣемъ}$$

$$(a+b-c) \cdot \frac{2}{3} = \left[(a+b-c) \cdot \frac{3}{2} \right] \times \frac{2}{3}.$$

Отсюда видно, что выраж. $a+b-c$ умножить сперва на положительную дробь $\frac{3}{2}$, а затѣмъ полученное изъ этого положительное целое число 1 . Производя эти двѣ операции, для которыхъ $\frac{3}{2}$ и $\frac{2}{3}$ найдены, находимъ последовательно

$$(a+b-c) \cdot \frac{2}{3} = \left[\frac{3}{2} \cdot (a+b-c) \right] \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b - \frac{3}{2}c \right) \cdot \frac{2}{3} = a + b - c.$$

Отсюда тоже легко вывести то же правило.

Итакъ, каково бы ни было d , имѣемъ

$$(a+b-c) \cdot d = ad + bd - cd,$$

откуда правило для умноженія многочлена на одночленъ нужно каждый членъ множимаго умножить на множителъ, соблюдая правило знаковъ.

Этимъ правиломъ выкажется законъ распределительный

$$\begin{aligned} \text{Примеръ I. } (x^2 - 4x^2 + \frac{2}{5}ad^2 - 3) \cdot \frac{2}{3}a^2c &= \frac{3}{2}b^2 \times \frac{2}{3}a^2c + \\ + 4c^2 \times \frac{2}{3}a^2c &- \frac{2}{3}ad^2 \cdot \frac{2}{3}a^2c + 3 \cdot \frac{2}{3}a^2c = a^2b^2c + \\ &+ 2a^2c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Примеръ II. } \{a^2(x^2+1)^n - 3a(x^2+1)^{n-1} - 5(x^2+1)^{n-2}\} \times \\ - 2a^n(x^2+1)^{n+3} &= -2a^{n+2}(x^2+1)^{2n+3} + 6a^{n+1}(x^2+1)^{2n+2} - 10a^n(x^2+1)^{2n+1}. \end{aligned}$$

Умноженіе одночлена на многочленъ.

33. Пусть требуется одночленъ умножить на многочленъ: d на $a+b+c$. Замѣчая, что отъ перемены этихъ произведений произведеніе не измѣняется, имѣемъ:

$$d(a+b+c) = (a+b+c) \cdot d$$

На основании § 32, $(a - b + c) \cdot d = ad - bd + cd$; умноживъ въ каждомъ членѣ этого произведенія порядкомъ сомножителей, получимъ

$$d(a - b + c) = da - db + dc,$$

откуда правило: *для умноженія одночлена на многочленъ или одночленъ помножить на каждый членъ многочлена, соблюдая правило знаковъ.*

Такъ,

$$\frac{3}{5}y^{2p-m+1} [70y^{m-p-1} - 0.5y^{2m-2p} - 5y^{2p+m}] = 42y^n - 39y^{-4m+3} + 3y^{4p+1}.$$

Умноженіе многочлена на многочленъ.

34. Пусть требуется умножить $a - b + c$ на $p - q + r$. Представимъ себѣ на время, что буквы множителя замѣнены опредѣленными числами, и выполнивъ умноженія въ немъ дѣйствія, мы представимъ множителя нѣкоторымъ числомъ. Означивъ это число буквою V , будемъ имѣть въ вопросѣ къ умноженію многочлена на единичное, и по известному уже правилу найдемъ:

$$(a - b + c) \cdot V = aV - bV + cV.$$

Подставляя сюда вместо V данное выраженіе $p - q + r$, имѣемъ:

$$(a - b + c)(p - q + r) = a(p - q + r) - b(p - q + r) + c(p - q + r).$$

Но по правилу § 33 имѣемъ:

$$a(p - q + r) = ap - aq + ar; b(p - q + r) = bp - bq + br; c(p - q + r) = cp - cq + cr.$$

Слѣдовательно

$$(a - b + c)(p - q + r) = ap - aq + ar - (bp - bq + br) + (cp - cq + cr) = ap - aq + ar - bp + bq - br + cp - cq + cr.$$

Разсматривая составъ произведенія, замѣчаемъ, что первые три члена его представляютъ произведеніе перваго члена множимаго на каждый членъ множителя, слѣдующіе три члена — произведеніе втораго члена множимаго на каждый членъ множителя, а три послѣдніе — произведеніе третьяго члена множимаго на множителя. Полное произведеніе состоитъ, слѣдовательно, изъ частныхъ произведеній каждаго члена множимаго на каждый членъ множителя, составленныхъ съ соблюденіемъ правила знаковъ; такъ членъ cr , представляющій произведеніе членовъ, имѣющихъ одинаковые знаки, является въ произведеніи съ знакомъ $+$, а членъ $-cq$ — произведеніе членовъ, имѣющихъ разные знаки, является въ произведеніи съ знакомъ $-$. Итакъ, имѣемъ

Правило. — Для умноженія многочлена на многочленъ нужно каждый членъ множимаго помножить на каждый членъ множителя, соблюдая правило знаковъ, и если окажется возможно, свести произведеніе.

Существенное въ этомъ правилѣ то, что каждый членъ множимаго слѣдуетъ помножить на каждый членъ множителя съ соблюденіемъ правила знаковъ; порядокъ же частныхъ умноженій члена на членъ остается совершенно произвольнымъ.

Но въ изложеніи ошибокъ (повтореній или пропусковъ) соответствуютъ опредѣленный порядокъ, поступающій двойнымъ образомъ:

Дѣлаютъ умноженіе въ томъ порядкѣ, на который мы натолкнулись при правилѣ, т. е. умножаютъ сначала первый членъ множимаго на каждый множитель, затѣмъ второй членъ множимаго на каждый членъ множителя.

■ т. д. Или

Умножаютъ каждый членъ множимаго сначала на первый, затѣмъ на второй т. д. члены множителя.

Всѣ члены содержатъ одну и ту же букву, то для облегченія приво-
дятся подобныя члены въ одну строку, располагая ихъ по убываю-
щ., или по возрастающимъ степенямъ этой буквы. Затѣмъ подписываютъ
въ множительъ подъ первымъ, проводя въ горизонтальную черту, умножаютъ
каждое на первый членъ множителя и подписываютъ это частное произведе-
ніе подъ чертою.

Умножаютъ множимое на второй членъ множителя, и второе частное произ-
веденіе пишутъ подъ первымъ, такъ, чтобы подобныя члены выходили въ одномъ
вертикальномъ столбцѣ.

Составляютъ и располагаютъ такимъ же образомъ и другія частныя произ-
веденія; наконецъ, дѣлаютъ приведеніе.

Примѣръ I. Умножить

$$8x^4 - 5a^2x^2 - 2a^3x - 3ax^3 - a^4 \text{ на } 2ax^2 - 7a^3 - 6a^2x.$$

Располагаемъ оба сомножителя по убывающимъ степенямъ буквы x , и со-
единяясь съ сказаннымъ, производимъ умноженіе такъ:

$$\begin{array}{r} \text{Слѣдуетъ:} \quad 8x^4 + 3ax^3 - 5a^2x^2 - 2a^3x + a^4 \\ \text{Слѣдуетъ:} \quad 2ax^2 - 6a^2x + 7a^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{1-е частн. произв.} \quad 16ax^6 - 6a^2x^5 - 10a^3x^4 - 4a^4x^3 - 2a^5x^2 \\ \text{2-е частн. произв.} \quad 48a^2x^5 - 18a^3x^4 - 30a^4x^3 - 12a^5x^2 - 6a^6x \\ \text{3-е частн. произв.} \quad \quad \quad - 56a^3x^4 - 21a^4x^3 - 35a^5x^2 - 14a^6x - 7a^7 \\ \text{Частное произв.} \quad 16ax^6 - 42a^2x^5 - 28a^3x^4 - 47a^4x^3 - 21a^5x^2 - 20a^6x + 7a^7 \end{array}$$

Примѣръ II. Умножить $-\frac{3}{4}a^3x + \frac{4}{5}a^4 - \frac{5}{2}a^2x^2 + x^4 - \frac{2}{3}ax^3$ на $x^2 + \frac{2}{3}a^3 + \frac{3}{2}ax$.

Располагаемъ оба сомножителя по возрастающимъ степенямъ главной буквы
и производимъ дѣйствіе слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 4x^4 - \frac{3}{4}a^3x + \frac{5}{2}a^2x^2 - \frac{2}{3}ax^3 + x^4 \\ \frac{2}{3}a^3 + \frac{3}{2}ax + x^2 \\ \hline 15x^8 - \frac{1}{2}a^3x^7 - \frac{5}{3}a^4x^6 - \frac{1}{9}a^3x^5 - \frac{1}{3}a^2x^4 \\ \quad + \frac{6}{5}a^5x^3 - \frac{9}{8}a^4x^2 - \frac{15}{4}a^5x^3 - a^2x^4 - \frac{3}{2}a^6x^5 \\ \quad + \frac{4}{5}a^4x^2 - \frac{3}{4}a^3x^3 - \frac{5}{2}a^2x^4 - \frac{2}{3}ax^5 - x^6 \\ \hline 15x^8 + \frac{7}{10}a^5x + \frac{161}{120}a^4x^2 + \frac{23}{9}a^3x^3 - \frac{13}{6}a^2x^4 - \frac{5}{6}ax^5 + x^6. \end{array}$$

Примеръ III. Умножить $8x^3 - 3a^2x^2 - 5a^4x + a^5$ на $7x^2 - 8ax + a^2$.

Располагая дѣйствіе такимъ же образомъ какъ и въ предыдущихъ примѣрахъ, оставляя пустое мѣсто гдѣ въ множимомъ должны бы были находиться члены, содержащіе x^4 и x^5 , имѣемъ:

$$\begin{array}{r}
 8x^3 \qquad \qquad \qquad - 3a^2x^2 - 5a^4x + a^5 \\
 7x^2 - 8ax + a^2 \\
 \hline
 56x^5 \qquad \qquad \qquad - 21a^2x^4 - 35a^4x^3 + 7a^5x^2 \\
 \qquad - 64ax^6 \qquad \qquad \qquad + 24a^4x^2 + 40a^5x - 8a^6x \\
 \qquad \qquad + 8a^2x^3 \qquad \qquad \qquad - 3a^5x^3 - 5a^6x + a^7 \\
 \hline
 56x^5 - 64ax^6 - 8a^2x^3 \quad 21a^2x^4 - 11a^4x^3 \quad 44a^4x^2 - 13a^6x + a^7
 \end{array}$$

Свойства произведенія двухъ полиномовъ.

35 I. Число членовъ произведенія. — Умножая множимое на первый членъ множителя, получаемъ первое частное произведеніе, имѣющее столько членовъ, сколько ихъ и во множимомъ. Произведеніе множимого на второй членъ множителя содержитъ опять столько членовъ, сколько имъ во множимомъ, и т. д. Поэтому, если частныя произведенія не содержатъ подобныхъ членовъ, то *число членовъ произведенія равно будетъ произведенію числа членовъ множимого на число членовъ множителя*. Напр., если множимо имѣетъ 7 членовъ, а множитель 5, то въ произведеніи будетъ 7×5 или 35 членовъ.

Но произведеніе двухъ многочленовъ можетъ содержать члены подобные; вслѣдствіе соединенія нѣсколькихъ подобныхъ членовъ въ одинъ, число членовъ произведенія можетъ уменьшиться, но никогда не можетъ сдѣлаться меньше двухъ. Въ самомъ дѣлѣ, легко доказать, что въ произведеніи двухъ полиномовъ, содержащихъ одну и ту же букву x , всегда есть по крайней мѣрѣ два члена, которые не имѣютъ себѣ подобныхъ между другими членами произведенія, и потому *неприводимы*. Для доказательства замѣтимъ, что всякій членъ произведенія происходитъ отъ умноженія какого-либо члена множимого на одинъ изъ членовъ множителя, и показатель главной буквы въ немъ равенъ суммѣ показателей той же буквы въ членахъ множимого и множителя, отъ которыхъ онъ произошелъ. Слѣдовательно, неможливо вышій относительно главной буквы членъ множимого на вышій членъ множителя, мы получимъ членъ произведенія, въ которомъ показатель главной буквы будетъ равенъ суммѣ *наибольшихъ* показателей той же буквы, какіе имѣются въ сомножителяхъ; очевидно, что такой членъ произведенія будетъ имѣть главную букву съ показателемъ большимъ ея показателемъ въ другихъ членахъ произведенія; поэтому означенный членъ не можетъ имѣть себѣ подобныхъ между остальными членами произведенія и слѣд. есть *членъ неприводимый*. Умноживъ низшій относительно главной буквы членъ множимого на низшій членъ множителя, получимъ членъ произведенія, въ которомъ главная буква будетъ имѣть показатель, равный суммѣ *наименьшихъ* показателей той же буквы въ сомножителяхъ, слѣд. показатель главной буквы этого члена будетъ меньше чѣмъ въ другихъ членахъ произведенія, а потому это будетъ также *членъ неприводимый*. Заключаемъ, что произведеніе двухъ многочленовъ содержитъ, по меньшей мѣрѣ, два неприводимыхъ члена — вышій и низшій относительно главной буквы. Итакъ:

наибольшее число членовъ произведенія равно произведенію числа членовъ множимого на число членовъ множителя, наименьшее же — два члена.

Замѣчаніе. Когда множимое и множитель расположены по нисходящимъ степенямъ степенямъ главной буквы, то неприводимые члены (высшій и низшій) занимаютъ крайнія мѣста произведенія.

Слѣдующій примѣръ представляетъ одинъ изъ случаевъ, когда произведеніе имѣетъ только два члена,

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ x - 1 \\ \hline x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x \\ - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \\ \hline x^5 - 1 \end{array}$$

II. Свойство произведенія однородныхъ многочленовъ. — Произведеніе двухъ однородныхъ многочленовъ есть многочленъ однородный, а измѣреніе его равно суммѣ измѣреній множителей. Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе двухъ какихъ-нибудь членовъ множимаго и множителя имѣетъ измѣреніе равное суммѣ показателей перемножаемыхъ членовъ; но оба многочлена однородны, слѣд. эта сумма во всѣхъ членахъ произведенія будетъ одинакова, т.-е. произведеніе само будетъ однородно, а его измѣреніе равно суммѣ измѣреній сомножителей.

Такъ, многочленъ $a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4$ есть однородный многочленъ четырехъ измѣреній; $a - x$ есть однородный двучленъ одного измѣренія; произведеніе же ихъ $a^5 - x^5$ однородное выраженіе пяти измѣреній.

Замѣчательные случаи умноженія.

36. Рассмотримъ нѣкоторые часто встрѣчающіеся особенные случаи умноженія.

I. Пусть требуется сумму $a + b$ возвысить въ квадратъ. Для этого надо $a + b$ помножить само на себя:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

Итакъ: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, т.-е.

квадратъ суммы двухъ количествъ равенъ: квадрату перваго члена, $+$ удвоенное произведеніе перваго члена на второй, $+$ квадратъ второго.

Наприм., $(5x^2 + 2y)^2 = (5x^2)^2 + 2 \cdot 5x^2 \cdot 2y + (2y)^2 = 25x^4 + 20x^2y + 4y^2$.

II. Возвысимъ въ квадратъ разность $a - b$:

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2. \end{array}$$

Следовательно: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, т.-е.

квадрат разности двух количеств равен квадрату первого члена, — удвоенное произведение первого на второй, + квадрат второго.

Напр. $(0,3ax - x^2)^2 = (0,3ax)^2 - 2 \cdot 0,3ax \cdot x^2 + (x^2)^2 = 0,09a^2x^2 - 0,6ax^3 + x^4$.

III. Умножить сумму двух количеств a и b на их разность:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

Итак: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, т.-е.

произведение суммы двух количеств на их разность равно разности их квадратов.

Напр. $(4x^2y - \frac{2}{3}xy^2)(4x^2y + \frac{2}{3}xy^2) = (4x^2y)^2 - (\frac{2}{3}xy^2)^2 = 16x^4y^2 - \frac{4}{9}x^2y^4$.

IV. Найдем куб суммы $a + b$. Замечая, что $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$, и что $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, мы найдем искомым результатом, умножив $a^2 + 2ab + b^2$ на $a + b$:

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Следовательно: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, т.-е.

куб суммы двух количеств равен кубу первого члена, + утроенное произведение квадрата первого члена на второй, + утроенное произведение первого члена на квадрат второго, + куб второго.

Напр. $(2a^2 + 4b^2)^3 = (2a^2)^3 + 3 \cdot (2a^2)^2 \cdot 4b^2 + 3 \cdot (2a^2)(4b^2)^2 + (4b^2)^3 = 8a^6 + 48a^4b^2 + 96a^2b^4 + 64b^6$.

V. Таким же образом найдем $(a - b)^3$, умножив $(a - b)^2$ или $a^2 - 2ab + b^2$ на $a - b$:

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

Следовательно: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, т.-е.

куб разности двух членов равен кубу первого члена, минус утроенное произведение квадрата первого члена на второй, минус утроенное произведение первого члена на квадрат второго, минус куб второго члена.

Напр. $(\frac{1}{2} - 3x^2)^3 = (\frac{1}{2})^3 - 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (3x^2)^2 - (3x^2)^3 = \frac{1}{8} - \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x^4 - 27x^6$.

37 Формула № II можетъ быть выведена изъ формулы № I, если въ по-
слѣдней положить $b = -b'$; напомнимъ

$$[a + (-b')]^2 = a^2 + 2a(-b') + (-b')^2.$$

Замѣтивъ, что $a + (-b') = a - b'$; затѣмъ, что $+2a(-b') = -2ab'$, и что $(-b')^2 = +b'^2$, имѣемъ

$$(a - b')^2 = a^2 - 2ab' + b'^2.$$

Такимъ же образомъ, подставляя въ формулу № IV вмѣсто b количество $-b'$, получаемъ

$$[a + (-b')]^3 = a^3 + 3a^2(-b') + 3a(-b')^2 + (-b')^3.$$

Замѣчая, что $a + (-b') = a - b'$, что $+3a^2(-b') = -3a^2b'$, что $3a(-b')^2 = +3ab'^2$ и что $(-b')^3 = -b'^3$, имѣемъ

$$(a - b')^3 = a^3 - 3a^2b' + 3ab'^2 - b'^3.$$

Приложенія.

38. Приложимъ формулы § 36 къ нѣсколькимъ примѣрамъ.

Примѣръ I. Возвысить 79 въ квадратъ.

По формулѣ № I имѣемъ:

$$79^2 = (70 + 9)^2 = 4900 + 1260 + 81 = 6241.$$

Примѣръ II. Возвысить 97 въ квадратъ.

По формулѣ № II имѣемъ:

$$97^2 = (100 - 3)^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409.$$

Примѣръ III. Помножить 103 на 97.

По формулѣ № III находимъ:

$$103 \times 97 = (100 + 3)(100 - 3) = 10000 - 9 = 9991.$$

Примѣръ IV. Преобразовать:

$$(3a^2 - 2ab + 3b^2)(3a^2 + 2ab - 3b^2).$$

Первый множитель можно представить въ видѣ $3a^2 - (2ab - 3b^2)$; второй — въ видѣ $3a^2 + (2ab - 3b^2)$; применяя формулу № III, получимъ:

$$(3a^2)^2 - (2ab - 3b^2)^2,$$

или, выполняя дѣйствія:

$$9a^4 - 4a^2b^2 + 12ab^3 - 9b^4.$$

Примѣръ V. Умножить $x + y + z - t$ на $x + y - z + t$.

Представивъ данныя выраженія въ видѣ

$$(x + y) + (z - t) \text{ и } (x + y) - (z - t)$$

и применяя формулу № III, находимъ

$$(x + y)^2 - (z - t)^2.$$

Притаятая сюда теорема XX I и II, получимъ

$$(x^2 + 2xy + y^2) = (x^2 + 2xt + t^2),$$

или, раскрывъ скобки:

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2xt + t^2.$$

Примѣръ VI. Составить произведеніе

$$(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c).$$

Первые два множителя можно представить въ видѣ

$$(a + b) + c \text{ и } (a + b) - c;$$

ихъ произведеніе =

$$(a + b)^2 - c^2 \text{ или } a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \dots (1).$$

Третій и четвертый множители пишемъ въ видѣ

$$c + (a - b) \text{ и } c - (a - b);$$

ихъ произведеніе равно

$$c^2 - (a - b)^2 \text{ или } c^2 - a^2 + 2ab - b^2 \dots (2).$$

Представивъ (1) и (2) въ формѣ

$$2ab + (a^2 + b^2 - c^2) \text{ и } 2ab - (a^2 + b^2 - c^2)$$

и перемноживъ эти выраженія, имѣемъ:

$$(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \text{ или } 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Чтобы триномъ $a^2 + b^2 - c^2$ возвысить въ квадратъ, разсмотримъ на-
время $a^2 + b^2$ какъ одинъ членъ; положивъ, что $a^2 + b^2 = s$, имѣемъ:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 = (s - c^2)^2 = s^2 - 2sc^2 + c^4.$$

Подставляя вмѣсто s его величину $a^2 + b^2$, получимъ

$$s^2 - 2s \cdot c^2 + c^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)c^2 + c^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - \\ - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4.$$

Итакъ, искомое произведеніе равно

$$4a^2b^2 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4, \text{ или } 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - \\ - a^4 - b^4 - c^4.$$

Примѣръ VII. Возвысить въ квадратъ многочленъ $1 + x - x^2 + x^3$.

Въ предыдущемъ примѣрѣ намъ пришлось возвышать въ квадратъ триномъ $a^2 + b^2 - c^2$; для этого мы обозначили двучленъ $a^2 + b^2$ одною буквою s , и черезъ это получили возможность примѣнить къ данному случаю формулу квадрата бинома. Вообще указанный приемъ можно съ удобствомъ примѣнять при возвышеніи многочленовъ въ квадратъ и кубъ. Такъ, въ данномъ выраженіи положимъ на время $1 + x - x^2 = s$; данный многочленъ приметъ видъ $s + x^3$; возвышая въ квадратъ, получимъ

$$(s + x^3)^2 = s^2 + 2s \cdot x^3 + x^6 = (1 + x - x^2)^2 + 2(1 + x - x^2)x^3 + x^6.$$

Полагая въ членѣ $(1 + x - x^2)^2$ на время $1 + x = t$, найдемъ:

$$(1 + x - x^2)^2 = (t - x^2)^2 = t^2 - 2tx^2 + x^4 = (1 + x)^2 - 2(1 + x)x^2 + x^4 = 1 + 2x + x^2 - 2x^2 - 2x^3 + x^4. \text{ Слѣд., данное выраженіе равно } 1 + 2x - x^2 - 2x^3 + x^4. \text{ Слѣд., данное выраженіе равно } 1 + 2x - x^2 + 3x^4 - 2x^3 + x^4.$$

ГЛАВА V.

Дѣленіе.

Предвѣщеніе. Правило знаковъ — Правило показателей значеніе символовъ a^2 и a^0 . — Дѣленіе одночленовъ; признаки невозможнаго дѣленія. — Дѣленіе многочлена на одночленъ. — Дѣленіе многочлена на многочленъ. — Признаки невозможнаго дѣленія — многочленовъ. — Дѣленіе многочлена послѣдъ степеней на нѣсколько данныхъ полиномовъ. — Важнѣйшіе случаи дѣленія (теорема Безу).

39. Опредѣленіе. — Раздѣлить одно количество на другое значитъ найти такое третье количество, которое, будучи умножено на второе, дадо бы въ произведеніи первое. — Первое данное количество называется *дѣлимимымъ*, второе — *дѣлителемъ*, а искомое количество — *частнымъ*.

Если дѣлимое есть А, дѣлитель В, а частное Q, то, по опредѣленію дѣленія, связь между этими тремя количествами выразится равенствомъ:

$$Q \times B = A.$$

40. Правило знаковъ. — Основываясь на опредѣленіи дѣленія и на правилѣ знаковъ при умноженіи, легко найти правило знаковъ при дѣленіи.

Пусть требуется $(+a)$ раздѣлить на $(+b)$. По опредѣленію дѣленія, частное, умноженное на дѣлителя, должно давать дѣлимое; но только количество, предшествующее знакомъ $+$, при умноженіи на $(+b)$ можетъ дать $(+a)$. Слѣдов.

$$(+a) : (+b) = +q.$$

При дѣленіи $(-a)$ на $(+b)$, въ частномъ должно быть $(-q)$, потому что только количество, предшествующее знакомъ $-$, при умноженіи на $(+b)$ можетъ дать $(-a)$. Итакъ

$$(-a) : (+b) = -q.$$

Для $(+a) : (-b)$, мы ищемъ количество, которое, будучи умножено на $(-b)$, давало бы $(+a)$; но какъ только количество со знакомъ $-$, при умноженіи на $(-b)$, можетъ дать $(+a)$, то

$$(+a) : (-b) = -q.$$

Наконецъ, припоминая, что при умноженіи $(-)$ на $(+)$ даетъ $(-)$, находимъ:

$$(-a) : (-b) = +q.$$

Итакъ:

$$(+a) : (-b) = -q.$$

$$(-a) : (+b) = -q.$$

$$(+a) : (-b) = -q.$$

$$(-a) : (-b) = +q.$$

Отсюда вытекает *правило*: при *дѣленіи количествъ съ одинаковыми знаками, въ частномъ получается (+), при дѣленіи же количествъ съ разными знаками (—)*.

Правило это совершенно общее: оно относится и къ тому случаю, когда знаки представляютъ абсолютнымъ значеніемъ количества, и къ тому — когда a и b сами суть количества положительные или отрицательныя. Въ самомъ дѣлѣ, выводъ правила основанъ на правилѣ знаковъ при умноженіи, а это послѣднее правило доказано для любыхъ удобн. количествъ.

41 Правило показателей. — Рассмотримъ дѣйствіе степеней одного и того же основанія: пусть требуется раздѣлить a^m на a^n , гдѣ a — какое угодно количество, а m и n — числа цѣлыя и положительные. Замѣтивъ, что въ частномъ должна получиться некоторая степень буквы a , назовемъ неизвѣстную показателя этой степени буквою x , такъ что частное выразится формулою a^x :

$$a^m : a^n = a^x \dots (1).$$

По опредѣленію дѣленія, частное, умноженное на дѣлителя, должно давать дѣлимое, слѣд.

$$a \cdot a^x = a^m;$$

но, по правилу показателей при умноженіи, $a^1 \cdot a^x = a^{x+1}$, слѣд. имѣемъ равенство:

$$a^{x+1} = a^m.$$

По степени одного и того же основанія тогда будутъ равны, когда показатели ихъ равны, а потому должно быть

$$x + 1 = m.$$

Чтобы по извѣстной суммѣ (m) и извѣстному слагаемому (1) найти другое слагаемое (x), нужно изъ суммы вычесть извѣстное слагаемое. Итакъ

$$x = m - 1$$

Подставляя въ равенство (1) вмѣсто x найденную величину, имѣемъ:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \dots (2).$$

Отсюда *правило*: при *дѣленіи степеней одного и того же основанія нужно: основаніе въ частномъ написать то же самое, а изъ показателя дѣляемаго вычесть показатель дѣлителя*.

Исследование. — Формула (2) даетъ мѣсто слѣдующимъ случаямъ:

1) $m > n$; 2) $m = n$; 3) $m < n$.

1-й случай. — Если $m > n$, то разность $m - n$ дастъ положительное (цѣлое) число, и частное a^{m-n} подходит подъ вышеданное опредѣленіе степени какъ произведеніе равныхъ количеству a множителей. Такъ, если $m = 8$, а $n = 5$, то $a^m : a^n = a^{8-5} = a^3$, т.-е. $a \cdot a \cdot a$, и т. д. Этотъ случай не представляетъ, слѣдовательно, ничего особеннаго.

2-й случай. Если $m = n$, то разность $m - n$ равна нулю, и частное принимаетъ видъ a^0 . Выраженіе a^0 само по себѣ не имѣетъ никакого смысла, т.-е. его нельзя разсматривать въ смыслѣ степени, ибо показатель долженъ означать, сколько разъ основаніе берется множителемъ. Значеніе символа a^0 откроется,

если мы обратимъ вниманіе на его происхожденіе. При $m = n$ дѣлیمое a^m и дѣлитель a^n дѣлаются равными, а частное отъ раздѣленія количества самого на себя есть 1; поэтому

$$a^0 = 1,$$

а такъ какъ a означаетъ какое угодно количество, то заключаемъ, что *всякое количество въ нулевой степени есть единицу*.

Такимъ образомъ: $7^0 = 1$; $x^0 = 1$; $(a^2 - b^2)^0 = 1$ и т. п.

Здѣсь самъ собою возникаетъ вопросъ: если мы знаемъ, что $a^m : a^n$ есть не что иное какъ 1, то для чего замѣнять 1 особымъ символомъ a^0 , имѣющимъ только видъ степени, но не имѣющимъ смысла какъ степень? Это дѣлается для того, во-первыхъ, чтобы въ правилѣ показателей не дѣлать исключенія для случая $m = n$, другими словами, — въ видахъ *обобщенія* этого правила; и, во-вторыхъ, чтобы имѣть возможность сохранить въ частномъ букву a , которая иначе не вошла бы въ частное, ибо была бы замѣнена единицею.

3-й случай. — Если $m < n$, то разность $m - n$ отрицательна; напр: если n превышаетъ m на q единицъ, то $m - n = -q$, и частное имѣетъ видъ a^{-q} . Выраженіе a^{-q} опять не имѣетъ значенія степени, ибо a нельзя вять множителемъ отрицательное число разъ. Чтобы выразить значеніе символа a^{-q} , поставимъ частное въ случаѣ $m < n$ выразить въ иной формѣ.

Полагая, что n больше m на q единицъ, т.-е. $n = m + q$, можемъ частное $a^m : a^n$ представить въ видѣ $a^m : a^{m+q}$. Обозначивъ его буквою x , имѣемъ

$$a^m : a^{m+q} = x.$$

По опредѣленію дѣленія, имѣемъ отсюда

$$xa^{m+q} = a^m.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на a^m , находимъ:

$$\frac{xa^{m+q}}{a^m} = \frac{a^m}{a^m}.$$

Замѣтивъ, что частное $\frac{xa^{m+q}}{a^m}$ равно xa^q (ибо, умноживъ его на дѣлителя a^m , приходимъ въ результатѣ дѣлیمое xa^{m+q}), и что $\frac{a^m}{a^m} = 1$, получаемъ равенство

$$x \cdot a^q = 1,$$

откуда

$$x = \frac{1}{a^q}.$$

Но то же самое частное было представлено въ формѣ a^{-q} ; поэтому

$$x^{-q} = \frac{1}{a^q}.$$

Такъ какъ a означаетъ какое угодно количество, то заключаемъ, что *всякое количество съ отрицательнымъ показателемъ равно единицѣ, дѣленной на то же количество съ положительнымъ показателемъ*.

Такимъ образомъ:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}; \quad (a^2 - b^2)^{-3} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^3} \text{ и т. п.}$$

Отрицательные показатели введены для того, чтобы: во-первыхъ, въ правилѣ показателей не дѣлать исключенія для того случая, когда показатель дѣлимаго меньше показателя дѣлителя, т.-е. въ видахъ *обобщенія* этого правила; и, во-вторыхъ, чтобы имѣть возможность дробь (какъ $\frac{1}{a}$) изображать безъ знаменателя, т.-е. въ формѣ пѣлаго алгебраическаго выраженія.

Итакъ, вводя показатели нуль и отрицательныя, мы можемъ всѣ случаи дѣленія степеней одного и того же основанія совершать по одному общему правилу: основаніе писать въ частномъ безъ перемѣны, а надъ нимъ показатели, равнаго разности показателей дѣлимаго и дѣлителя.

Дѣленіе одночленовъ.

42. Пусть требуется разделить $63a^3b^3c^3d^2$ на $9a^2b^2c$. Знакъ частного долженъ быть (—), потому что дѣлимое и дѣлитель имѣютъ разные знаки. По определению дѣленія, въ частномъ долженъ быть такой множитель, который, будучи умноженъ на дѣлитель, дастъ дѣлимое; т.-е. коэффициентъ частного есть такое число, которое, умноженное на 9, давало бы 63; такое число мы найдемъ, раздѣлив 63 на 9, и получимъ 7. Далее, чтобы въ произведеніи имѣть a^3 , надо a^2 умножить на a , т.-е. a войдетъ въ частное съ показателемъ равнымъ 3, а такъ какъ показатели этой буквы въ дѣлительномъ и дѣлителѣ. Такимъ же образомъ получимъ, что буква b войдетъ въ частное — съ показателемъ 3, а буква c — съ показателемъ 4. Наконецъ, чтобы въ произведеніе войти d^2 , необходимо, такъ какъ буквы d нѣтъ въ дѣлителѣ, — чтобы она вошла въ частное съ тѣмъ показателемъ, какой она имѣетъ въ дѣлительномъ. Итакъ

$$63a^3b^3c^3d^2 : 9a^2b^2c = 7a^1b^3c^4d^2$$

Отсюда имѣемъ

Правило Чтобы найти частное отъ раздѣленія одного одночлена на другой, нужно: 1) коэффициентъ дѣлимаго раздѣлить на коэффициентъ дѣлителя, 2) а надъ нимъ написать всѣхъ множителей дѣлимаго — каждому съ показателемъ, равнымъ разности его показателей въ дѣлительномъ и дѣлителѣ.

Въ частномъ случаѣ, если какой-либо множитель находится только въ дѣлительномъ, онъ войдетъ въ частное безъ измѣненія показателя; если же какой-либо множитель имѣетъ въ дѣлительномъ и въ дѣлителѣ одинаково показателя, то въ частное войдетъ съ нулевымъ показателемъ.

Напримѣръ

$$4a^2b^3c^4 : 2ab^2c = 2ab^1c^4.$$

Но, какъ $b^0 = 1$, то можно частное представить въ видѣ $2ac^4$

Прибывая это правило, найдемъ, что:

$$1) 92a^2b^5x^2y^3 : 23a^2b^4x^1y^3 = 4aby^4.$$

$$2) 35a^3b^4c^2(x-y)^4(x-2y)^3 : 7a^2(x-y)^3(x-2y) = 5ab^4c^2(x-y)(x-2y)^2.$$

$$3) -24a^3b^4(a^2-b^2)(x+3y)^3 : 8b^4(x+3y)^2 = 3a^2(a^2-b^2)(x+3y)^1.$$

43. Признаки невозможнаго дѣленія одночленовъ. Дѣленіе пѣлыхъ одночленовъ называется невозможнымъ, если частное можетъ быть выражено цѣлою формулою, т.-е. не содержащую буквѣнныхъ дѣлителей; въ противномъ случаѣ,

— Когда частное получается въ формѣ алгебраической дроби, дѣленіе считаемъ невозможнымъ.

Изъ самаго опредѣленія невозможнаго въ алгебраическомъ смыслѣ дѣленія слѣдуетъ, что если не дѣлятся другъ на друга только численные коэффициенты, то дѣленіе слѣдуетъ считать алгебраически возможнымъ. Напр. дѣля $4a^3b^2c$ на $3a^2b$, получимъ въ частномъ $\frac{4}{3}abc$ — выраженіе алгебраически цѣлое, такъ какъ оно не содержитъ буквенныхъ дѣлителей.

Дѣленіе одночленомъ невозможно въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ:

1) Когда показатель хотя одной буквы дѣлителя больше показателя той же буквы въ дѣлямомъ. Такъ дѣленіе $6a^3b^2$ на $2ab^4$ невозможно, потому что на какой бы членъ одичленъ ни умножили дѣлителя, всегда въ произведеніи буква b войдетъ съ показателемъ, большимъ 2: частное не можетъ быть, поэтому, выражено цѣлымъ одночленомъ.

Въ такомъ случаѣ дѣленіе только обозначается, и получается дробь

$$\frac{6a^3b^2}{2ab^4};$$

послѣдняя, какъ будетъ показано далѣе, можетъ быть упрощена сокращеніемъ.

2) Когда дѣлитель содержитъ такую букву, которой нѣтъ въ дѣлямомъ; напр. $4a^3b$ не дѣлится на $3a^2bd^2$. Въ самомъ дѣлѣ, на какой бы членъ одичленъ мы ни умножили дѣлителя, въ произведеніи неизмѣнно войдетъ буква d , которой нѣтъ въ дѣлямомъ, а слѣд. частное не можетъ быть представлено цѣлымъ одночленомъ.

Обозначая дѣленіе, получимъ дробь

$$\frac{4a^3b}{3a^2bd^2}$$

которая также подлежитъ сокращенію.

Дѣленіе многочлена на одночленъ.

44. Пусть требуется раздѣлить многочленъ $a - b + c - d$ на одночленъ m . Частное не можетъ быть одночленомъ, потому что умножить одночленъ на одночленъ (m), въ произведеніи найдемъ одночленъ, между тѣмъ какъ должны получить многочленъ $a - b + c - d$. Итакъ, частное должно быть — многочленъ, для нахождения котораго имѣемъ слѣдующее

Правило. — Чтобы найти частное отъ раздѣленія многочлена на одночленъ, нужно каждый членъ дѣлямаго раздѣлить на дѣлителя, соблюдая правила знаковъ.

Это правило доказывается а posteriori. Мы говоримъ, что

$$\frac{a - b + c - d}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m}.$$

Для доказательства умножаемъ частное на дѣлителя; по правилу умноженія многочлена на одночленъ находимъ:

$$\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m} \right) \cdot m = \frac{a}{m} \cdot m - \frac{b}{m} \cdot m + \frac{c}{m} \cdot m - \frac{d}{m} \cdot m.$$

Но частное $\frac{a}{m}$, умноженное на дѣлителя m , даетъ дѣлимое, слѣд. $\frac{a}{m} \cdot m = a$;
точно такъ же: $\frac{b}{m} \cdot m = b$; $\frac{c}{m} \cdot m = c$; и $\frac{d}{m} \cdot m = d$. Такимъ образомъ

$$\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m} \right) \cdot m = a - b + c - d.$$

т.-е. частное, умноженное на дѣлителя, воспроизвело дѣлимое, слѣд. это частное составлено вѣрно, и правило доказано.

Примѣры:

- 1) $(8a^4b^3 - 3a^3b^3 + 12a^2b^4) : 4a^2b^2 = 2a^2 - \frac{3}{4}ab + 3b^2.$
- 2) $\{28a^3b^3(x-y)^3 + 12a^3b^2(x^2-y^2)(x-y) - 5ab^2(x+y)(x^2-y^2)^2\} : 4ab^2(x-y) - 7ab(x-y)^2 - 3a^2(x-y)^2 - 2(x+y)^2(x-y).$

Дѣленіе многочлена на многочленъ.

45. Частное отъ раздѣленія нѣкотораго многочлена А на многочленъ В есть выраженіе алгебраически дробное, вида

$$\frac{A}{B}.$$

Въ большинствѣ случаевъ такое выраженіе нельзя замѣнить другимъ — простѣйшимъ. Но когда цѣлые многочлены А и В содержатъ одну и ту же букву, то возможенъ такой третій многочленъ С, *цѣлый* относительно той же буквы, который, будучи умноженъ на дѣлителя, даетъ дѣлимое. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что дѣленіе полинома А на В *возможно*.

Укажемъ, какъ въ этомъ исключительномъ случаѣ находить частное.

Допуская, что многочленъ

$$8x^5 + 10x^4 - 31x^3 + 22x^2 - 29x + 12$$

дѣлится на многочленъ

$$4x^2 - 5x + 3x - 4,$$

постараемся опредѣлить члены частнаго.

Написавъ дѣлителя справа отъ дѣимаго, отдѣляютъ ихъ вертикальною чертою; затѣмъ, дѣлителя отдѣляютъ горизонтальною чертою отъ частнаго, котораго члены, по мѣрѣ ихъ нахожденія, и пишутъ подъ этою чертою.

$$\begin{array}{r} \text{Дѣлимое} \dots 8x^5 + 10x^4 - 31x^3 + 22x^2 - 29x + 12 \quad 4x^2 - 5x + 3x - 4 \dots \text{дѣлитель} \\ \underline{- 8x^5 + 10x^4 - 6x^3 + 8x^2} \qquad \qquad \qquad 2x^2 + 5x - 3 \dots \text{частное} \\ \text{1-й остатокъ} \dots 20x^4 - 37x^3 + 30x^2 - 29x + 12 \\ \underline{- 20x^4 + 25x^3 - 15x^2 + 20x} \\ \text{2-й остатокъ} \dots - 12x^3 + 15x^2 - 9x + 12 \\ \underline{\pm 12x^3 - 15x^2 \pm 9x - 12} \\ 0 \end{array}$$

По опредѣленію, дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на частное.

Но по свойству произведенія двухъ многочленовъ (§ 35), высшій членъ про-

не проходит, безъ приведенія, отъ умноженія высшихъ членовъ со-
бранаго, т.-е. въ нашемъ случаѣ отъ умноженія высшаго члена дѣлителя на
каждый членъ частнаго. Поэтому, назвавъ высшій членъ частнаго буквою q , имѣ-
емъ: $8x^5 = 4x^3 \times q$, откуда, замѣчая, что неизвѣстный сомножитель (q) опре-
дѣленъ дѣленіемъ произведенія ($8x^5$) на извѣстнаго сомножителя ($4x^3$), на-
ходимъ:

$$q = 8x^5 : 4x^3 = 2x^2.$$

Итакъ, чтобы найти высшій членъ частнаго, нужно высшій членъ дѣлителя
раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.

Для нахождения слѣдующаго члена частнаго руководствуемся такими сооб-
раженіями. Дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго; а по-
тому если изъ дѣлимаго вычтемъ произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго,
то остатокъ будетъ представлять произведеніе дѣлителя на сумму остальныхъ
членовъ частнаго. Умноживъ дѣлителя на высшій членъ частнаго и вычтя про-
изведеніе $8x^5 - 10x^4 + 6x^3 - 8x^2$ изъ дѣлимаго, получимъ остатокъ, равный
 $20x^4 - 37x^3 + 30x^2 - 29x + 12$. Такъ какъ этотъ остатокъ есть произведеніе
дѣлителя на всѣ члены частнаго, начиная со второго, то его высшій членъ
($20x^4$) произойдетъ безъ приведенія отъ умноженія высшаго члена дѣлителя
($4x^3$) на высшій изъ найденныхъ членовъ частнаго. Называя послѣдній бук-
вою q' , имѣемъ такимъ образомъ: $20x^4 = 4x^3 \cdot q'$, откуда

$$q' = 20x^4 : 4x^3 = +5x.$$

Итакъ, для нахождения второго члена частнаго нужно высшій членъ первого
остатка раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.

Замѣчая, что первый остатокъ есть произведеніе дѣлителя на всѣ члены част-
наго, начиная со второго, заключаемъ, что если вычтемъ изъ этого остатка
произведеніе дѣлителя на второй членъ частнаго, то новый (второй) остатокъ
будетъ представлять произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго, начиная
съ третьяго. Умноживъ въ самомъ дѣлѣ дѣлителя на второй членъ частнаго и
вычтя произведеніе изъ первого остатка, находимъ второй остатокъ: $-12x^3 +$
 $+15x^2 - 9x + 12$. По свойству произведенія, высшій членъ этого остатка
произойдетъ безъ приведенія отъ умноженія высшаго члена дѣлителя на высшій
изъ найденныхъ членовъ частнаго. Слѣдоват., если назовемъ послѣдній буквою
 q'' , то найдемъ равенство: $-12x^3 = 4x^3 \cdot q''$, откуда $q'' = -12x^3 : 4x^3$

$= -3$. Отсюда заключаемъ, что для нахождения третьяго члена частнаго надо
высшій членъ второго остатка раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.

Такими же разуженіями какъ и прежде убѣждаемся, что для нахождения
четвертаго члена частнаго, въ предположеніи что онъ существуетъ, надо дѣли-
теля умножить на третій членъ частнаго и произведеніе вычтемъ изъ второго
остатка. Слѣдуя это, находимъ въ новомъ остаткѣ 0. Это значитъ, что дѣле-
ніе окончено, и послѣдній членъ частнаго равенъ -3 . Все же частное равно
 $2x^2 + 5x - 3$.

Что частное найдено вѣрно, въ этомъ убѣждаемся, помноживъ дѣлителя
на частное: въ произведеніи получается дѣлимое.

Припоминая ходъ дѣйствія, заключаемъ, что для отысканія послѣдователь-
ныхъ членовъ частнаго намъ приходилось дѣлить высшіе члены дѣлимаго на
каждаго остатка на высшій членъ дѣлителя. Чтобы помѣть эти высшіе члены
всегда на первомъ мѣстѣ, а также для удобства приведенія, до начала дѣйствія
располагаютъ дѣлимое и дѣлителя по нисходящимъ степенямъ главной буквы.

Сообразая все сказанное, приходимъ къ слѣдующему правилу дѣленія многочлена на многочленъ:

Правило. Когда частное отъ раздѣленія двухъ цѣлыхъ полиномовъ можно представить въ формѣ цѣлаго полинома, члены частного найдутся слѣдующимъ образомъ:

Располагаемъ делимое и дѣлителя по нисходящимъ степенямъ главной буквы.

Первый членъ делимаго делимъ на первый членъ дѣлителя: получаемъ первый членъ частного.

Вычитаемъ изъ делимаго произведе дѣлителя на первый членъ частного и получаемъ первый остатокъ.

Первый членъ того остатка делимъ на первый членъ дѣлителя: находимъ второй членъ частного.

Вычитаемъ изъ перваго остатка произведе дѣлителя на второй членъ частного и получаемъ второй остатокъ.

Делимъ первый членъ того остатка на первый членъ дѣлителя: находимъ третій членъ частного и т. д., продолжая въ тѣхъ порядкѣ, пока въ остаткѣ получится ноль.

Вотъ еще примѣръ:

$$\begin{array}{r}
 12a^7 - 35a^6b + 24a^5b^2 - 7a^4b^3 + 2a^3b^4 + 17a^2b^5 - 31ab^6 + 36b^7 \quad | \quad 4a^3 - 5a^2b - 7ab^2 + 8b^3 - 9b^4 \\
 - 12a^7 + 11a^6b - 21a^5b^2 + 24a^4b^3 - 27a^3b^4 \\
 \hline
 20a^6b - 3a^5b^2 + 54a^4b^3 + 29a^3b^4 - 17a^2b^5 + 31ab^6 + 36b^7 \\
 \pm 20a^6b + 24a^5b^2 - 35a^4b^3 - 40a^3b^4 + 45a^2b^5 \\
 \hline
 28a^4b^2 + 19a^4b^3 + 69a^3b^4 - 28a^2b^5 + 31ab^6 + 36b^7 \\
 - 28a^4b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 51a^2b^5 - 63ab^6 \\
 \hline
 - 16a^3b^3 + 20a^3b^4 - 28a^2b^5 - 32ab^6 + 36b^7 \\
 \pm 16a^3b^3 - 20a^3b^4 + 28a^2b^5 - 32ab^6 + 36b^7 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

(Нисходящие знаки вычитаемыхъ членовъ поставлены сверху).

46 Такъ какъ нисшій членъ дѣлимаго есть также членъ неприводимый и происходитъ отъ умноженія нисшнихъ членовъ дѣлителя и частного, то можно начать дѣленіе съ опредѣленія низшаго члена частного, который мы найдемъ, раздѣливъ нисшій членъ дѣлимаго на нисшій членъ дѣлителя.

Такимъ, для нисшнихъ членовъ перваго остатка на нисшій членъ дѣлителя, найдемъ нисшій изъ нисшнихъ еще членовъ частного и т. д. Однимъ словомъ, дѣленіе многочленовъ можетъ быть выполнено въ порядкѣ, обратномъ вышеизложенному, т. е. начиная съ низшаго и восходя последовательно до высшаго члена частного.

Приводимъ примѣръ такого расположенія дѣлителя:

$$\begin{array}{r}
 6 - 15x + 13x^2 + 54x^3 - 67x^4 + 38x^5 - 9x^6 - 56x^7 \quad | \quad 3 - 4x^2 - 5x^3 - 7x^4 \\
 - 6 \quad \quad \quad + 8x^2 \mp 10x^3 + 14x^4 \quad \quad \quad 2 \quad 5x^2 - 7x^3 - 7x^4 \\
 \hline
 - 15x + 21x^2 + 44x^3 - 53x^4 + 38x^5 - 9x^6 - 56x^7 \\
 \pm 15x \quad \quad \quad \mp 20x^3 \pm 25x^4 \mp 35x^5 \\
 \hline
 21x^2 + 24x^3 - 28x^4 + 3x^5 \quad 9x^6 - 56x^7 \\
 - 21x^2 \quad \quad \quad \pm 28x^4 \mp 35x^5 \pm 49x^6 \\
 \hline
 24x^3 \quad \quad \quad - 32x^5 + 40x^6 - 56x^7 \\
 - 24x^3 \quad \quad \quad \pm 32x^5 \mp 40x^6 \pm 56x^7 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

47. Когда дѣлимое есть многочленъ неполный, т.-е. содержитъ не всѣ степени главной буквы, то сохраняютъ мѣста недостающихъ членовъ, чтобы можно было писать подобные члены одинъ подъ другимъ.

Примѣръ. Раздѣлить $14x^6 + 54x^5 - 39x^4 - 7x + 2$ на $2x^3 + 8x^2 - 5x^2 - 3x + 1$.

Въ дѣльномъ недостаетъ членовъ, содержащихъ x^3 и x^2 ; сохраняя мѣста, на которыхъ должны бы были находиться эти члены, расписываемъ дѣйствіе такъ.

$$\begin{array}{r}
 14x^6 + 54x^5 - 39x^4 - 7x + 2 \quad 2x^3 + 8x^2 - 5x^2 - 3x + 1 \\
 - 14x^6 + 56x^5 - 35x^4 + 21x^3 - 7x^2 \\
 \hline
 - 2x^5 - 4x^4 + 21x^3 - 7x^2 - 7x + 2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2x^5 - 8x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 4x^4 + 16x^3 - 10x^2 - 6x + 2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad - 4x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 6x + 2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Признаки невозможнаго дѣленія многочленовъ.

48. Если дѣленіе одного цѣлаго многочлена на другой можетъ быть выполнено, то частное относительно входящихъ въ него буквъ должно быть цѣлымъ, т.-е. не можетъ содержать ни какихъ дробей, ни же частное нельзя представить въ видѣ дроби, числитель которой не дѣлится на знаменатель.

Если же частное не цѣлое, то дѣленіе невозможно, или нѣтъ въ дѣломъ дѣлителя, или нѣтъ въ частномъ дѣлителя, или нѣтъ въ дѣломъ дѣлителя, или нѣтъ въ частномъ дѣлителя, или нѣтъ въ дѣломъ дѣлителя, или нѣтъ въ частномъ дѣлителя.

I. Если дѣлитель содержитъ букву, которой нѣтъ въ дѣломъ, то на какой бы цѣлый многочленъ ни умножили дѣлителя, эта буква останется въ произведеніи, которое потому никогда не будетъ равняться дѣломъ. Значитъ, въ этомъ случаѣ частное не можетъ быть представлено въ формѣ цѣлаго члена, и дѣленіе невозможно. Непрямѣрь.

$$8a^2 + 5ab - b^2$$

не можетъ раздѣлиться нацѣло на $4a - bc$, такъ какъ дѣлитель содержитъ букву c , которой нѣтъ въ дѣломъ. Частное изображаютъ въ видѣ дроби, означающа дѣленіе горизонтальною чертою:

$$\frac{8a^2 + 5ab - b^2}{4a + bc}$$

II. Когда дѣлимое есть одночленъ, а дѣлитель — многочленъ, то частное не можетъ быть выражено ни цѣлымъ одночленомъ, ни цѣлымъ многочленомъ. Одночленомъ оно не можетъ быть выражено потому, что произведеніе многочленаго дѣлителя на одночленное частное даю бы многочленъ, между тѣмъ какъ дѣлимое одночленъ. Многочленомъ оно не можетъ быть выражено потому, что произведеніе многочлена дѣлителя на многочленъ частное содержитъ по меньшей мѣрѣ два неприводимыхъ члена, между тѣмъ какъ дѣлимое одночленъ.

Такъ, дѣленіе a^2 на $a + b$ невозможно, и частное имѣетъ видъ дроби

$$\frac{a^2}{a + b}$$

III. Если возможенъ цѣлый полиномъ (частное), который, будучи умноженъ на дѣлителя, давалъ бы дѣлимое, то высшій членъ дѣлимаго долженъ быть произведеніемъ высшихъ членовъ дѣлителя и частнаго, а низшій членъ дѣлимаго — произведеніемъ ихъ низшихъ членовъ. Поэтому, высшій членъ частнаго долженъ равняться частному отъ раздѣленія высшаго на высшій, а низшій членъ частнаго — частному отъ раздѣленія низшаго на низшій членовъ дѣлимаго и дѣлителя. Отсюда прямо слѣдуетъ, что если не дѣлится нѣтъ высшій членъ дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя, или низшій на низшій, то дѣленіе невозможно.

Такъ, многочленъ

$$8x^7 - 6x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 7x^2$$

не дѣлится на

$$5x^3 - 2x^2 + x^0.$$

потому что низшій членъ $7x^2$ дѣлимаго не дѣлится на высшій членъ x^3 дѣлителя.

Точно такъ же многочленъ

$$3x^2 - x + 1$$

не дѣлится на

$$x^4 + x^2 + 1.$$

такъ какъ высшій членъ дѣлимаго ($3x^2$) не дѣлится на высшій членъ (x^4) дѣлителя.

IV. Но если высшій членъ дѣлимаго дѣлится на высшій членъ дѣлителя и низшій на низшій, то изъ этого еще никакъ не слѣдуетъ заключать, что дѣленіе возможно. Совершая въ этомъ случаѣ дѣленіе и продолжая его достаточно далеко, всегда можно открыть — возможно оно или нѣтъ.

При этомъ слѣдуетъ различать два случая:

1. Дѣлимое и дѣлитель расположены по нисходящимъ степенямъ главной буквы.

Въ этомъ случаѣ степень высшихъ членовъ послѣдовательныхъ остатковъ идетъ понижаясь. Для возможности дѣленія необходимо, чтобы высшій членъ каждаго остатка дѣлился на высшій членъ дѣлителя; поэтому, если дойдемъ до остатка, въ которомъ высшій членъ содержитъ главную букву въ меньшей степени чѣмъ высшій членъ дѣлителя, и слѣдовательно не дѣлится на высшій членъ дѣлителя, то заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Такъ, пусть требуется раздѣлить

$$2x^4 + x^3 - x^2 + 7x + 4$$

на

$$x^2 - x + 1.$$

Высшій членъ дѣлимаго дѣлится на высшій членъ дѣлителя и низшій на низшій. Попробуемъ, не совершается ли дѣленіе на-цѣло:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + x^3 - x^2 + 7x + 4 \quad x^2 - x + 1 \\ - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 \quad 2x^2 + 3x \\ \hline 3x^3 - 3x^2 + 7x + 4 \\ - 3x^3 + 3x^2 - 3x \quad \\ \hline 4x + 4 \end{array}$$

Высший членъ второго остатка не дѣлится на высшій членъ дѣлителя: заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Иногда, прежде чѣмъ дойдемъ до такого остатка, можно ранѣе убѣдиться, возможно дѣленіе или нѣтъ. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что дѣленіе возможно, можно впередъ опредѣлить каковъ долженъ быть низшій членъ частнаго. Именно, если дѣленіе возможно, то дѣлимое будетъ произведеніемъ дѣлителя на частное, а потому низшій членъ дѣлимаго долженъ быть произведеніемъ низшихъ членовъ дѣлителя и частнаго; слѣдовательно, раздѣливъ низшій членъ дѣлимаго на низшій членъ дѣлителя, мы узнаемъ, каковъ долженъ быть низшій членъ частнаго. Совершая дѣленіе, пусть мы дошли въ частномъ до члена той степени, какую мы ранѣе нашли для послѣдняго члена частнаго; для того чтобы дѣленіе было возможно, необходимо: 1) чтобы членъ, найденный нами въ частномъ, былъ равенъ частному отъ раздѣленія послѣдняго члена дѣлимаго на послѣдній членъ дѣлителя; 2) чтобы слѣдующій остатокъ былъ равенъ нулю. Если хотя одно изъ этихъ условій не осуществляется, заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Приводимъ примѣры.

Раздѣлить $x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 2x^4$ на $x^2 - 5x + 1$.

Высшій членъ дѣлимаго дѣлится на высшій членъ дѣлителя и низшій на низшій; при этомъ, если дѣленіе возможно, то послѣднимъ членомъ частнаго долженъ быть: $+2x^4 : +1 = +2x^4$.

Совершаемъ на самомъ дѣлѣ дѣленіе:

$$\begin{array}{r|l} x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 2x^4 & x^5 - 5x^4 + 1 \\ -x^7 + 5x^6 - x^5 & \\ \hline 2x^6 - 5x^5 + 2x^4 & \\ -2x^6 + 10x^5 - 2x^4 & \\ \hline 5x^5 & \end{array}$$

Раздѣливъ $5x^5$ на x^2 — второго остатка на высшій членъ дѣлителя, находимъ $+2x^3$. Если бы такая членъ, каковъ долженъ быть послѣдній членъ частнаго, а такъ слѣдующій остатокъ не равенъ нулю, то заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Другой примѣръ: раздѣлить

$$x^6 - 10x^5 - 32x^4 - 3x^3 + 54x^2 - 20x \text{ на } 4x^3 + 5x^2 - 2x.$$

Первый членъ дѣлимаго дѣлится на первый членъ дѣлителя, и послѣдній на послѣдній; притомъ, частное отъ этого послѣдняго дѣленія есть $-20x : -2x$ или $+10$. Членъ $+10$ долженъ быть послѣднимъ въ частномъ, если дѣленіе совершается нацѣло.

Выполняемъ дѣйствіе:

$$\begin{array}{r|l} x^6 - 10x^5 - 32x^4 - 3x^3 + 54x^2 - 20x & 4x^3 + 5x^2 - 2x \\ -8x^6 + 10x^5 + 4x^4 & \\ \hline -28x^4 - 3x^3 + 54x^2 - 20x & \\ +28x^4 + 35x^3 + 14x^2 & \\ \hline 32x^3 + 40x^2 - 20x & \\ -32x^3 + 40x^2 + 16x & \\ \hline -4x & \end{array}$$

Член частнаго, недержащій буквы x , оказывается равнымъ $+8$, а не $+10$, какъ должно бы быть при возможномъ дѣленіи; заключаемъ, что дѣленіе невозможно. Вычтя изъ втораго остатка произведение $(4x^3 - 5x^2 - 2x)$, 8, приходимъ послѣдній остатокъ: $-4x$.

2. Дѣлимое и дѣлитель расположены по возрастающимъ степенямъ главной буквы.

Въ этомъ случаѣ степень низшаго члена дѣлительныхъ остатковъ идетъ постепенно увеличиваясь, а потому юншіе члены остатковъ всегда будутъ дѣлиться на низшіи члены дѣлителя. Невозможность дѣленія отыскиваемъ слѣдующимъ образомъ. Раздѣливъ высшій членъ дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя, мы увидимъ, каковъ долженъ быть высшій членъ частнаго, въ предположеніи, что дѣленіе возможно. Если, тогда въ частномъ нѣтъ члена, содержащаго главную букву въ степени, равной степени высшаго члена дѣлителя (или въ послѣднемъ членѣ дѣлимаго нѣтъ онъ показываетъ, что дѣленіе невозможно), то дѣленіе невозможно. Если же найдемъ членъ дѣлителя, на который членъ дѣлимаго не дѣлится, то дѣленіе невозможно. Если же найдемъ членъ дѣлителя, на который членъ дѣлимаго дѣлится, то дѣленіе возможно.

Пусть, наприм., требуется раздѣлить

$$4 - 3x + 5x^2 + x^3 - 19x^4 \text{ на } 1 - 2x - x^2.$$

Здѣсь первый членъ дѣлимаго дѣлится на первый членъ дѣлителя и послѣдній членъ дѣлимаго на послѣдній дѣлителя.

Если дѣленіе возможно, послѣднимъ членомъ частнаго долженъ быть

$$(-19x^4) : (-x^2) = +19x^2,$$

$$\begin{array}{r|l} 4 - 3x + 5x^2 + x^3 - 19x^4 & 1 - 2x - x^2 \\ - 4 + 8x - 4x^2 & 4 + 5x + 19x^2 \\ \hline 5x + 9x^2 + x^3 - 19x^4 & \\ - 5x + 10x^2 + 5x^3 & \\ \hline 19x^2 + 6x^3 - 19x^4 & \\ - 19x^2 + 38x^3 - 19x^4 & \\ \hline 44x^3 & \end{array}$$

Третій членъ частнаго действительно $+19x^2$, но нѣтъ остатокъ не есть ноль; заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Еще примѣръ: раздѣлить

$$-2 + x - 5x^3 + 4x^4 \text{ на } -1 - 2x + x^2.$$

Если дѣленіе возможно, послѣднимъ членомъ частнаго долженъ быть $+4x^2$.

$$\begin{array}{r|l} -2 + x - 5x^3 + 4x^4 & -1 - 2x + x^2 \\ + 2 + 4x - 2x^2 & 2 - 5x + 12x^2 \\ \hline 5x - 2x^2 - 5x^3 + 4x^4 & \\ 5x + 10x^2 - 5x^3 & \\ \hline -12x^2 + 4x^4 & \\ + 12x^2 + 24x^3 + 12x^4 & \\ \hline 24x^3 - 8x^4 & \end{array}$$

... $\div 4x^2$ находимъ въ частномъ $12x^2$; кроме того, соответствующее слагаемое должно бы быть нулемъ, а оно равно $24x^2 - 8x^4$. Значитъ, невозможно.

Въ случаѣ дѣленія цѣлыхъ полиномовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы (при соблюденіи условія дѣлимости крайнихъ дѣлимаго на крайне ділителя), заключается въ возможность дѣленія въ частномъ неограниченнаго числа цѣлыхъ членовъ. Обусловлено это тѣмъ, что степени низшихъ членовъ остатковъ идутъ, постоянно убывая. Такъ, въ послѣднемъ примѣрѣ, продолжая дѣленіе, получили бы четвертый членъ — $24x^0$ и т. д.

49 Когда частное отъ раздѣленія цѣлыхъ относительно x полиномовъ одного другого не можетъ быть въ точности выражено цѣлымъ полиномомъ съ конечнымъ числомъ членовъ, то оно можетъ быть представлено въ видѣ суммы, состоящей изъ некотораго цѣлаго относительно x полинома (когда таковой существуетъ, и не сводится къ нулю), и дроби, имѣющей числителемъ одинъ изъ остатковъ, и знаменателемъ — ділителя.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A и B будутъ два цѣлые по буквѣ x полиномы, расположенные или по восходящимъ, или по нисходящимъ степенямъ буквы x , — въ послѣднемъ случаѣ пусть степень A не ниже степени B , — и положимъ, что въ частномъ получился цѣлый по буквѣ x многочленъ Q , а въ остаткѣ R . Замѣчая, что остатокъ R происходитъ послѣ вычитанія изъ A произведенія BQ , находимъ:

$$R = A - BQ.$$

или, выражая уменьшаемое посредствомъ вычитаемого и остатка, находимъ

$$A = BQ + R \dots (1),$$

отсюда, раздѣливъ обѣ части на B , имѣемъ

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \dots (2).$$

Различаемъ теперь два случая: 1) A и B расположены по восходящимъ степенямъ буквы x ; 2) A и B расположены по нисходящимъ степенямъ x -а.

Въ первомъ случаѣ преобразование, указанное равенствомъ (2), возможно выполнить безчисленнымъ множествомъ способовъ. Въ самомъ дѣлѣ, число цѣлыхъ по буквѣ x остатковъ въ этомъ случаѣ неограничено, и мы можемъ остановиться на какомъ угодно изъ нихъ. Такъ, для 1 на 1 — x , и останавливаясь послѣдовательно на 2-мъ, на 3-мъ, на 4-мъ и т. д. остаткахъ, найдемъ преобразования:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}; \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}; \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x} \text{ и т. д.}$$

Пусть теперь полиномы A и B расположены по нисходящимъ степенямъ буквы x , и пусть степень A не ниже степени B ; то число преобразований, выражаемыхъ равенствомъ (2), будетъ ограниченное. Степени послѣдовательныхъ остатковъ въ этомъ случаѣ идутъ, все понижаясь, и обязательно останавливаются на томъ остаткѣ, котораго степень по крайней мѣрѣ на 1-цу ниже степени ділителя. Пусть R и будетъ такой плавный остатокъ, а Q — цѣлая часть частного, при этомъ ограниченномъ преобразованіи, указанное равенствомъ (2).

возможно исполнить только одним единственным способом; т.-е. при ограничении, что степень R ниже степени B , существует только одна пара целых полиномов Q и R , дающих равенство (2), или, что то же (1). Чтобы доказать это, допустить, что существует другая пара целых по буквам полиномов, Q' и R' , где степень R' ниже степени B , таких, что

$$A = BQ' + R'$$

если это так, то полиномы $BQ + R$ и $BQ' + R'$, как равные одному и тому же полиному A , должны быть совершенно одинаковы, или как говорить, тождественны:

$$BQ + R = BQ' + R',$$

т.-е. что, по вычитании указанных друг от друга, с той же целью знака $-$ должны получиться совершенно одинаковые и тем самым, вычитая с той же целью, равных, разность $R - R' + BQ - BQ'$, найдем $BQ - BQ' - R + R' = 0$ или $B(Q - Q') - (R - R') = 0$. Но так как разность $B(Q - Q')$ делится на B , когда $Q - Q'$ и вместе с тем $R - R'$, и в последнем случае, $Q - Q'$, будучи целым по буквам x и y , или, в другом случае, будучи невозможным от деления на B , по буквам x и y не может делиться на B и тем самым, или, по меньшей мере, равной степени полинома B , между тем как R и R' , будучи по степени x -а ниже B , дадут по равенству полиномов необходимой нижней степени, чем степень B , и таким образом полиномы $B(Q - Q')$ и $R - R'$ были бы неодинаковой степени и, следовательно, не могли бы быть тождественны между собою.

Итак, необходимо должно быть Q' тождественно с Q и R' тождественно с R ; и потому при указанных условиях преобразование, представляемое равенством (1), а следовательно и (2), возможно исполнить только одним способом.

Так, если $A = 6x^4 - 5x^3 - 16x^2 - 25x - 4$, $B = 3x^2 - 2x + 1$, то полное частное от разделения A на B будет

$$2x^2 + 3x - 4 \text{ с остатком } \frac{14x + 8}{3x^2 - 2x + 1}.$$

и, по доказанному, выразить полное частное в такой форме (т.-е. в форме целого полинома + дроби) возможно только одним этим способом, если желаем, чтобы степень остатка была ниже степени делителя.

Таким же образом найдем:

$$\frac{x^3 - 7x - 4}{x + 3} = x^2 - 3x - 2 + \frac{2}{x + 3};$$

в иной форме преобразование не может быть выполнено, если хотим, чтобы степень остатка была ниже степени делителя.

50. Разделить полином A последовательно на полиномы B, C, D, \dots , значить разделить A на B , потом частное на C , затем частное этого частного деления на D и т. д.

ТЕОРЕМА. Если полином A разделить последовательно на полиномы B, C, D, \dots (не necessarily различные между собою), то последнее полученное частное есть вместе с тем частное от разделения A на произведение B, C, D, \dots .

Расположивъ дѣлимое и дѣлителя по убывающимъ степенямъ буквы x , дѣлимъ первый членъ дѣлящаго на первый членъ дѣлителя и находимъ первый членъ частнаго, въ которомъ показатель буквы x , какъ равный разности показателей той же буквы въ дѣлящемъ и въ дѣлителѣ, будетъ $m - 1$. Первый членъ частнаго есть x^{m-1} . Умноживъ его на дѣлителя и вычтя произведение изъ дѣлящаго, получаемъ первый остатокъ: $ax^{m-1} - a^m$. Раздѣливъ ax^{m-1} на x , находимъ второй членъ частнаго: ax^{m-2} . Умноживъ его на дѣлителя и вычтя произведение изъ перваго остатка, получимъ второй остатокъ: $a^2x^{m-2} - a^m$. Подобнымъ же образомъ найдемъ, что третій членъ частнаго $= a^2x^{m-3}$, а третій остатокъ $a^3x^{m-3} - a^m$.

Не продолжая дѣйствій, рассмотримъ законъ составленія послѣдовательныхъ остатковъ. Сравнивая ихъ между собою, замѣчаемъ, что всѣ остатки — двучлены, которыхъ вторые члены одинаковы и равны $-a^m$. Первые же члены представляютъ произведения степеней буквы a в x , причемъ показатели буквы a идутъ послѣдовательно увеличиваясь на 1, а показатели буквы x уменьшаются на 1, суммы же обоихъ показателей всегда равны m . Изъ этого слѣдуетъ, что, продолжая дѣленіе, мы непремѣнно дойдемъ до такого остатка, первый членъ котораго будетъ имѣть букву a съ показателемъ $m - 1$, а слѣдовательно букву x съ показателемъ 1, такъ какъ сумма показателей должна равняться m . Этотъ остатокъ будетъ слѣдовательно, $a^{m-1}x - a^m$. Для перваго его члена на x , найдемъ въ частномъ членъ a^{m-1} ; а умноживъ этотъ членомъ дѣлителя и вычтя произведение изъ остатка, находимъ, что слѣдующій остатокъ есть 0: значить, $x^m - a^m$ дѣлится безъ остатка на $x - a$.

Мы не могли выполнить всѣхъ частныхъ дѣленій вследствие неопредѣленности числа m ; мѣста, гдѣ надо подразумѣвать промежуточные остатки и члены частнаго, обозначены точками.

Законъ частнаго. — Всмотрѣваясь въ составъ частнаго, замѣчаемъ, что оно имѣетъ слѣдующія свойства:

1. Всѣмъ его членамъ предшествуетъ знакъ $(+)$, потому что они происходятъ отъ дѣленія первыхъ членовъ остатковъ, предшествуемыхъ знакомъ $(+)$, на первый членъ дѣлителя, имѣющій тотъ же знакъ.

2. Первый членъ частнаго есть x^{m-1} , послѣдній a^{m-1} ; что же касается промежуточныхъ членовъ, то они представляютъ произведения степеней обеихъ буквъ x и a , причемъ показатели буквы x идутъ послѣдовательно уменьшаясь на 1, а показатели буквы a послѣдовательно увеличиваясь на 1; такъ что сумма показателей въ каждомъ членѣ равна $m - 1$. Если въ первомъ членѣ подразумѣвать множитель a^0 , а въ послѣднемъ x^0 , то можно сказать, что члены частнаго расположены по убывающимъ степенямъ буквы x , которой показатели идутъ, уменьшаясь на 1, начиная съ $m - 1$ и кончая нулемъ; и по возрастающимъ степенямъ буквы a , которой показатели идутъ, увеличиваясь на 1, начиная съ 0 и кончая $m - 1$.

3. Число членовъ частнаго равно m , т. е. степени дѣлящаго.

Въ самомъ дѣлѣ, показатели буквы a , наприм., идутъ послѣдовательно увеличиваясь на 1, начиная съ 0 и кончая $m - 1$; по послѣдовательныхъ членыхъ чиселъ отъ 0 до $m - 1$ включительно ровно m . Столько же членовъ и въ частномъ.

При помощи выведенной нами формулы

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} + \dots + a^{m-2}x + a^{m-1} \dots (A)$$

можно прямо писать частное отъ раздѣленія разности одинаковыхъ степеней двухъ количествъ на разность оснований. Вотъ примѣры:

$$1. \frac{x^5 - a^5}{x - a} = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4.$$

$$2. \frac{x^7 - 1}{x - 1} = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

3. Раздѣлять, по формулѣ (А), $125a^3 - 8b^3$ на $5a - 2b$.

Замѣчая, что $125a^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a = 5a \cdot 5a \cdot 5a = (5a)^3$, и что $8b^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot b \cdot b \cdot b = 2b \cdot 2b \cdot 2b = (2b)^3$, имѣемъ:

$$\frac{125a^3 - 8b^3}{5a - 2b} = \frac{(5a)^3 - (2b)^3}{5a - 2b} = (5a)^2 + (5a)(2b) + (2b)^2 = 25a^2 + 10ab + 4b^2.$$

4. Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{\frac{1}{243} a^5 - \frac{m^5}{3^5}}{\frac{1}{3} a - m} = \left(\frac{1}{3} a \right)^4 + \left(\frac{1}{3} a \right)^3 m + \left(\frac{1}{3} a \right)^2 m^2 + \frac{1}{3} a m^3 + m^4 \\ = \frac{1}{81} a^4 - \frac{1}{27} a^3 m + \frac{1}{9} a^2 m^2 - \frac{1}{3} a m^3 + m^4.$$

Положимъ, что x и a означаютъ какия угодно количества, то въ формулѣ (А) замѣнивъ въ формулѣ (А) вѣдѣное количество a' , и выдѣливъ, что $x^m = (a')^m$ и дѣлитель въ $x = (-a')$ или въ $x + a'$, найдемъ:

$$\frac{x^m - (-a')^m}{x + a'} = x^{m-1} - (a')x^{m-2} + (-a')^2 x^{m-3} - \dots - (-a')^{m-2} x + (-a')^{m-1}.$$

Изъ правила знаковъ при умноженіи заключаемъ, что $(-a')^2 = (-a')(-a') = +a'^2$; $(-a')^3 = (-a')^2(-a') = (-a')^2(-a') = -a'^3$; $(-a')^4 = -a'^4$, $-a' = -a'^1$ и т. д. Однимъ словомъ: четныя степени количества $-a'$ даютъ знакъ $+$, а нечетныя знакъ $-$. Замѣтивъ это, различаемъ два случая: m — четнаго и m — нечетнаго.

1. m — число четное. — Въ такомъ случаѣ будетъ: $m - 1$ — число нечетное, $m - 2$ — четное, $m - 3$ — нечетное и т. д. А потому найдемъ, что: $(-a')^m = a'^m$; $(-a')^{m-1} = -a'^{m-1}$; $(-a')^{m-2} = +a'^{m-2}$ и т. д. Принимая это въ соображеніе, найдемъ, что последнее равенство принимаетъ видъ

$$\frac{x^m - a'^m}{x + a'} = x^{m-1} - a'x^{m-2} + a'^2 x^{m-3} - a'^3 x^{m-4} + \dots - a'^{m-2} x + a'^{m-1} \dots (В).$$

Отсюда заключаемъ, что разность одинаковыхъ четныхъ степеней дѣлится безъ остатка и на сумму оснований, при чемъ законъ составленія частнаго отличается отъ вышеказаннаго только чередованіемъ знаковъ.

Напримѣръ, $x^6 - a^6$ дѣлится не только на $x - a$, но и на $x + a$, причемъ частное будетъ

$$\frac{x^6 - a^6}{x + a} = x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5.$$

Разсмотримъ опять два случая: m — четное и m — нечетное.

1-й случай. — m — число четное. Въ этомъ случаѣ

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} + a'x^{m-2} + a'^2x^{m-3} + a'^3x^{m-4} + \dots + a'^{m-1} + \frac{2a^m}{x + a}. \quad (E).$$

Откуда заключаемъ, что сумма одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится на сумму этихъ же количествъ, и что остатокъ равенъ удвоенному второму члену дѣлителя.

Такъ,

$$\frac{x^4 + a^4}{x + a} = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3 + \frac{2a^4}{x + a}.$$

2-й случай. — m — нечетное число. Въ этомъ случаѣ

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + a'x^{m-2} + a'^2x^{m-3} + \dots + a'^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a}. \quad (F)$$

Слѣдовательно, разность одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится на сумму этихъ количествъ, и остатокъ равенъ удвоенному второму члену дѣлителя.

Такъ,

$$\frac{x^5 - a^5}{x - a} = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4 + \frac{2a^5}{x - a}.$$

Выдѣляя изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ тѣ, когда дѣленіе совершается безъ остатка, приходимъ къ слѣдующему выводу: разность одинаковыхъ степеней двухъ количествъ всегда дѣлится на разность оснований; разность одинаковыхъ четныхъ степеней дѣлится, кромѣ того, и на сумму оснований; сумма же одинаковыхъ нечетныхъ степеней — на сумму оснований.

Теорема, доказанная въ этомъ параграфѣ, известна подъ именемъ теоремы Безу (Bezout).

ГЛАВА VI.

Разложеніе алгебраическихъ выраженій на множители. Умноженіе и дѣленіе многочленовъ съ буквенными коэффициентами.

52. Разложить выраженіе на множители — значитъ представить его въ формѣ произведенія, иначе говоря, въ формѣ одночлена. Определеннаго позитивнаго правила для такого преобразованія нѣтъ; знаніе теоремъ и навыкъ въ преобразованіяхъ позволяютъ въ вѣроятныхъ случаяхъ открыть, каковы множители данного выраженія.

Естественно, первое, что нужно сдѣлать — это выдѣлить множителя, общаго всѣмъ членамъ данного выраженія, если таковой имѣется. Затѣмъ, дальнѣйшее разложеніе совершается применениемъ одного изъ слѣдующихъ трехъ приемовъ: 1) формулъ замѣчательныхъ случаевъ умноженія и дѣленія; 2) метода определенной группировки членовъ; 3) метода двухчленныхъ дѣлителей. Откалывая отъ предложенія посылка метода до слѣдующей главы, ознакомимся въ этой главѣ съ основными изъ указанныхъ приемовъ.

53. Вынесение за скобки общего множителя членовъ даннаго многочлена. — Пусть всѣ члены многочлена имѣютъ общаго множителя, напр.,

$$AD - BD + CD;$$

замѣтивъ, что величина многочлена не измѣнится, если мы его помножимъ и раздѣлимъ на одно и то же количество, помножимъ и дѣлимъ на D; находимъ

$$AD - BD + CD = D \left(\frac{AD - BD + CD}{D} \right).$$

Выполнивъ дѣленіе $AD - BD + CD$ на D по правилу дѣленія многочлена на одночленъ, найдемъ въ частномъ $A - B + C$; слѣд.

$$AD - BD + CD = D(A - B + C).$$

Отсюда видимъ, что если всѣ члены многочлена имѣютъ общаго множителя, то этотъ множитель можно вынести за скобки, написать въ скобкахъ частное отъ раздѣленія даннаго многочлена на общій множитель его членовъ.

Такъ, всѣ члены многочлена $35b^2c^4 - 7bc^3d^3 + 49ab^2c^3d + 343b^3c^3$ имѣютъ общій множитель $7bc^2$, который и вынесимъ за скобки; въ скобкахъ же пишемъ частное отъ раздѣленія многочлена на $7bc^2$; такимъ образомъ найдемъ:

$$35b^2c^4 - 7bc^3d^3 + 49ab^2c^3d + 343b^3c^3 = 7bc^2(5bc^2 - cd^3 + 7abd + 49b^2c).$$

Иногда выраженіе, получившееся въ скобкахъ, бываетъ способно къ дальнѣйшему разложенію, либо къ другимъ преобразованіямъ, могущимъ его упростить. Напр., $14a^3b^2 - 28a^2b^3 - 14a^3b^4$, по вынесеніи за скобки общаго множителя $14a^2b^2$, приводится къ виду $14a^2b^2(a^2 - 2ab + b^2)$; замѣчая замѣтивъ, что $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, замѣняемъ данное выраженіе простѣйшимъ

$$14a^2b^2(a - b)^2.$$

54. Методъ примѣненія замѣчательныхъ формулъ умноженія и дѣленія. — Можно иногда съ успѣхомъ примѣнять къ разложенію на множители формулы замѣчательныхъ случаевъ умноженія и дѣленія.

Простѣйшая изъ этихъ формулъ есть

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \dots (1).$$

Замѣтивъ далѣе, что

$$\frac{A^3 - B^3}{A - B} = A^2 + AB + B^2 \text{ и } \frac{A^3 + B^3}{A + B} = A^2 - AB + B^2,$$

и опредѣляя изъ того и другого равенства дѣлимое по дѣлителю и частному, имѣемъ:

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \dots (2)$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \dots (3)$$

Затѣмъ имѣемъ:

$$A^4 - B^4 = (A^2)^2 - (B^2)^2 = (A^2 + B^2)(A^2 - B^2) = (A^2 + B^2)(A + B)(A - B) \dots (4).$$

$$A^4 - B^4 = (A^2)^2 - (B^2)^2 = (A^2 + B^2)(A^2 - B^2) = (A + B)(A - B)(A^2 + AB + B^2)(A^2 - AB + B^2) \dots (5).$$

Вотъ примѣры примѣненія этихъ формулъ:

- 1) $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y).$
- 2) $(a + b - c)^2 - (a - 2b + 3c)^2 = (2a - b + 2c)(3b - 4c).$
- 3) $a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b).$
- 4) $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
- 5) $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2).$

6) Разложить на множители

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Придавъ къ этому выраженію и вычтя изъ него $2a^2b^2$, находимъ:

$$\begin{aligned} & 4a^2b^2 - 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ & (2ab)^2 - (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + 2(a^2 + b^2)c^2 - c^4 \\ & (2ab)^2 - (a^2 + b^2)^2 + 2(a^2 + b^2)c^2 - c^4 = \\ & (2ab)^2 - (a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)c^2 + c^4 \\ & (2ab)^2 - (a^2 + b^4 - c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\ & [(a + b)^2 - c^2] [-(a - b)^2 + c^2] \\ & = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b - c). \end{aligned}$$

Рассмотримъ еще разложеніе выраженій $A^4 + B^4$, $A^4 + B^4 + A^2B^2$, $A^4 + B^4 + kA^2B^2$.

Придавая къ первому изъ этихъ выраженій и вычитая изъ него $2A^2B^2$, находимъ:

$$\begin{aligned} A^4 + B^4 &= A^4 + 2A^2B^2 + B^4 - 2A^2B^2 = (A^2 + B^2)^2 - (2 \cdot AB)^2 = \\ &= (A^2 + B^2 + AB\sqrt{2})(A^2 + B^2 - AB\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Такимъ же образомъ найдемъ:

$$A^4 + B^4 + A^2B^2 = (A^2 + B^2)^2 - A^2B^2 = (A^2 + B^2 + AB)(A^2 + B^2 - AB).$$

$$\begin{aligned} A^4 + B^4 + kA^2B^2 &= (A^2 + B^2)^2 - (k + 2)A^2B^2 = \\ &= (A^2 + B^2 + AB\sqrt{k + 2})(A^2 + B^2 - AB\sqrt{k + 2}). \end{aligned}$$

55. Методъ группировки членовъ. — Если всѣ члены многочлена не имѣютъ общаго множителя, то иногда возможно бываетъ разбить ихъ на группы такъ, чтобы всѣ группы имѣли общаго множителя, который и выносится за скобки. Общихъ правилъ для такихъ преобразованій нѣтъ; какъ ихъ совершать, укажутъ нижеслѣдующіе примѣры.

1. Разложить на множителя выраженіе $a^2 + bc - ac - ab$. Разбиваемъ многочленъ на двѣ группы: $a^2 - ac$ и $+bc - ab$; вынося изъ первой группѣ за

скобки a , находим $a(a-c)$; вынося во второй группѣ $-b$, получим $-b(a-c)$. Слѣд. данное выражение $= a(a-c) - b(a-c)$; вынося здѣсь за скобки $a-c$, получаемъ окончательно $(a-c)(a-b)$.

2. Взявъ тринომъ $x^2 + (a+b)x + ab$, раскроемъ скобки и сгруппируемъ члены попарно; найдемъ

$$x^2 + ax + bx + ab = x(x+a) + b(x+a) = (x+a)(x+b).$$

Подобно этому, найдемъ

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b) &= x^2 - (a+b)x + ab, \\ (x-a)(x+b) &= x^2 + (-a+b)x - ab.\end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ, что всегда можно перейти отъ триннома вида $x^2 + px + q$ къ произведенію двухъ биномовъ $(x+a)(x+b)$, какъ скоро удастся подобрать два такихъ числа a и b , произведение которыхъ равнялось бы q , а алгебраическая сумма давала бы p . Вотъ примѣры.

Пусть нужно разложить тринномъ $x^2 - 10x + 24$. Пробуемъ, нельзя ли свободный членъ $+24$ разложить на два такихъ множителя, — эти множители должны быть одинаковаго знака, алгебраическая сумма которыхъ давала бы коэффициентъ -10 первой степени x , т.е. -10 . Но 24 можно разложить на слѣдующія пары множителей:

$$\begin{array}{cccc} 1 \times 24, & 2 \times 12, & 3 \times 8, & 4 \times 6, \\ -1 \times -24, & -2 \times -12, & -3 \times -8, & -4 \times -6.\end{array}$$

Изъ нихъ только послѣдняя пара даетъ въ суммѣ -10 . Такимъ образомъ, при этомъ находимъ, что искомыя множители будутъ

$$x - 4 \text{ и } x - 6; \text{ слѣд. } x^2 - 10x + 24 = (x - 4)(x - 6).$$

Пусть еще требуется разложить тринномъ $x^2 + 2x - 35$. Такъ какъ передъ свободнымъ членомъ стоитъ знакъ $-$, то пытаемся, нельзя ли разбить -35 на два такихъ множителя съ противоположными знаками, чтобы ихъ произведение было -35 , а алгебраическая сумма $+2$. Множители -35 будутъ: $+1$ и -35 , $+5$ и -7 ; требованію удовлетворяютъ $+7$ и -5 . Слѣд., искомыя множители будутъ:

$$x + 7 \text{ и } x - 5, \text{ и } x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5).$$

3. Взявъ $acx^2 + (ad + bc)x + bd$, раскрывъ скобки и сгруппировавъ члены по два, имѣемъ

$$acx^2 + adx + bcx + bd = ax(cx + d) + b(cx + d) = (ax + b)(cx + d).$$

Отсюда видно, что разложеніе триннома $px^2 + qx + r$ на множители вида $ax + b$ и $cx + d$ будетъ возможно, какъ скоро удастся разложить p на два множителя a и c , а r — на два множителя b и d такъ, чтобы средний коэффициентъ q равнялся $ad + bc$.

Пусть, напр., требуется разложить тринномъ $3x^2 + 7x - 6$. Коэффициентъ 3 разлагается только на 1 и 3. Послѣдній членъ -6 можетъ быть произведениемъ -6 на 1, -6 на -1 , -2 на 3, -2 на -3 . Составимъ те-

перъ множители $ax + b$ и $cx + d$, причеъ для коэффициентовъ a и c при x должно брать комбинаціи разложени 3, а для b и d — комбинаціи разложени — 6. Такимъ образомъ испытываемъ комбинаціи:

$$(3x + 6)(x + 1), (3x + 1)(x + 6), (3x + 2)(x + 3), (3x + 3)(x + 2).$$

Изъ этихъ комбинацій дасть $-7x$ для среднего члена — третья, если взять въ ней верхніе знаки: требуемое разложение будетъ, следовательно,

$$(3x - 2)(x + 3)$$

Тринумы вида $ax^2 + bx + c$ можно иногда легко разлагать *способомъ сопоставления первыхъ двухъ членовъ до полного квадрата*, съ тѣмъ чтобы привести выраженіе къ разности двухъ квадратовъ. Вотъ примѣры.

Найти множители $x^2 - 7x + 12$ обращаясь къ формулѣ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, замѣчаемъ, что x^2 можно разсматривать какъ квадратъ перваго члена пока неизвѣстнаго бинома; помноживъ и раздѣливъ $7x$ на 2, что дасть $2x \cdot \frac{7}{2}$, мы можемъ $7x$ разсматривать какъ удвоенное произведеніе перваго члена (x) искомаго бинома на второй, который, слѣд. равенъ $\frac{7}{2}$. Отсюда прямо видно, что если къ данному триному прибавить квадратъ этого втораго члена, $\frac{7^2}{4}$, при чемъ, конечно, нужно и вычесть столько же, т.-е. если написать данный триномъ въ видѣ

$$x^2 - 7x + \frac{7^2}{4} - \frac{7^2}{4} + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7^2}{4} + 12.$$

то первые три члена дають квадратъ бинома $x - \frac{7}{2}$, такъ что данный триномъ можно написать въ видѣ

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{49}{4} - 12\right), \text{ или } \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

а это, по формулѣ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, равно

$$\left(x + \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right) = (x + 4)(x + 3).$$

Еще примѣръ. легко рѣшаемый этимъ способомъ: разложить

$$(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 12) - 280.$$

Раскрывая произведеніе, причеъ $x^2 + 7x$ считаемъ за одинъ членъ, имѣемъ

$$(x^2 + 7x)^2 + 18(x^2 + 7x) + 72 - 280.$$

Замѣтивъ, что второй членъ можно написать въ видѣ $2 \cdot (x^2 + 7x) \cdot 9$, находимъ, что для требуемаго преобразованія надобно прибавить и вычесть 9^2 , и тогда выраженіе будетъ

$$(x^2 + 7x + 9)^2 - 72 - 280 = 81 - (x^2 + 7x + 9)^2 - 289 = (x^2 + 7x + 9)^2 - (17)^2 = (x^2 + 7x + 26)(x^2 + 7x + 8) = (x^2 + 7x + 26)(x + 1)(x + 8)$$

4 Иногда разложение группировкой удается, если расположить данное выраженіе по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы. Такъ, въ выраженіи

$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ мы не замѣчаемъ общаго множителя; но, расположивъ по убывающимъ степенямъ a , находимъ

$$a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c),$$

откуда прямо видѣть множитель $b-c$. Вынеся его за скобки, получимъ

$$(b-c)[a^2 - a(b+c) + bc] = (b-c)(a^2 - ab - ac + bc) \\ (b-c)[a(a-b) - c(a-b)] = (b-c)(a-b)(a-c).$$

5. Разложить на множители $a^2b^2(a-b) - a^2c^2(a-c) + b^2c^2(b-c)$.

Можно бы было начать такъ, какъ указано въ предыдущемъ примѣрѣ. Но можно идти еще такимъ путемъ.

Имѣемъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned} & a^2\{b^2(a-b) - c^2(a-c)\} + b^2c^2(b-c) \\ &= a^2\{ab^2 - ac^2 + c^2 - b^2\} + b^2c^2(b-c) \\ &= a^2\{a(b^2 - c^2) - (b^2 - c^2)\} + b^2c^2(b-c) \\ &= a^2\{a(b-c)(b+c) - (b-c)(b^2 - bc + c^2)\} + b^2c^2(b-c) \\ &= a^2(b-c)\{a(b+c) - (b^2 + bc + c^2)\} + b^2c^2(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2b(a-b) + a^2c(a-b) - c^2(b^2 - a^2)\} \\ &= (b-c)(a-b)\{a^2b + a^2c - c^2(a+b)\} \\ &= (b-c)(a-b)\{b(a^2 - c^2) + ac(a-c)\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c)(ab + bc + ac). \end{aligned}$$

6. Разложить на множители $a^{x+y} - a^y b^y + a^x b^x - b^{x+y}$.

Замѣчая, что показатели складываются при умноженіи степеней одной и той же буквы, замѣняемъ 1-й и 4-й члены произведеніями a^x , a^y и $b^x b^y$, послѣ чего данное выраженіе приметъ видъ $a^x a^y - a^y b^y = a^x b^x - b^x b^y$, или $a^y(a^x - b^y) + b^x(a^x - b^y)$, и наконецъ $(a^y - b^y)(a^x + b^x)$.

7. Разложить на множители $x^3 + 4x^2 + x - 6$. Представивъ второй членъ въ видѣ $3x^2 + x^2$, а третій — въ видѣ $3x - 2x$, получимъ выраженіе

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x^2 + x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2(x-3) - x(x+3) - 2(x+3) \\ &= (x+3)(x^2 + x - 2) = (x+3)(x^2 - 2x + x - 2) = (x+3)\{x(x+2) - \\ & - (x+2)\} = (x+3)\{(x+2)(x-1)\} = (x+3)(x+2)(x-1). \end{aligned}$$

Умноженіе и дѣленіе многочленовъ съ буквенными коэффициентами.

56. Если въ длинныхъ для умноженія многочленахъ встрѣчаются члены, содержащіе одинаковыя степени главной буквы, то такіе члены разсматриваютъ какъ подобные по отношенію къ главной буквѣ и соединяютъ въ одинъ, вынося за скобку общую степень главной буквы, а многочленный множитель, такимъ образомъ полученный, считаютъ коэффициентомъ этой степени. Пусть, напр., требуется умножить

$$\begin{aligned} & ax^3 - bx^2 + a^2x^2 + a^2x - 3abx^2 - b^2x^2 + b^2x - a^4 + 3b^4 \text{ на} \\ & ax^3 + a^2x - b^2x - bx^3 + a^4 - 2b^4. \end{aligned}$$

Сдѣлавъ вынесеніе за скобки, представимъ первый многочленъ въ видѣ

$$(a + b)x^3 - (a^3 + 3ab + b^3)x^2 + (a^3 + b^3)x - a^4 + 3b^4,$$

а второй въ видѣ

$$(a - b)x^3 + (a^3 - b^3)x + a^3 - 2b^3.$$

Разсматриваемъ первый многочленъ какъ четырехчленъ, а второй какъ трехчленъ; $a + b$, $a^3 + 3ab + b^3$ и $a^3 + b^3$ — какъ коэффициенты при степеняхъ x первого многочлена, — $a^4 + 3b^4$ какъ свободный членъ этого многочлена; $a - b$ и $a^3 - b^3$ — какъ коэффициенты, и $a^3 - 2b^3$ — какъ свободный членъ второго многочлена.

Чтобы многочлены уписались въ одной строкѣ, скобки замѣняютъ вертикальную чертою, справа отъ которой пишутъ степень буквы x , а слева одинъ подъ другимъ члены коэффициента, каждый съ его знакомъ. Дѣйствіе располагаютъ слѣдующ. образъ.

a $+b$	$x^3 - a^3$ $-3ab$ $-b^3$	$x^2 + a^3$ $+b^3$	$x - a^4$ $+3b^4$	множимое	
a $-b$	$x^3 + a^3$ $+b^3$	$x + a^3$ $-2b^3$			множитель	
a^3 $-b^3$	$x^3 - a^3$ $-2a^2b$ $-2ab^2$ $+b^3$	$x^4 + a^4$ $-a^2b$ $-ab^2$ $+b^4$	$x^3 - a^3$ $-a^2b$ $-3ab^2$ $+a^3$ $-b^3$	$x^2 - a^2b$ $-a^2b^2$ $-3a^2b^2$ $+a^3$ $-b^3$	$x - a^4$ $+2a^4b^3$ $+3a^2b^3$ $-6b^7$	Произведение до приведения.
a^2 $-b^3$	$x^5 - a^2b$ $-ab^2$	$x^4 + a^4$ $+3a^2b$ $+2ab^3$ $-2b^4$	$x^3 - a^5$ $-2a^4b$ $-2a^3b^2$ $+3a^2b^3$ $+9ab^4$ $-2b^5$	$x^2 + a^4b^2$ $-a^5b^3$ $+3a^4b^4$ $-5b^6$	$x - a^7$ $+2a^4b^3$ $+3a^5b^4$ $-6b^7$	Произведение по приведению.

Сперва умножаютъ всѣ члены множимаго на ax^2 , потомъ на $-bx^2$, затѣмъ на $+a^2x$ и т. д., располагая и произведеніе вертикальными колоннами по степенямъ буквы x ; соединивъ, наконецъ, подобные члены въ каждой колонкѣ, получаютъ окончательное произведеніе.

57. Пусть требуется раздѣлить многочленъ съ многочленными коэффициентами на другой такого же рода. Дѣйствіе располагаютъ какъ обыкновенно, съ тою разницею, что вмѣсто скобокъ употребляютъ вертикальныя черты. Дѣленія

коэффициенты совершаютъ отдѣльно, называя эти дѣйствія частными дѣленіями. Все это указано въ нижеслѣдующемъ примѣрѣ.

$$\begin{array}{r|l}
 a^4 & x^3 + a^4 \\
 -a^3b & +2a^3 \\
 \hline
 ab^3 & +a^2b^2 \\
 -b^4 & +3a^2b \\
 & -2ab^3 \\
 & -3b^3 \\
 & +b^4 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 a^3 & x^2 + 4a^3 \\
 -ab & +10ab^2 \\
 \hline
 +b^2 & -9b^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 a^2 & x + 2a \\
 -ab & +3b \\
 \hline
 +b^2 & \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 a^4 & x^3 + 2a^3 \\
 -a^3b & +3a^2b \\
 \hline
 +ab^3 & -2ab^2 \\
 -b^4 & -3b^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 a^4 & x^3 + 4a^3 \\
 +a^3b^2 & +10ab^2 \\
 +b^4 & -9b^2 \\
 \hline
 a^4 & x^3 + 2a^3 \\
 +a^3b^2 & +5a^2b \\
 +b^4 & +5ab^2 \\
 & +3b^3 \\
 \hline
 2a^3 & x + 4a^3 \\
 -5a^2b & -9b^3 \\
 +5ab^2 & \\
 -3b^3 & \\
 \hline
 2a^3 & x + 4a^3 \\
 -5a^2b & -9b^3 \\
 +5ab^2 & \\
 -3b^3 & \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Частныя дѣленія, служащія для опредѣленія коэффициентовъ частнаго:

1-ое частное дѣленіе.

$$\begin{array}{r}
 a^4 - a^3b + ab^3 - b^4 \\
 a^4 - a^3b + a^2b^2 \\
 \hline
 a^2b^2 + ab^3 - b^4 \\
 -a^2b^2 + a^2b^3 - b^4 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 - b^2}$$

2-ое частное дѣленіе.

$$\begin{array}{r}
 a^4 - a^3b^2 + b^4 \\
 a^4 - a^3b + a^2b^2 \\
 \hline
 a^3b - a^2b^2 + ab^3 \\
 a^3b - a^2b^2 + ab^3 \\
 \hline
 a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\
 a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \frac{a^3 - ab + b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

3-ье частное дѣленіе.

$$\begin{array}{r}
 2a^3 - 5a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\
 2a^3 - 2a^2b + 2ab^2 \\
 \hline
 -3a^2b + 3ab^2 - 3b^3 \\
 -3a^2b + 3ab^2 - 3b^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \frac{a^2 - ab + b^2}{2a - 3b}$$

ГЛАВА VII.

О дѣлимости на биномы вида $x \pm a$. — Основания способа неопредѣленныхъ коэффициентовъ. Различныя приложения предыдущихъ теоремъ.

58. Теорема I. Если рациональный цѣлый относительно буквы x полиномъ, расположенный по убывающимъ степенямъ той буквы, раздѣлимъ на биномъ $x - a$, то въ остатокъ получимъ результатъ подстановки въ этотъ полиномъ буквы a вместо x .

Приведемъ оказательство о Ламбрга.

Взявъ полиномъ, цѣлый и рациональный относительно x , можно представить въ видѣ

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0,$$

разумѣя подъ m какое-нибудь цѣлое положительное число, а подъ $A_m, A_{m-1}, \dots, A_1, A_0$ — некоторые коэффициенты, т.-е. выражения, не содержаща буквы x . Если такой многочленъ раздѣлить на $x - a$, то окончательный остатокъ долженъ быть выражениемъ, не содержащимъ буквы x ; въ самомъ дѣлѣ, если допустить, что остатокъ содержитъ букву x хотя только въ первой степени, то $x - a$ не можетъ раздѣлять дѣленіе, потому что дѣлитель содержитъ также x , а дѣлимое не содержитъ x . Отличитъ ноль, не содержащій буквы x , окончательный остатокъ. Въ остатокѣ опредѣлитъ R . Назвавъ для этого частное Q , имѣемъ, расположеннымъ по убывающимъ степенямъ x , $A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0 = (x - a) \cdot Q + R$, и замѣнивъ, что дѣлимое = произведеніе дѣлителя на частное, получимъ въ остатокѣ,

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0 = (x - a) \cdot Q + R.$$

Замѣчая, что обѣ части этого равенства представляютъ лишь различныя формы одного и того же выраженія, убѣждаемся этимъ, что равенство наше есть ничто иное какъ *тождество*, т.-е. равенство, справедливое при всякой величинѣ входящихъ въ него буквъ. Следовательно, оно будетъ справедливо и тогда, когда, въ частности, положимъ $x = a$. Но при такой подстановкѣ первая часть приметъ видъ

$$A_m a^m + A_{m-1} a^{m-1} + \dots + A_1 a + A_0 \dots (1),$$

и слѣд. не будетъ содержать буквы x , такъ какъ и коэффициенты A_m, \dots, A_1, A_0 не содержатъ x . Что касается второй части, то въ выраженіи Q буквы x также исчезнутъ: равно то $x = a$, при подстановкѣ a вместо x , обратится въ $a - a$, или въ ноль, а слѣд. и произведеніе $Q(x - a)$, котораго одинъ множитель равенъ 0, также обратится въ 0. Во второй части останется, поэтому, только выраженіе R , которое не помянется отъ указанной подстановки, такъ какъ оно имъ не содержитъ буквы x . Итакъ, цѣлая $x = a$, мы вместо прежняго равенства получимъ слѣдующее

$$A_m a^m + A_{m-1} a^{m-1} \dots + A_1 a + A_0 = R,$$

которое и доказываетъ, что остатокъ имѣетъ форму даннаго многочлена, въ которомъ буква x замѣнена буквою a .

59. Если бы дѣлитель былъ $x + a$, то этотъ способъ легко привести къ

разсмотрѣнному, замѣтивъ, что $x + a$ можно представить въ видѣ разности $x - (-a)$. Отсюда прямо вытекаетъ

Теорема II, служащая дополненіемъ первой: *Если цѣлый раціональный относительно буквы x полиномъ раздѣлимъ на биномъ $x + a$, то въ остатокъ получимъ результатъ подстановки въ этотъ полиномъ буквы $(-a)$ вмѣсто x .*

Примѣры I Найти остатокъ отъ раздѣленія многочлена

$$3x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 7$$

на $x - 2$.

Подставляя въ данный полиномъ 2 вмѣсто x , находимъ окончательный остатокъ

$$R = 3 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 7 = 96 - 64 - 8 + 7 = 31.$$

II. Найти остатокъ отъ раздѣленія тринома

$$x^3 - 8x + 15$$

на $x + 5$.

Подставляя въ данный триномъ (-5) вмѣсто x , получимъ $(-5)^3 - 8 \cdot (-5) + 15 = -25 - 40 + 15 = -50$. Окончательный остатокъ 50.

60. Изъ доказанныхъ теоремъ вытекаютъ такія слѣдствія:

Слѣдствіе I. — Если многочленъ обращается въ ноль послѣ замѣны въ немъ буквы x буквою a , то онъ дѣлится на $x - a$; если многочленъ обращается въ ноль послѣ замѣны буквы x буквою $(-a)$, то онъ дѣлится на $x + a$.

Въ самомъ дѣлѣ, многочленъ, полученный послѣ замѣны буквы x буквою a или $(-a)$, есть ни что иное какъ окончательный остатокъ отъ раздѣленія данного многочлена въ первомъ случаѣ на $x - a$, во второмъ — на $x + a$. Но если окончат. остатокъ равенъ нулю, то это значитъ, что многочленъ дѣлится безъ остатка — въ первомъ случаѣ на $x - a$, во второмъ на $x + a$.

Слѣдствіе II. обратное предыдущему. Если многочленъ дѣлится на $x - a$ или на $x + a$, то результатъ подстановки въ него $=$ въ первомъ случаѣ буквы a , а во второмъ $(-a)$ вмѣсто x — долженъ быть равенъ нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, по условію, многочленъ дѣлится на $x - a$ или $x + a$, то остатокъ въ обоихъ случаяхъ долженъ быть равенъ нулю; но этотъ остатокъ есть результатъ подстановки вмѣсто x буквы a или $(-a)$; стало быть, этотъ результатъ долженъ быть равенъ нулю.

Примѣры I. Трехчленъ $x^2 - 2x + 1$ обращается въ 0, если вмѣсто x подставить 1; слѣд. онъ дѣлится на $x - 1$.

II Многочленъ $4ax^3 - 7a^2x^2 - 6a^3x + 9a^4$ обращается въ 0 при $x = a$, а потому онъ дѣлится на $x - a$.

III. Триномъ $x^2 - 5x + 6$ обращается въ 0 при $x = 3$, слѣд. онъ дѣлится на $x - 3$.

61 Законъ составленія частнаго отъ раздѣленія цѣлаго относительно буквы x полинома на биномъ $x - a$.

Легко вывести законъ, по которому составляется частное дѣленія многочлена

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \text{ на } x - a.$$

Въ самомъ дѣлѣ, совершая дѣленіе, найдемъ:

$$\begin{array}{r}
 A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 x - a \\
 - A_m x^m + A_m a x^{m-1} \\
 \hline
 A_m a x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \dots \\
 + A_{m-1} \\
 \hline
 + A_m a x^{m-1} + A_m a^2 x^{m-2} \\
 + A_{m-1} \quad + A_{m-1} a \\
 \hline
 A_m a^2 x^{m-2} + A_{m-2} x^{m-3} + \dots \\
 + A_{m-1} a \\
 \hline
 \dots \dots \dots \\
 P x^k + A_{k-1} x^{k-1} + A_{k-2} x^{k-2} + \dots \\
 - P x^k + P a x^{k-1} \\
 \hline
 + P a x^{k-1} + A_{k-2} x^{k-2} + \dots \\
 + A_{k-1}
 \end{array}$$

Найдя первые три члена частного, замѣчаемъ, что частное есть полиномъ степени $m - 1$, при чемъ:

Коэффициентъ перваго члена частного равенъ коэффициенту 1-го члена дѣлящаго;

Коэффициентъ 2-го члена частного равенъ произведенію предшествующаго коэффициента на a , сложенному съ вторымъ коэффициентомъ дѣлящаго;

Коэффициентъ третьяго члена частного равенъ произведенію предшествующаго коэффициента на a , сложенному съ третьимъ коэффициентомъ дѣлящаго.

Докажемъ, что этотъ законъ общій. Пусть, следуя обыкновенному правилу дѣленія, мы нашли въ частномъ членъ $P x^{k-1}$. Онъ получился отъ раздѣленія перваго члена соответствующаго остатка на x ; сл. первый членъ остатка есть $P x^k$, и потому весь остатокъ будетъ $P x^k + A_{k-1} x^{k-1} + A_{k-2} x^{k-2} + \dots$. Умножая членъ частного $P x^{k-1}$ на дѣлителя и вычитая это произведеніе изъ сказаннаго остатка, въ новомъ остаткѣ получимъ

$$(P a + A_{k-1}) x^{k-1} + A_{k-2} x^{k-2} + \dots$$

Раздѣливъ первый членъ этого остатка на x , находимъ слѣдующій членъ частного

$$(P a + A_{k-1}) \cdot x^{k-2}.$$

Коэффициентъ его равенъ произведенію предшествующаго коэффициента на a , сложенному съ коэффициентомъ того же порядка дѣлящаго. Общность закона коэффициентовъ такимъ образомъ доказана.

Если окажется, что дѣлимый полиномъ *неполный*, т.-е. въ немъ недостаетъ членовъ съ какими либо промежуточными степенями главной буквы, то для приложенія предыдущаго правила слѣдуетъ возстановить недостающіе члены, внося ихъ съ коэффициентомъ 0.

62. Если дѣлитель будетъ $x - a$, то рассматривая его какъ $x - (-a)$, заключаемъ, что для нахождения частного нужно только въ частное § 61 вмѣсто a подставить $(-a)$; сдѣлавъ это, найдемъ

$$A_n x^{m-1} - A_m a^{m-2} + A_m a^2 x^{m-3} \dots$$

$$+ A_{m-1} a$$

$$+ A_{m-2}$$

62. Примеры | Найти частное и остатокъ отъ раздѣленія

$$5x^4 - 23x^3 + 3x - 58 \text{ на } x - 2.$$

Дополнимъ данный полиномъ членомъ съ x^2 , имѣемъ

$$5x^4 + 0 \cdot x^2 - 23x^3 + 3x - 58.$$

Коэфф. 1-го чл. частнаго	5		и 1-й чл. частнаго	$5x^3$
» 2-го »	»	$= 5 \cdot 2 + 0$ т.е. $+10$	» 2-й »	» $+10x^2$
» 3-го »	»	$+10 \cdot 2 - 23$ т.е. -3	» 3-й »	» $= -3x$
» 4-го »	»	$= (-3) \cdot 2 + 3$, -3	» 4-й »	» $= -3$

Искомое частное, поэтому, $5x^3 + 10x^2 - 3x - 3$.

Остатокъ $R = 5 \cdot 2^4 - 23 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 - 58 = 80 - 92 + 6 - 58 = -64$.

Итакъ: $5x^4 - 23x^3 + 3x - 58 = (x - 2)(5x^3 + 10x^2 - 3x - 3) - 64$

II. Такимъ же образомъ найдемъ

$$\frac{x^4 - x^3 + 1}{x + 1} = x^3 - 2x^2 + 2x - 2 + \frac{3}{x + 1}.$$

III. Найти частное и остатокъ отъ раздѣленія

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \text{ на } 2x - 3.$$

Для приложенія нашего правила нужно дѣлимое расположить по степенямъ $2x$, рассматривая $2x$ какъ главную букву. Множа и дѣля первый членъ на 2, изображаемъ его въ видѣ $\frac{1}{2}(2x)^2$; множа и дѣля второй членъ на 4, пишемъ его въ видѣ $\frac{3}{4}(2x)^2$. Дѣлимое такъ обр. будетъ

$$\frac{1}{8}(2x)^3 - \frac{3}{4}(2x)^2 + (2x) - 1.$$

Вѣтъмъ, прилагая правило, найдемъ

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{2x - 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

63. Обобщеніе теоремы § 58

(См. примеч. 1-е, 2-е, 3-е въ § 58, доказываемъ, что остатокъ отъ раздѣленія полинома по буквѣ x полинома на полиномъ вида $px \pm q$ есть результатъ постановки въ тотъ полиномъ такого значенія x , при которомъ биномъ $px \pm q$ обращается въ ноль.

Рассмотримъ, наприм., случай дѣленія на $px - q$, и пусть частное будетъ Q , а остатокъ, который не будетъ содержать буквы x , пусть будетъ R ; имѣемъ

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0 = (px - q) \cdot Q + R.$$

Дадимъ x -у значеніе $\frac{q}{p}$, при которомъ $px - q$ обращается въ ноль; при этомъ R , какъ не содержащій буквы x , останется безъ измѣненія, и получимъ

$$A_n \left(\frac{q}{p} \right)^n + A_{n-1} \left(\frac{q}{p} \right)^{n-1} + \dots + A_0 = R.$$

теорема и доказывается. Подобным же образом докажем теорему и для случая, когда дѣлителемъ будетъ $px - q$.

доказаніе. — Отсюда непосредственно вытекаетъ: 1) если полиномъ обращается въ ноль по замѣнѣ въ немъ буквы x количествомъ $\frac{q}{p}$, то онъ дѣлится на $px - q$; и 2) если полиномъ дѣлится на $px + q$, то результатъ подстановки въ него количества $-\frac{q}{p}$ вѣсто x равенъ нулю.

64. Теорема III — Для того чтобы цѣлый относительно x полиномъ дѣлился на $x - a$ или на $x + a$, необходимо, чтобы низшій (свободный) членъ его дѣлился на a .

Въ самомъ дѣлѣ, если полиномъ P дѣлится, наприм., на $x - a$, то

$$P = (x - a) \cdot Q,$$

гдѣ Q — цѣлый относительно x полиномъ; въ этого равенства слѣдуетъ, что низшій членъ полинома P , какъ произведенія, равенъ произведенію a на низшій членъ частнаго Q , а слѣд. долженъ дѣлиться на a .

65. Теорема IV. — Если полиномъ P , цѣлый относительно x , дѣлится на каждый изъ биномовъ $x - a$, $x - b$, $x - c$, гдѣ a , b и c не равны между собою, то онъ дѣлится и на ихъ произведеніе.

По условію, полиномъ P дѣлится на $x - a$; пусть частное будетъ Q , гдѣ Q есть также цѣлый относительно x полиномъ; въ такомъ случаѣ

$$P = (x - a) \cdot Q \dots (1).$$

Но полиномъ P , по условію, дѣлится и на $x - b$, слѣдов. при $x = b$ онъ обращается въ ноль. Итакъ, если въ предыдущее равенство вѣсто x подставимъ b , то первая часть его обратится въ ноль; слѣдов. и вторая, при подстановкѣ въ нее b вѣсто x , должна обратиться въ ноль, т.-е. должно быть:

$$(b - a) \cdot Q_b = 0,$$

гдѣ Q_b означаетъ выраженіе Q , въ которомъ x замѣненъ буквою b . Мы имѣемъ произведеніе двухъ множителей: $b - a$ и Q_b , равное 0; для этого необходимо, чтобы по крайней мѣрѣ одинъ изъ нихъ былъ нулемъ. Но множитель $b - a$ не есть 0, ибо, по условію, b неравно a ; слѣд. Q_b должно быть нулемъ. Итакъ, Q обращается въ ноль при $x = b$, слѣд. оно дѣлится на $x - b$. Обозначивъ частное этого дѣленія черезъ Q' , гдѣ Q' есть цѣлый относит. x полиномъ, имѣемъ

$$Q = (x - b) \cdot Q' \dots (2).$$

Вставляя вѣсто Q его величину въ равенство (1), получаемъ

$$P = (x - a)(x - b)Q' \dots (3).$$

По условію, P дѣлится на $x - c$, слѣд. полиномъ P , при $x = c$, обращается въ ноль; поэтому и вторая часть равенства (3), при $x = c$, должна обращаться въ ноль, т.-е. должно быть:

$$(c - a)(c - b)Q'_c = 0.$$

Значеніе полинома Q' при $x = c$. Но разности $c - a$ и $c - b$ не равны нулю, по условію, a , b и c различны, слѣдов. чтобы произведеніе

было нулемъ, нужно чтобы было $Q'_c = 0$. Это значить, что Q' дѣлится на $x - c$; обозначивъ частное этого дѣленія черезъ Q'' , имѣемъ

$$Q' = (x - c) \cdot Q''.$$

Внося величину Q' въ равенство (3), получаемъ

$$P = (x - a)(x - b)(x - c) \cdot Q''.$$

Теорема такимъ образомъ доказана.

Примѣръ. Доказать, что полиномъ

$$x^2y^2 + y^2x^2 + x^2x^2 - x^2y^2 - y^2x^2 - x^2x^2$$

дѣлится на произведение $(x - y)(x - z)(y - z)$.

Подставляя въ данный полиномъ y вмѣсто x , находимъ, что онъ обращается въ 0; слѣдоват. онъ дѣлится на $x - y$. Такимъ же образомъ убеждаемся, что какъ при $x = z$, такъ и при $y = z$, полиномъ обращается въ 0; слѣдов. дѣлится какъ на $x - z$, такъ и на $y - z$. Дѣлится на каждый изъ биномовъ $x - y$, $x - z$, $y - z$ въ отдѣльности, онъ, въ силу теоремы IV, дѣлится и на ихъ произведение.

66. Предыдущія теоремы служатъ для нахождения цѣлыхъ дѣлителей вида $x - a$ некотораго даннаго цѣлаго относительно x полинома. При помощи теоремы III можно опредѣлять, какие цѣлые биномы этого вида *могутъ быть* дѣлителями, а при помощи теоремы II, слѣдствіе I, опредѣляемъ тѣ изъ нихъ, которые въ самомъ дѣлѣ служатъ дѣлителями даннаго полинома.

Очевидно, что число дѣлителей полинома не можетъ превышать его степени; иначе, въ силу теоремы IV, онъ долженъ бы былъ дѣлиться на полиномъ, котораго степень выше его собственной, а это невозможно.

Приводимъ примѣры.

1. Найти всѣхъ цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей полинома

$$x^4 - 17x^3 + 98x^2 - 232x + 192.$$

если таковые имѣются.

Находимъ дѣлителей числа 192; это будутъ числа 2, 3, 4, 6, 8 и т. д. По теоремѣ третьей, искомыя дѣлители, если только они существуютъ, будутъ вида $x \pm 2$, $x \pm 3$, $x \pm 4$, $x \pm 6$, . . .

Подставляя въ данный полиномъ вмѣсто x число 2, легко убѣдимся, что полиномъ обращается въ ноль; стало быть онъ дѣлится на $x - 2$.

Подставляя вмѣсто x число -2 , убѣдимся, что полиномъ не обращается въ ноль; слѣд. $x + 2$ не есть его дѣлитель.

Подставляя вмѣсто x число 3, убѣдимся, что полиномъ обращается въ ноль; слѣд. дѣлится на $x - 3$.

Подставивъ вмѣсто x число -3 , замѣтимъ, что полиномъ не обращается въ ноль; слѣд. не дѣлится на $x + 3$.

Продолжая такимъ же образомъ, найдемъ, что данный полиномъ имѣетъ дѣлителями $x - 4$ и $x - 8$.

Мы уже нашли четыре дѣлителя: $x - 2$, $x - 3$, $x - 4$, $x - 8$; другихъ цѣлыхъ дѣлителей не можетъ быть, такъ какъ данный полиномъ — четвертой степени.

II Найти цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей полинома

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc,$$

если таковые существуютъ.

Въ силу теоремы III, искомыми дѣлителями могутъ быть только

$$x - a, x - b, x - c; x + a, x + b, x + c.$$

Но при $x = a$ полиномъ обращается въ

$$a^3 - (a + b + c)a^2 + (ab + ac + bc)a - abc,$$

что, какъ легко видѣть, приводится къ нулю. Слѣдоват. $x - a$ есть искомый дѣлитель.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что $x - b$ и $x - c$ также суть дѣлители даннаго полинома.

Намъ полиномъ — третьей степени; мы нашли трехъ дѣлителей; другихъ не можетъ быть; слѣд. задача рѣшена.

67. Такимъ же образомъ, какъ мы доказали теорему IV, докажемъ, что если полиномъ дѣлится въ отдѣльности на каждый изъ биномовъ $px + q$, $p'x + q'$, $p''x + q''$, при условіи, что значенія $x : \frac{q}{p}, \frac{q'}{p'}, \frac{q''}{p''}$, при которыхъ эти дѣлители обращаются въ ноль, все различны, то онъ дѣлится и на ихъ произведеніе.

68. Слѣдствія теоремы IV.

I. Если полиномъ Р, цѣлый относительно x , m -я степени:

$$A_mx^m + A_{m-1}x^{m-1} + \dots + A_1x + A_0$$

обращается въ ноль при m различныхъ значеніяхъ буквы $x : a, b, c, \dots, h, i, k$, то онъ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$A_m(x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - i)(x - k).$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть полиномъ четвертой степени

$$P = A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

обращается въ ноль при четырехъ различныхъ значеніяхъ $x : a, b, c$ и d . Въ такомъ случаѣ, по теоремѣ IV, онъ дѣлится на произведение

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

которое само четвертой степени; стало быть частное не содержитъ x и есть нѣкоторое число; пусть это число будетъ А. Давный полиномъ равенъ произведенію $A(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$. Если выполнить умноженіе и расположить члены по убывающимъ степенямъ x , то полученный многочленъ долженъ быть тождественъ заданному, т.-е. состоять изъ совершенно такихъ же членовъ. А потому и высшіе члены обоихъ должны быть равны, т.-е. $A_4x^4 = Ax^4$, откуда $A = A_4$: теорема доказана, и

$$P = A_4(x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

II *Опредѣленіе*. Если цѣлый относительно x полиномъ обращается въ ноль въ всѣмъ значеніи x , то говорятъ, что онъ *тождественно равенъ нулю*.

Докажемъ, что если цѣлый относительно x полиномъ m -ой степени, обращается въ ноль при нѣсколькихъ значеніяхъ x , число которыхъ превышаетъ m , то онъ тождественно равенъ нулю (т.-е. равенъ нулю при всякомъ x).

Пусть, наприм., полиномъ

$$P = A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

обращается въ ноль при пяти различныхъ значеніяхъ x : a, b, c, d, e . Мы доказали, что если полиномъ P обращается въ ноль при четырехъ значеніяхъ x : a, b, c и d , то онъ беретъ видъ

$$P = A_1(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \dots (1).$$

Но, по условію, P обращается въ ноль также и при $x = e$; слѣдов.

$$A_1(e-a)(e-b)(e-c)(e-d) = 0;$$

но какъ множители $e-a, e-b, \dots$ отличны отъ нуля, то чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо, чтобы A_1 равнялось нулю. Но если $A_1 = 0$, то изъ (1) видно, что каково бы ни было x , всегда будетъ $P = 0$.

Итакъ, P равно 0 при всякомъ x , т.-е. тождественно равняется нулю.

69. Теорема V Если цѣлый относительно x полиномъ $f(x)$ дѣлится въ отдаленности на $(x-a)^2, (x-b)^2, (x-c)^2, \dots$ и на a, b, c, \dots , неравные между собою числа, то онъ дѣлится и на произведеніи

$$(x-a)^2 \cdot (x-b)^2 \cdot (x-c)^2 \dots$$

Пусть $f(x) = (x-a)^2 \cdot \varphi(x)$ и $f(x) = (x-b)^2 \cdot \psi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ частныя отъ раздѣленія $f(x)$ на $(x-a)^2$ и $(x-b)^2$. Имѣемъ

$$(x-a)^2 \varphi(x) = (x-b)^2 \psi(x) \dots (1).$$

Замѣнивъ въ этомъ тождествѣ x буквою b , получимъ

$$(b-a)^2 \varphi(b) = 0$$

и какъ $b-a$, по условію, не есть 0, то должно быть $\varphi(b) = 0$; другими словами, результатъ подстановки буквы b вмѣсто x въ $\varphi(x)$, обращаетъ эту функцію въ 0, слѣд. $\varphi(x)$ дѣлится на нѣкоторую степень β' разности $(x-b)$, такъ что должно быть

$$\varphi(x) = (x-b)^{\beta'} \cdot \varphi_1(x), \dots$$

съ условіемъ $\varphi_1(b) \neq 0$. Докажемъ, что $\beta' \geq \beta$. Для этого подставимъ въ тождество (1) $(x-b)^{\beta'} \varphi_1(x)$ вмѣсто $\varphi(x)$; найдемъ

$$(x-a)^2 (x-b)^{\beta'} \varphi_1(x) = (x-b)^2 \psi(x).$$

Если бы было $\beta' < \beta$, то обѣ части можно бы было раздѣлить на $(x-b)^{\beta'}$, и положивъ въ частныхъ $x = b$, нашли бы

$$(b-a)^2 \varphi_1(b) = 0,$$

но это невозможно, такъ какъ ни $(b-a)^2$, ни $\varphi_1(b)$ не равны нулю. Заклю-

чевать, что нельзя допустить, чтобы β' было меньше β . Подобным же образом докажем, что β' не может быть и больше β . Следовательно $\beta' = \beta$, и потому

$$\varphi(x) = (x - b)^\beta \varphi_1(x),$$

и следовательно

$$f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \varphi_1(x).$$

Продолжая подобныя же рассужденія, докажемъ, что $\varphi_1(x)$ дѣлится на $(x - c)$, а слѣд. $f(x)$ на $(x - a)^\alpha (x - b)^\beta (x - c)^\gamma$ и т. д. Теорема доказана.

70. Теорема VI. *Чтобы нѣлый относительно x полиномъ тождественно (т. е. при всякомъ значеніи x) равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы всѣ коэффициенты его равнялись нулю.*

Пусть данный полиномъ будетъ

$$P = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

Такъ какъ этотъ полиномъ долженъ быть равенъ нулю при всякомъ x ; стало бытъ, въ частности, онъ долженъ быть равенъ нулю и при $x = 0$. Но при $x = 0$ всѣ члены, содержащіе x , обращаются въ 0, слѣд. равенство

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \quad \dots (I)$$

обращается въ

$$E = 0 \quad \dots (II).$$

Откинувъ въ равенствѣ (I) E , какъ количество, равное 0, а въ остальныхъ членахъ вынеся за скобки x , получимъ равенство

$$P = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0.$$

Для того, чтобы P равнялось 0 при всякомъ x , необходимо, чтобы одинъ изъ его сомножителей всегда равнялся нулю; но x равняется нулю не всегда, а только при $x = 0$, следовательно, необходимо, чтобы второй множитель всегда равнялся нулю. Такъ какъ $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ долженъ быть равенъ 0 при всякихъ значеніяхъ x , то онъ долженъ быть нулемъ и при $x = 0$. Но положивъ въ немъ $x = 0$, обратимъ его въ D , а равенство $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ въ

$$D = 0 \quad \dots (III).$$

Откинувъ въ полиномѣ P члены Dx и E , какъ равные 0, а въ остальныхъ вынеся за скобки x^2 , получимъ произведение

$$P = x^2(Ax^2 + Bx + C),$$

которое должно быть равно 0 при всякомъ x . Отсюда, подобно предыдущему, докажемъ, что

$$C = 0 \quad \dots (IV)$$

и т. д. Такимъ образомъ всѣ коэффициенты полинома P должны быть равны 0. Итакъ, что это условіе необходимо. Но оно и достаточно, потому что если всѣ коэффициенты равны 0, то и полиномъ P равенъ нулю.

71. Теорема VII. *Если два нѣлыя относительно x полинома остаются равными при всякомъ значеніи x , то они тождественны.*

Пусть полиномы

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + Dx^2 + Ex + F$$

$$\text{и } ax^3 + bx^2 + dx + e$$

имѣютъ одинаковую численную величину при всякомъ x ; тогда ихъ разность будетъ тождественно равна нулю. Но эта разность есть

$$Ax^3 + Bx^2 + (C - a)x^2 + (D - b)x^2 - (E - d)x + (F - e);$$

слѣд., по теоремѣ V, имѣемъ:

$$A = 0; B = 0; C = a; D = b; E = d; F = e;$$

Изъ того, что $A = 0$ и $B = 0$, заключаемъ, что члены Ax^3 и Bx^2 исчезаютъ, такъ что число членовъ въ обоихъ полиномахъ одинаково; а какъ $C = a$, $D = b$, $E = d$ и $F = e$, то коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ x равны. Оба полинома ничѣмъ не отличаются одинъ отъ другого, или, что то же, тождественны.

Примѣчаніе. Теоремы VI и VII служатъ основаніемъ *способа неопредѣленныхъ коэффициентовъ*, являющаго многочисленнѣйшій и разнообразнѣйшій applicati вѣ алгебрѣ. Изобрѣтеніе этого способа приписываютъ знаменитому французскому математику и философу Декарту (Descartes).

Различныя приложенія предыдущихъ теоремъ.

72 Приложение I.—Выведемъ условія дѣлимости суммы или разности одинаковыхъ степеней двухъ количествъ на сумму или разность оснований.

1. Пусть требуется раздѣлить $x^m + a^m$ на $x - a$. Подставивъ въ дѣляемое букву a вмѣсто x , найдемъ окончательный остатокъ; онъ будетъ $= a^m - a^m$ или 0, откуда заключаемъ, что дѣленіе совершается безъ остатка.

Для нахожденія частнаго представимъ дѣлимое въ видѣ полнаго члена m -ой степени;

$$x^m + 0 \cdot x^{m-1} + 0 \cdot x^{m-2} + \dots + 0 \cdot x - a^m.$$

По правилу § 61, высшій членъ частнаго равенъ x^{m-1} . Второй членъ частнаго содержитъ x^{m-2} ; а коэффициентъ его найдемъ, помноживъ коэффициентъ перваго члена частнаго на a , что дастъ a , и придавъ сюда второй коэфф. дѣлимаго т.-е. 0; итакъ, второй членъ частнаго $= ax^{m-2}$. Продолжая такимъ образомъ, найдемъ

$$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1} \dots (1).$$

2. Раздѣлить $x^m - a^m$ на $x - a$. Подставляя въ дѣлимое вмѣсто x букву a , найдемъ окончательный остатокъ $a^m - a^m = 2a^m$. Откуда заключаемъ, что дѣленіе не совершается безъ остатка (оставляя частное по предыдущему, получимъ

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1} - \frac{2a^m}{x - a} \dots (2).$$

3. Раздѣлить $x^m - a^m$ на $x + a$. Подставивъ въ дѣлимое вмѣсто x коэф-

чество (a), найдемъ окончат. остатокъ. Онъ будетъ: 2) при m четномъ равенъ $(-a)^m - a^m = a^m - a^m = 0$. Частное же будетъ въ этомъ случаѣ

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots + a^{m-2}x - a^{m-1} \dots (3).$$

3) при m нечетномъ остатокъ $(-a)^m - a^m = -a^m - a^m = -2a^m$; частное же

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a} \dots (4).$$

4. Раздѣлить $x^m + a^m$ на $x - a$. Подставляя въ дѣленье вмѣсто x букву ($-a$), найдемъ окончательный остатокъ. Онъ будетъ: 2) при m четномъ: $(-a)^m + a^m = a^m + a^m = 2a^m$, такъ что

$$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots + a^{m-2}x - a^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a} \dots (5).$$

3) при m нечетномъ $(-a)^m + a^m = -a^m + a^m = 0$; слѣдов. дѣлене совершается безъ остатка и частное

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots - a^{m-2}x + a^{m-1} \dots (6).$$

Отсюда заключаемъ, что 1) $x^m - a^m$ всегда дѣлится на $x - a$; 2) $x^m - a^m$ дѣлится на $x + a$, если m четное; 3) $x^m - a^m$ никогда не дѣлится на $x + a$, не дѣлится на $x - a$ при m нечетномъ. Такимъ образомъ наши тѣ же выводы, какіе получили раньше непосредственнымъ дѣленіемъ. Новая пріемъ для тѣхъ же результаты быстра.

73. Приложение II. — Мы видѣли, что $x^m - a^m$ всегда дѣлится на $x - a$; но при m четномъ дѣлится еще на $x + a$. Слѣдовательно, когда m четное, $x^m - a^m$ дѣлится на биномы $x - a$ и $x + a$, дѣлится, по теоремѣ IV, и на ихъ произведение $(x - a)(x + a)$, т.е. на $x^2 - a^2$. Итакъ: разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на разность квадратовъ тѣхъ же количествъ. Частное будетъ

$$\frac{x^m - a^m}{x^2 - a^2} = x^{m-2} + a^2x^{m-4} + a^4x^{m-6} + \dots + a^{m-4}x^2 + a^{m-2}.$$

74. Приложение III. — 1. При какомъ численномъ значеніи K полиномъ

$$x^3 - 3x^2 + 5x + K$$

дѣлится безъ остатка на $x - 3$?

Чтобы полиномъ дѣлился на $x - 3$, нужно, чтобы результатъ подстановки въ него 3 вмѣсто x обращался въ нуль, т.е. чтобы

$$3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + K = 0, \text{ или } 15 + K = 0.$$

Последнее равенство возможно только при $K = -15$.

2. При какомъ значеніи K полиномъ

$$x^3 - 3x^2 + 5x + K$$

дѣлится на $x + 3$?

Нужно, чтобы результат подстановки въ этотъ полиномъ числа (-3) вы-
сто x былъ равенъ нулю, т.-е. чтобы

$$(-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + K = 0, \text{ или } -69 + K = 0;$$

а это возможно только при $K = 69$.

3. При какомъ значеніи K полиномъ

$$x^3 - 3x^2 + 5x + K$$

раздѣлится на $3x - 2$?

На осн. § 63, Слѣдств., заключаемъ, что необходимо, чтобы результатъ
подстановки въ данный полиномъ числа $\frac{2}{3}$ высто x былъ нулемъ, т.-е. чтобы

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{2}{3} + K = 0, \text{ или } \frac{62}{27} + K = 0.$$

а это возможно только при $K = -\frac{62}{27}$.

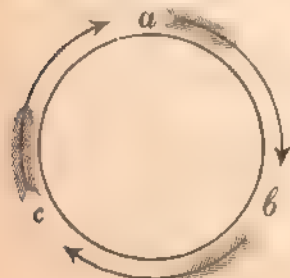
75 Приложение IV.—Теорема IV. § 65 можетъ быть приложена къ раз-
ложению многочленовъ на множители. Методъ разложения, на ней основанный,
называется *методомъ двучленныхъ дѣлителей* и состоитъ въ слѣдующемъ.
Расположивъ многочленъ по степенямъ какой-либо буквы, x наприимѣръ, стара-
емся открыть двучленныхъ дѣлителей $x - a$, $x - b$, . . . , $x - k$; составля-
ютъ изъ нихъ произведеіе $(x - a)(x - b) \dots (x - k)$; дѣлится ли на него
данный полиномъ P , и если въ частномъ получится выраженіе Q , то

$$P = (x - a)(x - b) \dots (x - k) \cdot Q.$$

Разложение такимъ образомъ будетъ совершено.

Впрочемъ, слѣдуетъ замѣтить, что этотъ методъ не такъ удобенъ въ прак-
тическомъ отношеніи, какъ выше указанныя методы разложения; потому что въ
случаѣ большого числа возможныхъ дѣлителей придется дѣлать единицамъ много
вычисленій, чтобы выбрать тѣ изъ нихъ, которые дѣйствительно служатъ дѣли-
телями данного полинома. Поэтому онъ употребляется лишь въ рѣдкихъ, исклю-
чительныхъ случаяхъ; такъ, наприим., онъ весьма удобенъ для разложения *сим-*
метричныхъ выраженій.

Круговая перестановка. — Рассмотримъ выраженіе $bc + ca + ab$; члены,
посодержащія буквы a , поставимъ на первомъ мѣстѣ, а остальные члены можно
получить послѣдовательно *круговою перестановкою буквъ*, т.-е. перемѣною a
на b , b на c и c на a *). Такое же расположеніе буквъ легко видѣть и въ
выраженіи $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$, въ самомъ дѣлѣ, изъ $a^2(b - c)$



Черт. 9.

*) Если a , b и c поставить на окружности круга
(черт. 9) и, выходя отъ нѣкоторой буквы, a , двигаться
по окружности круга въ направлеіи, указанномъ стрѣл-
кой, то мы будемъ слѣдовать въ циклическомъ порядкѣ
 abc, bca, cab . Слѣдованіе этому порядку, важно въ за-
дачахъ, гдѣ имѣютъ дѣло съ разностями трехъ буквъ.
Такъ, когда мы пишемъ $b - c$, $c - a$, $a - b$, мы слѣ-
дуемъ циклическому порядку; но нарушаемъ этотъ по-
рядокъ, когда пишемъ $b - a$, $a - c$, $a - b$ или $a - c$,
 $b - a$, $b - c$. Если съ самаго начала слѣдовать цикли-
ческому порядку, то вычисленія сокращаются и дѣла-
ются легче.

перестановкою получаем $b^2(c - a)$, а отсюда снова круговую перестановкою выводим $c^2(a - b)$. Тоже самое замечаемъ въ выражении

$$(y - z)(z - x)(x - y).$$

Симметричныя выражения.—Выраженіе, которое не измѣняется отъ перестановки какой угодно пары буквъ, въ него входящихъ, одной на мѣсто другой, называется *симметричнымъ* выраженіемъ. Такъ, выраженія $a + b$, ab , $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$, $ab^2 + b^2a$, $a^2b + b^2a$ суть симметричныя выраженія изъ двухъ буквъ; $a + b + c$, $bc + ca + ab$, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ симметричныя выраженія изъ трехъ буквъ; потому что, наприм., $ab = ba$, $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$, $a + b + c = a + c + b$, $bc + ca + ab = ca + ab + bc$, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + c^3 + b^3 - 3abc$. Но $a - b$, $\frac{a}{b}$, x^y , очевидно, не симметричны, ибо, наприм., $a - b$ не равно $b - a$, и т. д. Замѣтимъ, что единственная симметричная функція первой степени относительно a , b , c есть $Ma + b + c$, гдѣ M числовой коэффициентъ.

Выраженія, которыя остаются безъ измѣненія величины при круговой перестановкѣ входящихъ въ нихъ буквъ, называются *циклически-симметричными*. Таково, наприм., выраженіе $(b - c)(c - a)(a - b)$, ибо величина его не измѣняется, если на мѣсто a поставить b , c на мѣсто b , и a на мѣсто c .

Очевидно, произведение, или частное двухъ симметричныхъ выраженій симметрично; ибо если ни то, ни другое не измѣняется при перестановкѣ двухъ буквъ одной на мѣсто другой, то и произведение, и частное останутся безъ измѣненія при такой перестановкѣ.

Ясно также, что произведение, или частное двухъ циклически-симметричныхъ выраженій суть также выраженія циклически-симметричныя.

Послѣ этихъ предварительныхъ указаній переходимъ къ примѣрамъ.

Примѣръ I. Разложить на множители

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) \dots (1).$$

Положивъ въ этомъ выраженіи $b = c$, убѣдимся, что оно обращается въ нуль; слѣдов. $b - c$ есть множитель этого выраженія. Такимъ же точно образомъ докажемъ, что и $c - a$, и $a - b$ суть множители данного выраженія. Слѣдовательно, оно содержитъ множитель $(b - c)(c - a)(a - b)$.

Но данное выраженіе есть выраженіе четвертой степени, слѣдоват., кромѣ трехъ найденныхъ множителей, оно должно содержать еще одного множителя первой степени. Кромѣ того, этотъ множитель долженъ быть симметричнымъ выраженіемъ относительно буквъ a , b и c . Заключаемъ, что этотъ множитель долженъ быть $= a + b + c$.

Итакъ, данное выраженіе должно быть

$$L(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c) \dots (2),$$

гдѣ L есть некоторое число, остающееся безъ всякаго измѣненія, каковы бы ни были значенія a , b и c .

Чтобы найти L , замѣтимъ, что (1) и (2) тождественны, а слѣдов. коэффициенты, наприм., при a^3 , должны быть равны. Въ (1) этотъ коэффициентъ есть $b^2 - c^2$; во (2) онъ есть $-L(b - c)$; слѣдов. $L = 1$; и потому выраженіе (1) разлагается въ формѣ

$$-(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c).$$

Для нахождения L можно еще дать частныя значенія буквамъ a, b и c . Положивъ, наприм., $a = 0, b = 1, c = 2$; (1) обратится въ -6 , а (2) въ $6L$; слѣдов. $6L = -6$, откуда $L = -1$.

Примѣръ II. Разложить $(y - z)^3 + (z - x)^3 + (x - y)^3$

Убѣждаемся, что данное выраженіе обращается въ 0 при $y = z$, слѣдоват $y - z$ есть множитель данного выраженія. Такимъ же точно образомъ убѣдимся, что множителями его будутъ $z - x$ и $x - y$. А какъ данное выраженіе есть выраженіе 3-й степени и циклически-симметрично, то оно должно быть = $(y - z)(z - x)(x - y)\{L(x^2 + y^2 + z^2) + M(yz + zx + xy)\}$. (1) гдѣ въ фигурныхъ скобкахъ написана самая общая форма циклически-симметричнаго выраженія второй степени.

Для опредѣленія L , безъ труда найдемъ, что коэффициентъ при x^4y въ данномъ выраженіи есть -5 , а въ (1) это будетъ $-L$, слѣдов. $L = 5$.

Для нахождения M , положимъ $x = 0, y = 1, z = 2$, и сравниваемъ данное выраженіе со (2); найдемъ

$$1 + 32 = 1 - (-1) \cdot 2 \cdot (-1) [5 \cdot 5 + 2M],$$

откуда $M = -5$. Искомое разложеніе будетъ

$$5(y - z)(z - x)(x - y)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$$

Примѣръ III. Разложить на множители

$$a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3.$$

Легко убѣдиться, что $b - c, c - a, a - b$ служатъ множителями. Слѣдовит, данное выраженіе, будучи симметричнымъ выраженіемъ 6 степени,

$$(b - c)(c - a)(a - b)\{L(a^3 + b^3 + c^3) + M[a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)] + Nabc\}. \quad (1).$$

Остается опредѣлить числовыя коэффициенты L, M и N .

Коэффициентъ при a^3b въ данномъ выраженіи равенъ -1 , а въ (1) равенъ $-L$; слѣдов. $L = 1$.

Коэффициенты при a^4b^2 въ данномъ выраженіи 0, а во (2) есть $L + M$; слѣдов. $L + M = 0, L = M = -1$.

Чтобы найти N , положимъ $a = 1, b = 2, c = 3$; сравнивая данное съ (1), находимъ

$$1 + 64 - 3 = 2(1 + 8 + 27 + 5 + 16 + 27 + 6N),$$

откуда $N = 9$ Итакъ, данное выраженіе =

$$(b - c)(c - a)(a - b)\{a^3 + b^3 + c^3 + a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) - 9abc\}.$$

Примѣръ IV. Разложить полиномъ

$$P = a^2b^2c^2(a - b)(a - c)(b - c) + a^2b^2d^2(a - b)(a - d)(b - d) + a^2c^2d^2(a - c)(a - d)(c - d) + b^2c^2d^2(b - c)(b - d)(c - d).$$

Легко убѣдиться, что полиномъ P обращается въ ноль при $a = b, a = c, a = d, b = c$ и т. д.; потому онъ дѣлится на $a - b, a - c, a - d, b - c$ и

т. д. Попытаемся выдѣлнить этихъ множителей. Вынося изъ первыхъ двухъ членовъ $a^2b^2(a-b)$, а изъ двухъ другихъ $c^2d^2(c-d)$, получимъ:

$$P = a^2b^2(a-b)(c^2(a-c)(b-c) - d^2(a-d)(b-d)) + c^2d^2(c-d)\{a^2(a-c)(a-d) - b^2(b-c)(b-d)\}.$$

Располагая первый членъ въ первыхъ фигурныхъ скобкахъ по убывающимъ степенямъ c , а второй по убывающимъ степенямъ буквы d ; заѣмъ, первый членъ во вторыхъ фигурныхъ скобкахъ по убывающимъ степенямъ буквы a , а второй—буквы b , имѣемъ:

$$P = a^2b^2(a-b)\{c^4 - c^3(a+b) + c^2ab - d^4 + d^3(a+b) - d^2ab\} - c^2d^2(c-d)\{a^4 - a^3(c+d) + a^2cd - b^4 + b^3(c+d) - b^2cd\}$$

или

$$P = a^2b^2(a-b)\{c^4 - d^4 - (c^3 - d^3)(a+b) + (c^2 - d^2)ab\} - c^2d^2(c-d)\{a^4 - b^4 - (a^3 - b^3)(c+d) + (a^2 - b^2)cd\}$$

Теперь видно, что въ первыхъ фигурныхъ скобкахъ имѣется множитель $c-d$, а во вторыхъ $a-b$; вынося ихъ, имѣемъ:

$$P = a^2b^2(a-b)(c-d)\{c^3 + d^3\}(c+d) - (c^2 - cd + d^2)(a-b) + ab(c-d)\} + c^2d^2(c-d)(a-b)\{a^3 + b^3\}(a+b) - (a^2 + ab + b^2)(c+d) + cd(a-b)\}$$

Вынося теперь за скобки $(a-b)(c-d)$, и означивъ третій множитель буквою P' , положимъ

$$P = (a-b)(c-d) \cdot P';$$

гдѣ

$$\begin{aligned} P' &= a^2b^2\{c^3 - d^3\}(c+d) - (c^2 + cd + d^2)(a-b) - ab(c-d)\} \\ &= a^2b^2\{a^3 - b^3\}(a+b) - (a^2 + ab + b^2)(c+d) + cd(a-b)\} \\ &= a^2b^2\{c^2 + d^2\}(c-a) + d(c^2 - d^2) - b(c^2 + d^2) - cda - b) + ab(c-d)\} \\ &= a^2b^2\{a^2 - b^2\}(a-c) + b(a^2 - b^2) - d(a^2 - b^2) - ab(c-d) - cd(a-b)\} \\ &= a^2b^2\{(a-c)(bc - bd - c^2 - d^2 - cd) - d^3(d-b)\} \\ &+ c^2d^2\{(a-c)(a^2 - ab - b^2 - ad - bd) - b^3(d-b)\} \\ &+ (a-c)\{a^2b^2(bc + bd - c^2 - d^2 - cd) + c^2d^2(a^2 - ab) + b^2(ad - bd)\} \\ &- b^2d^2(d-b)(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Вынося $a-c$, положимъ

$$P' = (a-c)P'',$$

гдѣ

$$\begin{aligned} P'' &= a^2b^2\{c(b-c) + d(b-c)\} - a^2b^2d^2 - c^2d^2a^2 + c^2d^2\{a(b-d) + b(b-d)\} \\ &+ b^2d^2\{d-b\}(a+c) \\ &= a^2b^2(b-c)(c+d) - a^2d^2(b^2 - c^2) + c^2d^2(b-d)(a-b) + b^2d^2(d-b)(a+c) \\ &= a^2(b-c)\{b^2(c+d) - d^2(b+c)\} + d^2(b-d)\{c^2(a-b) + b^2(a+c)\} \\ &- a^2(b-c)\{c(b^2 - d^2) - bd(b-d)\} - d^2(b-d)\{a(c^2 - b^2) + b(c-c-b)\}. \end{aligned}$$

Здѣсь мы можемъ вынести за скобки $(b-c)(b-d)$; положимъ

$$P'' = (b-c)(b-d)P''',$$

гдѣ

$$P''' = a^2\{c(b+d) + bd\} - d^2\{a(b+c) + bc\} + b\{a^2 - d^2\} - ad\{a-d\} + ab\{a-d\} - (a-d)(ab - abd - ad - bcd).$$

Итакъ, окончательно

$$P = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)(abc - abd + acd + bcd).$$

76. Приложение V. При какихъ значеніяхъ буквъ a и b полиномъ $x^3 + 8x^2 + 5x - a$ дѣлится безъ остатка на $x^2 + 3x - b$?

Вопросъ можно рѣшить двоякимъ путемъ.

1-й методъ. Онъ состоитъ въ томъ, что совершаютъ на самомъ дѣлѣ дѣленіе, доводя его до остатка, степень котораго была бы ниже степени дѣлителя, затѣмъ выражаютъ, что остатокъ долженъ быть тождественно равенъ нулю.

Выполняемъ дѣленіе:

$$\begin{array}{r} x^3 + 8x^2 + 5x - a : x^2 + 3x - b = x + 5 \\ \underline{-(x^3 + 3x^2 - bx)} \\ 5x^2 + 5x - a \\ \underline{-(5x^2 + 15x - 5b)} \\ -10x + 5b \end{array}$$

Чтобы дѣленіе совершалось безъ остатка, остатокъ долженъ быть тождественно равенъ нулю; а для этого, по теоремѣ VI, § 70, необходимо и достаточно, чтобы

$$b - 10 = 0 \quad . \quad . \quad (1) \quad \text{и} \quad 5b - a = 0 \quad . \quad . \quad (2).$$

Равенство (1) возможно только при $b = 10$.

Подставляя 10 вмѣсто b въ равенство (2), имѣемъ

$$50 - a = 0,$$

что возможно только при $a = 50$.

Итакъ, искомыми значенія a и b суть: $a = 50$, $b = 10$.

Не трудно проверить, что $x^3 + 8x^2 + 5x - 50$ дѣлится безъ остатка на $x^2 + 3x - 10$.

2-й методъ (неопредѣленныхъ коэффициентовъ). Выражаютъ, что дѣлимое равно произведенію дѣлителя на цѣлый полиномъ, котораго степень равна разности степеней дѣлагаго и дѣлителя, ибо такова должна быть степень частнаго.

Такимъ образомъ пишемъ:

$$x^3 + 8x^2 + 5x - a = (x^2 + 3x - b)(px + q).$$

такъ какъ общій видъ цѣлаго полинома первой степени есть $px + q$.

Располагая вторую часть по степенямъ x , имѣемъ тождество

$$x^3 + 8x^2 + 5x - a = p \cdot x^3 + 3p \cdot x^2 - bp \cdot x - bq.$$

Отсюда, по теор. VII, § 71, приравнявая между собою коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ буквы x , имѣемъ четыре условія для опредѣленія a , b , p и q ; а именно:

$$p = 1; \quad -3p + q = 8; \quad -b \cdot p + 3q = 5; \quad bq = a.$$

Подставляя во второе равенство 1 вмѣсто p , находимъ: $3 - q = 8$, откуда $q = -5$. Подставляя въ третье равенство вмѣсто p и q ихъ величины, имѣемъ:

Общимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ выраженій называется такое цѣлое выраженіе, которое дѣлитъ данныя на-цѣло или безъ остатка. Такъ, выраженія $(a-b)^2$ и $a^2 - b^2$ имѣютъ общимъ дѣлителемъ $a-b$. Взявъ выраженія $a^3 - a^2b - ab^2 - b^3$, $a^3 - 3ab^2 - 2b^3$ и $a^3 - 2a^2b - ab^2 - 2b^3$, и разложивъ ихъ на множители, находимъ:

$$\begin{aligned} a^3 - a^2b - ab^2 - b^3 &= (a+b)^2(a-b); \\ a^3 - 3ab^2 + 2b^3 &= (a-b)^2(a+2b); \\ a^3 - 2a^2b - ab^2 + 2b^3 &= (a-b)(a-b)(a-2b); \end{aligned}$$

откуда видно, что данныя многочлены имѣютъ общимъ дѣлителемъ биномъ $a-b$.

Цѣлыя выраженія, не имѣющія никакихъ общихъ дѣлителей, называются *первыми между собою* или *взаимно простыми*. Такъ, $a+b$ и $a-b$ выраженія взаимно простые.

Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій называется произведеніе всѣхъ простыхъ дѣлителей, общихъ даннымъ выраженіямъ. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ общій наивысшій дѣлитель есть $a-b$, потому что нѣтъ общихъ дѣлителей даннымъ выраженіямъ и не имѣютъ. Взявъ выраженія $x^4 - a^4$ и $x^3 - 2ax^2 - a^2x - 2a^3$ и разложивъ ихъ на множители, находимъ:

$$\begin{aligned} x^4 - a^4 &= (x+a)(x-a)(x^2+a^2); \\ x^3 - 2ax^2 - a^2x - 2a^3 &= (x-a)(x-a)(x-2a); \end{aligned}$$

замѣчаемъ, что простые дѣлители, общие этимъ выраженіямъ, суть: $x-a$ и $x-a$; ихъ произведеніе $x^2 - a^2$ и есть общій наивысшій дѣлитель двухъ данныхъ выраженій.

Очевидно, что если данныя выраженія раздѣлимъ на ихъ общаго наивысшаго дѣлителя, то черезъ это изъ нихъ исключатся *общіе ихъ дѣлители*, и потому частныя не будутъ имѣть уже никакихъ общихъ дѣлителей, т.-е. будутъ первыя между собою. Отсюда вытекаетъ другое опредѣленіе общаго наивысшаго дѣлителя: *это есть такой общій дѣлитель, по раздѣленіи на который данныхъ выраженій, получаются частныя первыя между собою*. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ, раздѣливъ выраженія $x^4 - a^4$ и $x^3 - 2ax^2 - a^2x - 2a^3$ на общаго дѣлителя $x^2 - a^2$, получаемъ частныя $x^2 + a^2$ и $x + 2a$ — первыя между собою. Заключаемъ, что, по опредѣленію, $x^2 - a^2$ и будетъ общій наивысшій дѣлитель данныхъ выраженій.

Примѣчаніе I.—Между алгебраическимъ общимъ наивысшимъ дѣлителемъ и общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ (въ арифметикѣ) есть существенное различіе. Общій наибольшій дѣлитель чиселъ есть такой ихъ общій дѣлитель, который по величинѣ больше всѣхъ другихъ общихъ дѣлителей. Отсюда и названіе его — *наибольшій*. Но общій наивысшій дѣлитель алгебраическихъ выраженій, какъ содержащій произведеніе всѣхъ общихъ дѣлителей, очевидно, будетъ по степени выше другихъ общихъ дѣлителей; но изъ этого еще не слѣдуетъ, чтобы онъ былъ больше по величинѣ: такъ a^3 не необходимо больше a ; напр., если a есть положительное число менѣе 1, то a^2 менѣе a .

Примѣчаніе II.—Для краткости слова: общій дѣлитель будемъ означать начальными буквами о. д.; также слова: общій наивысшій дѣлитель — буквами о. н. д.

Переходимъ къ изложенію способовъ опредѣленія общаго наивысшаго дѣлителя алгебраическихъ выраженій.

79. Способъ разложенія на множители — Пусть требуется найти о. н. д. одночленовъ

$$65a^5b^2c, \quad 30a^7b^3 \quad \text{и} \quad 45a^4b^4d,$$

т. е. такихъ выраженій, которыя прямо даны въ формѣ произведеній.

Согласно съ первымъ опредѣленіемъ, нужно составить произведеніе всѣхъ общихъ простыхъ дѣлителей — численныхъ и буквенныхъ. Произведеніе общихъ простыхъ числовыхъ дѣлителей есть о. н. д. коэффициентовъ и 5. Что касается буквенныхъ производителей, то нужно взять только общія буквы съ наименьшими показателями; общія буквы суть a и b ; наименьшій показатель буквы a есть 4, буквы b — 2, сл. о. н. д. $= 5a^4b^2$.

Выраженіе, такимъ образомъ составленное, удовлетворяетъ и второму опредѣленію общаго наиб. дѣлителя; въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ на него данные одночлены, получаемъ частныя: $13ac$, $6a^3b$ и $9b^2d$ — первыя между собою. Отсюда **Правило.** Для составления о. н. д. одночленовъ нужно къ общему наиб. дѣлителю коэффициентовъ приписать всѣ общія буквенные множители съ наименьшими показателями.

Что касается многочленовъ, то, когда они легко разлагаются на множители, и употребляютъ способъ разложенія на производителей, или, что то же, превращаютъ многочлены въ одночлены и прилагаютъ къ нимъ предыдущее правило. Вотъ примѣры.

I. Найти о. н. д. многочленовъ

$$9a^2x^2 - 36 \quad \text{и} \quad 12a^3x^3 + 48ax + 48.$$

Разлагая на множители, найдемъ:

$$\begin{aligned} 9a^2x^2 - 36 &= 3^2 \cdot (ax + 2)(ax - 2); \\ 12a^3x^3 + 48ax + 48 &= 4 \cdot 3(ax + 2)^2. \end{aligned}$$

Взявъ произведеніе общихъ простыхъ множителей, найдемъ

$$\text{о. н. д.} = 3(ax + 2).$$

II. Найти о. н. д. многочленовъ

$$x^4y^2 - 3x^2y^3 + 2x^2y^4 \quad \text{и} \quad x^4y^2 - 4x^2y^4.$$

Разлагая на множители, находимъ:

$$\begin{aligned} x^4y^2 - 3x^2y^3 + 2x^2y^4 &= x^2y^2(x - 2y)(x - y), \\ x^4y^2 - 4x^2y^4 &= x^2y^2(x + 2y)(x - 2y); \end{aligned}$$

слѣд. о. н. д. $= x^2y^2(x - 2y)$.

III. Найти о. н. д. полиномовъ

$$x^3 + 1 \quad \text{и} \quad x^3 + mx^2 + mx + 1.$$

Разложивъ на множители, получимъ

$$\begin{aligned} x^3 + 1 &= (x + 1)(x^2 - x + 1), \\ x^3 + mx^2 + mx + 1 &= (x + 1)(x^2 - x + mx + 1); \end{aligned}$$

слѣд. о. н. д. $= x + 1$.

IV. Найти о. н. д. полиномовъ

$$3x^2y - 3x^3 + 3xy - 3xz \text{ и } 15x^2y - 30xyx + 15x^2y - 15x^3 + 30x^2z - 15xz^2.$$

По разложеніи на множителей, найдемъ, что

$$1\text{-й полиномъ} = 3(x^2 + x)(y - x),$$

$$2\text{-й полиномъ} = 3 \cdot 5(y - x)(x - z)^2.$$

Отсюда: о. н. д. $= 3(y - x)$.

80. Способъ послѣдовательнаго дѣленія. Такъ какъ многочлены только въ рѣдкихъ случаяхъ легко поддаются разложенію на простыхъ множителей, то и предыдущій способъ прилагается съ успѣхомъ только въ исключительныхъ случаяхъ. Вообще же, для опредѣленія о. н. д. полиномовъ пользуются общими способамъ, который носятъ названіе *способа послѣдовательнаго дѣленія*. Нахожденіе о. н. д. этимъ способомъ основывается на слѣдующихъ теоремахъ.

81 Теорема I. — *О. н. д. двухъ выраженій не измѣнится, если одно изъ нихъ помножимъ или разделимъ на количество, первое съ другимъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, о. н. д. есть произведеніе множителей, общихъ тому и другому выраженію, а потому если введемъ (умножимъ), или уничтожимъ (дѣлѣмъ) въ одномъ изъ нихъ множителя, не входящаго въ составъ другого выраженія, то отъ этого прибавится къ первому, или уничтожится въ немъ множитель, котораго нѣтъ во второмъ, а слѣд. общие множители останутся тѣ же; значитъ не измѣнится и о. н. д.

Эта теорема облегчаетъ вычисленія, позволяя избѣгать дробныхъ коэффициентовъ въ частныхъ.

82 Теорема II. — *О. н. д. у делимаго и делителя служитъ общимъ делителемъ у делителя и остатка.*

Пусть данные многочлены суть M и N ; обозначивъ частное отъ раздѣленія M на N буквою Q , а остатокъ R , и замѣтивъ, что дѣлимое $=$ произведенію делителя на частное, сложенному съ остаткомъ, имѣемъ

$$M = N \times Q + R. \quad (1).$$

Обозначивъ общаго дѣлителя многочленовъ M и N буквою Δ , раздѣливъ на Δ обѣ части полученнаго равенства, найдемъ:

$$\frac{M}{\Delta} = \frac{N}{\Delta} \times Q + \frac{R}{\Delta}.$$

Но, по условію, Δ есть общій дѣлитель многочленовъ M и N , слѣд. частныя $\frac{M}{\Delta}$ и $\frac{N}{\Delta}$ суть выраженія цѣлыя; обозначивъ ихъ соответственно черезъ M' и N' , представимъ послѣднее равенство въ видѣ

$$M' = N' \times Q + \frac{R}{\Delta}, \text{ откуда } \frac{R}{\Delta} = M' - N' \times Q.$$

Это равенство показываетъ, что $\frac{R}{\Delta}$ есть выраженіе цѣлое, ибо равно цѣлому выраженію $M' - N' \times Q$, значитъ, R дѣлится на-цѣло на Δ .

Итакъ, мы доказали, что *всякій* дѣлитель, общій дѣлямому и дѣлителю,

... общимъ дѣлителемъ у дѣлителя и остатка; а слѣд. и общій наиб. дѣлитель дѣлимаго и дѣлителя служитъ также общимъ дѣлителемъ у дѣлителя и остатка.

53. Теорема III, обратная. *О. и. о. у дѣлителя и остатка служитъ общимъ дѣлителемъ у дѣлимаго и дѣлителя.*

Пусть Δ_1 будетъ общимъ дѣлителемъ выражений N и R . Раздѣливъ обѣ части равенства (1) на Δ_1 , получимъ

$$\frac{M}{\Delta_1} = \frac{N}{\Delta_1} \cdot Q + \frac{R}{\Delta_1};$$

т. е., по условію, $\frac{N}{\Delta_1}$ есть цѣлое выраженіе, равно какъ и $\frac{R}{\Delta_1}$; обозначивъ ихъ буквами N' и R' получимъ

$$\frac{M}{\Delta_1} = N' \times Q + R'.$$

Это равенство показываетъ, что $\frac{M}{\Delta_1}$ равно суммѣ двухъ цѣлыхъ выраженій; значить, Δ_1 есть дѣлитель многочлена M .

Итакъ, мы доказали, что *всякій* дѣлитель, общій дѣлителю и остатку, служитъ также общимъ дѣлителемъ у дѣлимаго и дѣлителя; а слѣд. и общій наиб. дѣлитель дѣлителя и остатка служитъ общимъ дѣлителемъ у дѣлимаго и дѣлителя.

Изъ этихъ двухъ теоремъ выводится слѣдующая

54. Теорема IV. *— О и о дѣлимаго и дѣлителя равно о. н. дѣлителю дѣлителя и остатка.*

Обозначимъ о. н. д. дѣлимаго M и N о. н. дѣлителя буквою D , а о. н. д. остатка R и Q буквою D' . Въ силу теоремы III, D — общій дѣлитель многочленовъ N и R , а D' — общій дѣлитель остатка выраженіе R' — общій наиб. дѣлитель N и R . А, по теоремѣ III, выраженіе D' должно дѣлить на-цѣло M и N ; слѣд. и ихъ общій наиб. дѣлитель D . Такимъ образомъ, D и D' дѣлятся другъ друга на-цѣло; но это возможно только тогда, когда они равны. Итакъ

$$D = D',$$

и теорема доказана.

55 На послѣдней теоремѣ и основанъ способъ послѣдовательнаго дѣленія.

Пусть данныя многочлены суть M и N . Ихъ общій наиб. дѣл. можетъ содержать производителей одночленныхъ и многочленныхъ. Начиная съ того, что отдѣлимъ въ многочленахъ M и N одночленныхъ производителей отъ многочленныхъ. Одночленный производитель многочлена M есть общій множитель всѣхъ членовъ этого многочлена; вынося его за скобки и означая черезъ α , а многочленъ, заключающійся въ скобкахъ, черезъ A , имѣемъ:

$$M = \alpha \cdot A.$$

Такъ же точно, вынося за скобки общаго множителя β всѣхъ членовъ многочлена N и обозначая выраженіе, заключающееся въ скобкахъ, буквою B , получимъ:

$$N = \beta \cdot B.$$

Производители — одночлены, общие множителям M и N , заключаются въ α и β ; а производители — многочлены, общие множителям M и N , содержатся въ A и B . Такъ какъ о. н. д. многочленовъ M и N есть произведение всѣхъ ихъ общихъ простыхъ множителей или дѣлителей, то очевидно, мы его найдемъ, если общего наив. дѣлителя количествъ α и β помножимъ на о. н. д. многочленовъ A и B . Обозначимъ о. н. д. многочленовъ M и N буквою Δ ; о. н. д. одночленовъ α и β — буквою d ; о. н. д. многочленовъ A и B — буквою D . На основаніи сказаннаго имѣемъ:

$$\Delta = d \cdot D.$$

Пусть, напримѣръ:

$$M = 9ab^2x^5 - 30ab^2x^3 + 45ab^2x + 24ab^2;$$

$$N = 6a^4b^3cd^6 - 12a^4b^2cx^5 - 36a^4b^2cx^4 - 24a^4b^2cx^3 - 78a^4b^2cx^2 + 36a^4b^3cx.$$

Вынося изъ всѣхъ членовъ перваго многочлена за скобки $3ab^2$, а изъ всѣхъ членовъ втораго $6a^4b^3cx$, получимъ:

$$M = 3ab^2(3x^5 - 10x^3 + 15x + 8),$$

$$N = 6a^4b^3cx(x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6).$$

Общ. н. д. d одночленовъ $3ab^2$ и $6a^4b^3cx$ есть $3ab^2$. Теперь намъ слѣдуетъ опредѣлить D , т. е. о. н. д. многочленовъ

$$A = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8$$

$$B = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6$$

Раздѣлимъ A на B . Если бы A раздѣлилось на B безъ остатка, то B и было бы о. н. д., потому что тогда всѣ производители B содержались бы въ A . Но если бы A не раздѣлилось на B безъ остатка, то все-таки рѣшеніе вопроса подвинется впередъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть дѣленіе A на B дастъ частное Q и остатокъ R ; въ такомъ случаѣ

$$A = B \times Q + R \dots (1).$$

причемъ степень главной буквы остатка будетъ ниже чѣмъ въ дѣлителѣ B . Замѣтивъ теперь, что, по теоремѣ IV, о. н. д. многочленовъ A и B равенъ о. н. д. многочленовъ B и R , заключаемъ, что вопросъ сводится къ отысканію о. н. д. между прежнихъ дѣлителей и остаткомъ, т. е. между многочленами съ меньшими степенями главной буквы, и слѣд. болѣе простыми. Если бы при этомъ B раздѣлилось на R , тогда R и было бы искомымъ общимъ наив. дѣлителемъ. Но пусть при дѣленіи B на R получается въ частномъ Q' и въ остаткѣ R' ; тогда

$$B = Q' \times R + R' \dots (2)$$

Хотя дѣленіе B на R и не привело къ окончательному нахожденію о. н. д., но рѣшеніе задачи опять упростилось. Дѣйствительно, мы знаемъ, что о. н. д. между B и R равенъ о. н. д. между R и R' , такъ что вопросъ приведенъ къ нахожденію о. н. д. между многочленами R и R' , болѣе простыми, ибо показателъ главной буквы въ R' меньше показателя ея въ R .

Пусть R дѣлится безъ остатка на R' и даетъ въ частномъ Q'' , такъ что

$$R = Q'' \times R' \dots (3).$$

Не трудно проверить, что последний делитель R' и есть искомым о. н. д. многочленов A и B . Въ самомъ дѣлѣ, равенство (3) показываетъ, что R' есть о. н. д. для самого себя и R ; но о. н. д. остатка и делителя (равенство (2)) равенъ о. н. д. делимаго и делителя, т. е. многочленовъ B и R ; а отсюда, въ силу равенства (1) заключаемъ, что R' , будучи о. н. д. для B и R , служитъ также съ тѣмъ (по теор. IV) и общ. наиб. делителемъ для A и B , что и требовалось доказать.

При последовательныхъ дѣленіяхъ, здѣсь указанныхъ, возможны два случая: 1) или мы дойдемъ до остатка равнаго нулю; въ такомъ случаѣ, какъ доказано, последний делитель и будетъ искомымъ о. н. д. многочленовъ A и B ; или 2) послѣ нѣсколькихъ последовательныхъ дѣленій, дойдемъ до остатка, который не содержитъ главной буквы, не будетъ, однакоже, нулемъ. Что такой случай возможенъ, объясняется тѣмъ, что степень главной буквы въ последовательныхъ остаткахъ постоянно понижается; слѣд. непремѣнно дойдемъ до остатка не содержащаго главной буквы. Легко доказать, что если этотъ остатокъ не равенъ нулю, то слѣдуетъ заключить, что многочлены A и B не имѣютъ общаго делителя, т. е. первые между собою. Дѣйствительно, мы видели, что остатокъ послѣ каждаго дѣяствія, а потому онъ долженъ бы былъ быть делителемъ естественной главной буквы. Для этого о. н. д. самъ не можетъ содержать главной буквы, но въ такомъ случаѣ, чтобы онъ могъ раздѣлять A и B , онъ долженъ дѣлать каждый коэффициентъ A и B на себя въ точномъ количествѣ, а это невозможно, такъ какъ эти коэффициенты не имѣютъ общаго множителя (они заключаются въ α и β).

Итакъ, въ этомъ случаѣ, когда остатокъ не равенъ нулю, A на B (или B на A) не дѣлится, т. е. A и B не имѣютъ общаго делителя, что и требовалось доказать. (См. примечаніе на стр. 98.)

$$\begin{array}{r} 3x^5 - 6x^4 - 18x^3 - 12x^2 - 39x - 18 \\ - (3x^5 - 6x^4 - 18x^3 - 12x^2 - 39x - 18) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3 = 6x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 24x - 10$$

Значитъ, степень буквы x ниже чѣмъ въ делителѣ, поэтому первое дѣленіе закончено, оно показываетъ, что B не есть о. н. д.

Слѣд. теорія, теперь нужно делителя раздѣлить на первый остатокъ. Но, такъ какъ что члены остатка имѣютъ общаго множителя 2, первого съ новымъ делителемъ, мы на основаніи теоремы I можемъ сократить этотъ остатокъ на 2, не вѣдая этихъ о. н. д. Черезъ это новый делитель упростится и будетъ равенъ

$$3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5.$$

Для избѣжанія дробныхъ коэффициентовъ въ частномъ и въ остаткахъ, умножимъ новое делимое на 3, что возможно, такъ какъ 3 есть количество первое по отношению къ делителю. Имѣемъ:

$$\begin{array}{r} 3x^5 - 6x^4 - 18x^3 - 12x^2 - 39x - 18 \\ - 3(3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5) \\ \hline - 10x^5 - 12x^4 + 24x^3 + 44x + 18 \dots \text{остатокъ} \\ - 5x^4 - 6x^3 - 12x^2 - 22x - 9 \dots \text{остатокъ, по раздѣленіи на 2} \\ - 15x^4 - 18x^3 - 36x^2 - 66x - 27 \dots \text{остатокъ, по умноженіи на 3} \\ \hline + 15x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 60x - 27 \\ \hline 2x^3 - 6x^2 - 6x - 2 \end{array}$$

Степень главной буквы въ первомъ остаткѣ не ниже чѣмъ въ дѣлителѣ, а это дастъ возможность продолжать дѣленіе. Но такъ какъ коэффициентъ перваго члена остатка не дѣлится на коэффициентъ перваго члена дѣлителя, то мы условимся считать второе дѣленіе законченнымъ, и полученный остатокъ — окончательнымъ въ этомъ дѣленіи. Теперь, слѣдуя теоріи, мы должны искать о. н. д. между $3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5$ и полученнымъ остаткомъ; при этомъ, остатокъ принимаемъ за дѣлимое, а дѣлителя оставляемъ прежняго. Приступая къ новому дѣленію, сокращаемъ дѣлимое на 2 и умножаемъ его на 3, что позволительно, потому что ни 2, ни 3 не входятъ множителями въ дѣлитель. Чтобы не переписывать дѣлителя, продолжають дѣленіе въ томъ же столбцѣ, только членъ частнаго (-5) отдѣляютъ отъ частнаго прежняго дѣленія запятою, чтобы этимъ показать, что -5 не принадлежитъ къ числу членовъ одного и того же частнаго, а есть частное новаго, особаго, дѣленія.

Это дѣленіе дастъ остатокъ $2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$, и вопросъ приведенъ къ отысканію о. н. д. между этимъ остаткомъ и дѣлителемъ. Во избѣжаніе дробныхъ коэффициентовъ въ частномъ и остаткахъ, сокращаемъ дѣлителя на 2, и дѣлимъ

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5 : x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 3x + 1 \\ \underline{3x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 3x + 5} \\ -5x^3 - 15x^2 - 15x - 5 \\ \underline{-5x^3 - 15x^2 - 15x - 5} \\ 0 \end{array}$$

Послѣдній дѣлитель $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ и есть о. н. д. многочленовъ А и В.

Итакъ, мы нашли, что $d = 3ab^2$, а $D = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; сл. о. н. д. данныхъ многочленовъ М и N, или

$$\Delta = d, D = 3ab^2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 3ab^2x^3 + 9ab^2x^2 + 9ab^2x + 3ab^2.$$

86. Приводимъ еще примѣры.

I. Найти о. н. д. многочленовъ:

$$\begin{aligned} M &= 2a^3x^5 - 28a^2x^4 + 142a^2x^3 - 30a^2x^2 + 240a^2x \text{ и} \\ N &= 3ax^5 - 30ax^4 + 87ax^3 - 60ax^2. \end{aligned}$$

Выносимъ за скобки общихъ множителей членовъ каждого многочлена:

$$\begin{aligned} M &= 2a^3x(x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120), \\ N &= 3a(x^5 - 10x^4 + 29x^3 - 20x^2). \end{aligned}$$

Отсюда имѣемъ: $d = a$.

Ищемъ о. н. д. многочленовъ, заключенныхъ въ скобки.

Первое дѣленіе.

$$\begin{array}{r} x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 : x^3 - 10x^2 + 29x - 20 \\ \underline{x^4 + 10x^3 + 29x^2 + 20x - 4} \\ 4x^3 + 42x^2 - 134x + 120 \\ \underline{\pm 4x^3 + 40x^2 + 116x - 80} \\ 2x^2 - 18x + 40 \end{array}$$

Умноживъ предварительно М на 4, дѣлимъ

$$\begin{array}{r}
 4x^3 - 8x^2 - 12x + 20x - 48 \quad 4x^3 - 6x^2 - 6x + 5 \\
 4x^3 + 6x^2 + 6x^2 + 5x \quad x^2 - 1 \\
 2x^3 - 6x^2 - 15x - 48, \text{ умноживъ на } 2: \\
 4x^3 - 12x^2 + 30x - 96 \\
 4x^3 - 6x^2 + 6x + 5 \\
 \hline
 -18x^2 + 36x - 101
 \end{array}$$

Умноживъ дѣлителя на 9, дѣлимъ его на послѣдній остатокъ:

$$\begin{array}{r}
 36x^2 - 54x^2 - 54x + 45 \quad | -18x^2 + 36x - 101 \\
 36x^2 - 72x^2 + 202x \quad | -2x - 7 \\
 126x^2 - 256x - 45 \\
 126x^2 - 252x + 707 \\
 \hline
 -4x - 662
 \end{array}$$

Раздѣливъ остатокъ на (-2) , дѣлимъ

$$\begin{array}{r}
 18x^2 - 36x + 101 \quad 2x + 331 \\
 -18x^2 + 2979x \quad 9x^2 - 3015 \\
 \hline
 3015x + 101, \text{ умноживъ на } 2: \\
 -6030x + 202 \\
 -6030x - 997965 \\
 \hline
 +998167
 \end{array}$$

При послѣднемъ дѣленіи мы нашли остатокъ, не содержащій главной буквы, *не равный нулю*, то заключаемъ, что данные многочлены не имѣютъ никакого общаго дѣлителя.

IV. Найти о. и. д. многочленовъ

$$\begin{aligned}
 a^3(b^2 + 2bc + c^2) - a^2b(2b^2 - 3bc + c^2) - ab^3(b + c) \text{ и} \\
 a^2(b^2 - c^2) - ab(2b^2 + bc - c^2) + b^3(b + c).
 \end{aligned}$$

Принявъ a за главную букву, посмотримъ, не имѣютъ ли коэффициенты каждаго многочлена общихъ множителей; и для этого разложимъ коэффициенты на множители. Имѣемъ

$$\begin{aligned}
 b^2 - 2bc + c^2 &= (b - c)^2; \\
 2b^2 - 3bc + c^2 &= 2b^2 - 2bc - bc + c^2 = 2b(b - c) - c(b - c) = (b - c)(2b - c); \\
 b^2 - c^2 &= (b + c)(b - c); \\
 2b^2 + bc - c^2 &= b^2 + b^2 + bc - c^2 = b(b + c) + (b + c)(b - c) = (b + c)(2b - c).
 \end{aligned}$$

Такимъ образомъ находимъ, что всѣ члены перваго многочлена имѣютъ общаго множителя $a(b + c)$, всѣ члены втораго: $(b + c)$; слѣд. можемъ представить многочлены въ видѣ:

$$\begin{aligned}
 a(b + c)\{b(b - c)a^2 - b(2b - c)a - b^3\} \text{ и} \\
 (b + c)\{b(b - c)a^2 - b(2b - c)a + b^3\}.
 \end{aligned}$$

отсюда видно, что $d = b + c$. Затѣмъ, сокративъ первый многочленъ на c , второй на $b + c$, и помноживъ всѣ члены перваго на $b + c$, дѣлимъ

$$\begin{array}{r|l} +b^3a^3 - 2b^3a + b^4 & +b|a^3 - 2b^2a + b^3 \\ +c^3 & +b^2c \\ +b^2c & -b^3c \\ +bc^2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} b + c \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -b^3a^3 + 2b^3a - b^4 & \\ +c^3 & +b^2c \\ +b^2c & -b^3c \\ +bc^2 & \end{array}$$

$$2b^2c \cdot a - 2b^3c, \text{ или, по сокращеніи на } 2b^2c: \\ a - b$$

Затѣмъ, дѣлимъ

$$\begin{array}{r|l} +ba^3 - 2b^3a + b^4 & a - b \\ -c & +bc \\ \hline -b^3a^3 + b^4a & +b|a - b^2 \\ +c & -c \\ \hline -b^2 \cdot a - b^3 & \\ b^2 \cdot a - b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Итакъ, $D = a - b$. А потому

$$\Delta = d \cdot D = (b + c)(a - b).$$

87. Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующее

Правило. — Чтобы найти о. и. д. двухъ многочленовъ, нужно: (начала исключить общіе однокленные множители каждаго многочлена; причемъ, если случится, что одинаковые множители имѣютъ и. н. д., то послѣдній слѣдуетъ впоследствии ввести множителемъ въ составъ искомаго об. и. д.).

Затѣмъ высшій многочленъ дѣлать на низшій, преобразовавъ предварительно дѣлитель такъ, чтобы первый членъ его (предполагая, что многочлены расположены по степенямъ одной буквы) дѣлился на первый членъ дѣлителя.

Въ полученномъ отъ дѣленія остаткѣ сокращаютъ всѣхъ множителей общіе коэффициенты главной буквы, и дѣлать прежнимъ дѣлителемъ на тотъ остатокъ, поступая попрежнему.

Затѣмъ дѣлать первый остатокъ на второй и т. д., продолжая эти послѣдовательныя дѣленія до тѣхъ поръ, пока или получится остатокъ нуль, — и тогда послѣдній дѣлитель есть искомый о. и. д.; или въ остаткѣ получится выраженіе, не содержащее главной буквы. — и тогда данныя выраженія суть количества, равныя между собою, если умножить общаго множителя, независимаго отъ главной буквы, и не прекративъ еще въ началѣ дѣйствій.

При выполнении последовательных делений слѣдуетъ умножать промежуточные остатки на такихъ множителей, чтобы первые члены ихъ отбросились на первый членъ дѣлителя.

88. Иногда процессъ нахожденія о. н. д. можно ускорить на основаніи слѣдующей теоремы.

Теорема. (1). *н. д. двухъ полиномовъ А и В, содержащихъ главную букву x, тотъ же, что и о. н. д. выражений $pA + qB$ и $rA + sB$, въ которыхъ p, q, r, s —любые положительные или отрицательные количества, независимыя отъ x.*

Во-первыхъ, очевидно, что всякій множитель общій полиномамъ А и В, будетъ также общимъ множителемъ и выражений $pA + qB$ и $rA + sB$.

Во-вторыхъ, очевидно, что всякій множитель, общій выражениямъ $pA + qB$ и $rA + sB$, служитъ также множителемъ выражения $s(pA + qB) - q(rA + sB)$, или выражения $(sp - qr)A - A$ какъ $sp - qr$ не содержитъ x, то всякій множитель, общій выражениямъ $pA + qB$ и $rA + sB$, долженъ быть множителемъ полинома А, если только не будетъ $sp - qr = 0$. Подобно этому, всякій множитель, общій выражениямъ $pA + qB$ и $rA + sB$, будетъ также множителемъ и выражения $r(pA + qB) - p(rA + sB)$, т. е. выражения $(rq - ps)B$, и слѣд. полинома В.

Такимъ образомъ доказано, что всякій множитель, общій полиномамъ А и В, служитъ общимъ множителемъ и для $pA + qB$ и $rA + sB$, и обратно, о. н. д. двухъ послѣднихъ выражений будетъ также общимъ множителемъ и для А и В; а сл. н. д. у А и В таковъ же какъ и у $pA + qB$ и $rA + sB$.

Примѣръ. Найти о. н. д. полиномовъ

$$3x^3 + 10x^2 + 7x - 2 \dots (1) \quad \text{и} \quad 3x^3 + 13x^2 + 17x - 6 \dots (2)$$

$$\text{Вычтя (1) изъ (2), имѣемъ } 3x^2 - 10x - 8 \dots (3)$$

Умноживъ (1) на 3 и сложивъ со (2), получимъ

$$x(12x^2 + 43x + 38) \dots (4)$$

$$\text{Слѣд. искомый о. н. д. тотъ же, что у (3) и у } 12x^2 + 43x + 38 \dots (5)$$

Умноживъ (3) на 4 и вычтя изъ (4), имѣемъ $3(x + 2)$. Слѣд. иск. о. н. д. = о. н. д. (3) и $x + 2$.

Но (3) при $x = -2$ обращается въ 0, слѣдоват., искомый о. н. д. = $x + 2$.

89. Общій наивысшій дѣлитель нѣсколькихъ многочленовъ. — Пусть требуется найти о. н. д. нѣсколькихъ многочленовъ Р, Q, R и S. Найдёмъ о. н. д. между какими-нибудь двумя изъ данныхъ многочленовъ, напр. Р и Q, и назовъ его буквою D, замѣчаемъ, что D есть нечто иное, какъ произведеніе всѣхъ множителей, общихъ многочленамъ Р и Q. — Если теперь найдёмъ о. н. д. между D и R, то, назвавъ его буквою D', замѣчаемъ, что D' есть произведеніе всѣхъ множителей, общихъ D и R; а какъ D есть произведеніе всѣхъ множителей, общихъ Р и Q, то D' есть произведеніе всѣхъ множителей, общихъ Р, Q и R. Найдя затѣмъ о. н. д. для D' и S, пусть онъ будетъ D'', — увидимся, что онъ будетъ = произведенію всѣхъ множителей, общихъ многочленамъ Р, Q, R и S. Поэтому D'' и будетъ о. н. д. данныхъ многочленовъ.

Отсюда

Правило.— Чтобы найти о. н. д. нѣсколькихъ многочленовъ, находятъ его сперва между какими-нибудь двумя многочленами; потомъ

найденным o , n , d и третьим данным многочленом; затем вновь найденным o , n , d и четвертым многочленом и т. д. Последний o , n , d и будет требуемый.

Примеръ. Найти o , n , d многочленовъ

$$P = 8x^3 - 12x^2y - 10xy + 15y^3,$$

$$Q = 6x^3 + 12x^2 - 9x^2y - 18xy,$$

$$R = 6x^3 - 13xy + 6y^3,$$

$$S = 4x^3 - 9y^3.$$

o , n , d многочленовъ R и S равенъ $2x - 3y$; o , n , d многочленовъ P и Q равенъ $2x - 3y$; наконецъ o , n , d для Q и $2x - 3y$ есть также $2x - 3y$. Слѣдов. o , n , d всѣхъ четырехъ многочленовъ есть $2x - 3y$.

90. Наимизшее кратное алгебраическихъ выраженій. — Кратнымъ данного цѣлаго выраженія наз. такое другое цѣлое выраженіе которое на данное дѣлится нацѣло. Такъ $12a^4x^3y$ есть кратное выраженія $2a^2x$. Очевидно, что для данного выраженія существуетъ безчисленное множество кратныхъ.

Такъ, для $x - y$ кратными будутъ: $(x - y)^2$, $(x - y)^3$, $(x - y)^4$, . . . $x^3 - y^3$, $x^3 - y^3$, $x^4 - y^4$ и т. д.

Общимъ кратнымъ двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій наз. такое, которое на всѣ данныя дѣлится безъ остатка. Такъ, если данныя выраженія суть:

$$2a^2b, \quad 3(a - b)^2, \quad a^2 - b^2;$$

то общимъ кратнымъ ихъ будутъ:

$$6a^3b(a - b)^2(a + b);$$

$$12a^4b^3(a - b)^4(a + b);$$

$$72a^4b^3(a - b)^2(a + b)^3 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что для данныхъ выраженій существуетъ безчисленное множество общихъ кратныхъ.

Наимизшимъ кратнымъ данныхъ выраженій, расположенныхъ по степенямъ одной буквы, называется ихъ общее кратное, низшей степени относительно этой буквы.

Когда данныя выраженія — одночлены, то для составленія наимизшаго кратнаго нужно перемножить всѣ простые множители, взявъ каждый изъ нихъ съ наибольшимъ показателемъ. Такъ, если даны одночлены $10a^6b^3$, $12a^3b^3$, $6a^4bc^2d$, то, взявъ всѣхъ простыхъ множит. въ высшихъ степеняхъ, т.-е. 2^3 , 3 , 5 , a^6 , b^3 , c^2 и d , найдемъ н. кр. $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^6 \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot d$ или $60a^6b^3c^2d$.

Такимъ же образомъ составляется и наимизшее кратное многочленовъ, когда послѣдніе легко разлагаются на множители. Приведемъ примѣры.

I. Найти н. к. для $x^3 - a^3$ и $x^3 - a^3$.

$$x^3 - a^3 = (x + a)(x - a);$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2).$$

II. кр. = $(x + a)(x - a)(x^2 + xa + a^2) = x^4 + ax^3 - a^3x - a^4$.

II. Найти н. кр. полиномовъ:

$$x^3 + 2x^2y - xy^3 - 2y^3 \quad \text{и} \quad x^3 - 2x^2y - xy^3 + 2y^3.$$

По разложеніи на множители, первый даетъ

$$x(x^2 - y^3) + 2y(x^2 - y^3) = (x + 2y)(x^2 - y^3);$$

а второй

$$x(x^2 - y^3) - 2y(x^2 - y^3) = (x - 2y)(x^2 - y^3).$$

$$\text{Наин. кр.} = (x^2 - y^3)(x + 2y)(x - 2y) = (x^2 - y^3)(x^2 - 4y^2).$$

91. Если разложеніе многочленовъ на множители представляет затрудненіе, то можно пользоваться слѣдующимъ приѣмомъ.

Пусть A и B — данные многочлены, а D — ихъ о. н. д. Назвавъ частіями отъ раздѣленія многочленовъ A и B на D буквами A' и B' , получимъ: $A = A'D$ и $B = B'D$. По свойству о. н. д. A' и B' суть выраженія первыя между собою, а слѣд. ихъ наин. кр. = $A'B'$. Очевидно, что выраженіе наименьшей степени, дѣлящееся на $A'D$ и $B'D$, есть $A'B'D$. Итакъ, наин. кр. многочленовъ A и B есть $A'B'D$. . . (1) Это выраженіе можно также представить въ видѣ $A'B$, если $B'D$ замѣнить черезъ B ; или, въ видѣ $B'A$, замѣнивъ $A'D$ черезъ A . Наконецъ, перемноживъ: $A = A'D$ и $B = B'D$ найдемъ, $A'B'D^2 = AB$; раздѣливъ обѣ части на D , получимъ: $A'B'D = \frac{AB}{D}$. Итакъ, наин. кр. можетъ быть представлено въ каждой изъ слѣдующихъ формъ:

$$A'B'D, \quad AB', \quad BA' \quad \text{и} \quad \frac{AB}{D}.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило нахожденія наимизшаго кратнаго двухъ многочленовъ: находятъ ихъ о. н. д.; дѣлятъ на него одно изъ данныхъ выраженій, и полученнымъ частнымъ умножаютъ другое; или: произведеніе данныхъ многочленовъ дѣлятъ на ихъ о. н. д.; или: о. н. д. множатъ на частіи, произходящія отъ раздѣленія данныхъ многочленовъ на этого наив. дѣлителя.

Примѣчаніе I. Раздѣливъ н. к. $A'B'D$ на $A'D$ (или A), находимъ въ частномъ B' ; а раздѣливъ на $B'D$ (или B), въ частномъ получаемъ A' ; но A' и B' выраженія первыя между собою, сл. можно дать наименьшему кратному такое опредѣленіе: это есть такое кратное данныхъ выраженій, которое по раздѣленіи на нихъ, даетъ частіи первыя между собою.

Примѣръ. Найти н. к. многочленовъ

$$a^3 - ab - 12b^3 \quad \text{и} \quad a^3 + 5ab + 6b^3.$$

О. н. д. ихъ = $a + 3b$. Раздѣливъ первое выраженіе на $a + 3b$, находимъ въ частномъ $a - 4b$. Умноживъ второе выраженіе на это частное, найдемъ иско-
мое н. к.

$$\text{Итакъ, н. к.} = (a^3 + 5ab + 6b^3)(a - 4b) = a^4 + a^2b - 14ab^2 - 24b^3.$$

Примѣчаніе II. Мы нашли, что наин. кр. для A и B равно $\frac{AB}{D}$; отсюда, назвавъ наин. кр. буквою L , имѣемъ

$$L \cdot D = A \cdot B,$$

... деление двух данных выражений равно произведению на нани.
... **б. нани. дѣлитель.**

92. Если M есть н. к. для A и B , то очевидно, что всякое кратное коли-
... M есть общее кратное для A и B .

93. Всякое общее кратное двух алгебраических выражений есть
... их наименьшее кратное.

... A и B — два данных выражений, M — их н. к., и пусть N озна-
... какое-либо общее кратное. Допустимъ, если возможно, что при дѣлении N
... получается остатокъ R (при частномъ Q). Въ такомъ случаѣ $R = N - QM$
... A и M дѣлится на A , сл. и R дѣлится на A ; N и M дѣлится на B , сл. и
... дѣлится на B (§ 81). Но R есть выражение *нижней* степени чѣмъ M ; сл.
... является общее кратное количество A и B *нижней* степени, чѣмъ их н. к.
... — нелѣпность; сл. остатокъ R не существуетъ, т.-е. N есть кратное коли-
... M .

94. Пусть требуется найти н. к. нѣсколькихъ многочленовъ, напр., трехъ:
... B и C . Найдемъ н. к. двухъ изъ нихъ, напр. A и B ; пусть оно будетъ M .
... найдемъ н. к. для M и C ; пусть оно будетъ L . Докажемъ, что L и бу-
... служить н. к. для A , B и C .

Назовемъ н. кр. A , B и C буквою x . Всякое общее кратное количество M
... есть общее кратное и для A , B и C (§ 92); слѣд. L должно дѣлиться на
... x . Всякое общее кратное A и B есть кратное и для M (§ 93); сл. всякое об-
... кратное A , B и C есть общее кратное и для M и C ; слѣд. x должно дѣ-
... литься на L .

Итакъ, L должно дѣлиться на x , а x на L ; поэтому $x = L$, и правило до-
казано.

Примѣчаніе. — Нахожденіе нани. кр. имѣетъ приложение въ приведеніи
дробей къ общему знаменателю. О. и. д. въ элементарной алгебрѣ прилагается
къ сокращенію дробей; въ Высшей Алгебрѣ онъ имѣетъ другія, важнѣйшія при-
именія, именно въ теоріи уравненій.

ГЛАВА IX.

Алгебраическія дроби.

Определение. — Основное свойство алгебраической дроби. Сокращеніе алгебраиче-
скихъ дробей и приведеніе къ общему знаменателю. — Четыре основныя дѣйствія
надъ дробями.

95. Определеіе. — Мы видѣли, что когда дѣленіе одного алгебраическаго
выраженія на другое невозможно, то дѣйствіе только обозначать: дѣлителя
пишутъ подъ дѣляимымъ, отдѣляя ихъ горизонтальною чертою. Такимъ образомъ
частное отъ раздѣленія A на B изображается въ формѣ

$$\frac{A}{B}.$$

Такое выраженіе называется *алгебраическою дробью*, причемъ дѣляимое по-
лучаетъ названіе *числителя*, а дѣлитель *знаменателя*. Итакъ, *алгебраиче-
ская дробь есть частное отъ раздѣленія числителя на знаменателя*.

Между дробями — арифметическою и алгебраическою есть существенная разница: въ самомъ дѣлѣ, числитель и знаменатель арифметической дроби суть числа цѣлыя и абсолютныя, между тѣмъ какъ члены алгебраической дроби могутъ быть какъ цѣлыми, такъ и дробными, какъ положительными, такъ и отрицательными, и вообще какими угодно алгебраическими выраженіями. Такимъ образомъ, понятіе объ алгебраической дроби *общее*, нежели объ арифметической, а отсюда вытекаетъ необходимость вывода свойствъ алгебраической дроби и доказательства правилъ дѣйствій надъ этими дробями независимо отъ вывода этихъ свойствъ и правилъ для дроби арифметической.

Выводъ упомянутыхъ свойствъ и правилъ долженъ вытекать изъ самого опредѣленія алгебраической дроби какъ частнаго отъ раздѣленія числителя на знаменателя.

96. Основное свойство алгебраической дроби состоитъ въ томъ, что величина ея не измѣнится, если числителя и знаменателя умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же количество. Докажемъ это.

Пусть величина дроби $\frac{A}{B}$ равна Q :

$$\frac{A}{B} = Q \dots (1).$$

Замѣчая, что дѣльное произведенію дѣлителя на частное, имѣемъ

$$A = B \cdot Q.$$

Означивъ буквою M какое-ниб. количество, умножимъ на него каждую изъ равныхъ величинъ A и $B \cdot Q$, вслѣдствіе чего получимъ и произведенія равныя:

$$AM = BQM;$$

или, перемѣнивъ мѣста производителей Q и M во второй части,

$$AM = BM \times Q.$$

Это равенство показываетъ, что Q , будучи умножено на BM , даетъ въ произведеніи AM ; слѣд. Q есть частное отъ раздѣленія AM на BM ; такимъ образомъ:

$$\frac{AM}{BM} = Q.$$

Но Q есть ничто иное какъ $\frac{A}{B}$ [см. (1)]; слѣд.

$$\frac{AM}{BM} = \frac{A}{B} \dots (2).$$

Это равенство показываетъ, что дробь $\frac{AM}{BM}$ можетъ быть замѣнена дробью $\frac{A}{B}$, т.е. что *величина дроби не измѣнится, если числитель и знаменатель раздѣлимъ на одно и то же количество*.

На этомъ свойствѣ основано упрощеніе дроби *сокращеніемъ*.

Равенство (2) показываетъ также, что, наоборотъ, дробь $\frac{A}{B}$ можетъ быть

АМ
ВМ. т.-е. что величины дроби не изменятся, если числи-
тель и знаменатель помножимъ на одно и то же количество.

Изъ свойствъ основано приведеніе дроби къ общему знаменателю.

§7 Сокращеніе. Для сокращенія дроби нужно ея числителя и знамена-
тель разделить на ихъ общаго наивысшаго дѣлителя: отъ этого величина ея
не измѣнится, но дробь будетъ приведена въ простѣйшій видъ, такъ какъ част-
ныя раздѣленія ея членовъ на ихъ о. н. д. будутъ количества первая
и вторая собою.

Приведите нѣсколько примѣровъ.

I. Сократить дробь

$$\frac{4a^3b^2x^4z}{60a^2bx^6z}$$

О. н. д. числителя и знаменателя есть $12a^2bx^4$. Раздѣливъ на это коли-
чество оба члена дроби, имѣемъ:

$$\frac{4abz}{5x^2}$$

II. Сократить дробь

$$\frac{36a^3b^2 - 36a^3b^4}{54a^4b^3 - 108a^3b^4 + 54a^2b^5}$$

Когда ч. и з. суть многочлены, легко поддающіеся разложенію на множи-
тели, то о. н. д. для нихъ находимъ этимъ способомъ:

$$\frac{36a^3b^2 - 36a^3b^4}{54a^4b^3 - 108a^3b^4 + 54a^2b^5} = \frac{36a^3b^2(a^2 - b^2)}{54a^2b^3(a^2 - 2ab + b^2)} = \frac{18a^2b^2(a - b)(2a + b)}{18a^2b^3(a - b)(3b(a - b))}$$

Замѣчая, что о. н. д. членовъ дроби равенъ $18a^2b^2(a - b)$, мы, раздѣливъ
на него числителя и знаменателя, получимъ:

$$\frac{2a(a + b)}{3b(a - b)}$$

III. Сократить дробь

$$\frac{x^4 + a^4}{x^5 + ax^4 + a^4x + a^5}$$

Знаменатель $= x^4(x + a) + a^4(x + a) = (x + a)(x^4 + a^4)$.

Числитель $= (x^4)^2 + (a^4)^2 = (x^4 + a^4)[(x^4)^2 - x^4a^4 + (a^4)^2] =$
 $= (x^4 + a^4)(x^8 - x^4a^4 + a^8)$.

По раздѣленіи обоихъ членовъ дроби на о. н. д. $x^4 + a^4$, находимъ:

$$\frac{x^4 - x^4a^4 + a^8}{x + a}$$

Въ этомъ примѣрѣ о. н. д. былъ $x^4 + a^4$, ибо $x^8 - x^4a^4 + a^8$, не обра-
щаясь въ ноль при $x = -a$, не дѣлится на $x + a$.

IV. Сократить дробь

$$\frac{bc(b - c) - ac(a - c) + ab(a - b)}{b^2c(b - c) - a^2c(a - c) - a^2b^2(a - b)}$$

Числитель $c\{b(b-c) - a(a-c)\} - ab(a-b) - c(a-b)(c-a-b) +$
 $+ ab(a-b) - (a-b)\{c(c-a) - bc + ab\} - (a-b)(a-c)(b-c).$

Въ § 54, 5, мы видѣли, что знаменатель $(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc).$ Итакъ, видно, что о. н. д. числителя и знаменателя есть $(a-b)(a-c)(b-c);$ раздѣливъ на него оба члена дроби, получимъ

$$\frac{1}{ab+ac+bc}$$

V. Сократить дробь

$$\frac{(x+y)^3 - (x^3 - y^3)}{(x+y)^3 - (x^3 - y^3)}.$$

Оба члена числителя и оба члена знаменателя дѣлятся на $x+y$; раздѣливъ ихъ на этотъ биномъ, получимъ дробь

$$\frac{(x+y)^3 - (x^3 - x^2y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)}{(x+y)^3 - (x^3 - x^2y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)}.$$

Раскрывъ скобки въ числитель и знаменатель и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ

$$\frac{5x^3y + 5x^2y^2 + 5xy^3}{3xy}, \text{ или, сокративъ на } xy, \frac{5}{3}(x^2 + xy + y^2).$$

VI. Сократить дробь

$$\frac{2x^3 - 15x^2 + 37x - 15}{x^3 - 8x^2 + 13x^2 + 57x^2 - 198x + 135}.$$

Въ этомъ примѣрѣ разложеніе числителя и знаменателя на множители представляетъ затрудненія; поэтому опредѣлимъ о. н. д. способомъ послѣдовательныхъ дѣленій. Такимъ образомъ найдемъ, что о. н. д. $x^3 - 7x^2 - 15.$ Сокративъ дробь, найдемъ

$$\frac{2x-1}{x^3 - x^2 - 9x + 9}.$$

98. Приведеніе дробей къ общему знаменателю.—Здѣсь слѣдуетъ различать тѣ же случаи какъ и въ арифметикѣ:

1. Если каждое два знаменателя суть выраженія взаимно-простыя, нужно числителя и знаменателя каждой дроби помножить на произведеніе знаменателей прочихъ дробей. Черезъ это общій знаменателемъ всѣхъ дробей будетъ произведеніе всѣхъ знаменателей или ихъ взаимное кратное, т.е. общій знаменатель будетъ имѣть простѣйшую форму.

Поступая сказаннымъ образомъ надъ дробями

$$\frac{3}{2a}, \frac{m}{3b^2} \text{ и } \frac{n}{a+b},$$

знаменатели которыхъ — количества взаимно-простыя, найдемъ:

$$\text{вмѣсто первой дроби } \frac{3 \cdot 3b^2(a+b)}{2a \cdot 3b^2(a+b)}, \text{ или } \frac{9b^2(a+b)}{6ab^2(a+b)};$$

$$\text{вмѣсто второй дроби } \frac{m \cdot 2a(a+b)}{3b^2 \cdot 2a(a+b)}, \text{ или } \frac{2am(a+b)}{6ab^2(a+b)};$$

$$\text{вмѣсто третьей дроби } \frac{n \cdot 2a \cdot 3b^2}{2a \cdot 3b^2(a+b)}, \text{ или } \frac{6ab^2n}{6ab^2(a+b)}.$$

Когда знаменатели данных дробей имеют общий множитель, то наименьшее кратное знаменателей опять принимаем за общего знаменателя; затем находим наим. кр. на знаменателя каждой дроби и полученным частным умножаем числителя и знаменателя соответствующей дроби. Приведем примеры

Привести к общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{4(1-x^2)}, \frac{b}{8(1-x)}, \frac{c}{2(1+x)}, \frac{d}{1+x^2}.$$

Разлагая знаменатели на простые множители, получим:

$$4(1-x^2) = 2^2 \cdot (1-x)(1+x); \quad 8(1-x) = 2^3 \cdot (1-x);$$

оставшиеся два знаменателя остаются в данной форме. Наим. кр. знаменателей, или об. знам. —

$$= 2^3 \cdot (1+x)(1-x)(1+x^2), \text{ или } 8(1-x^4).$$

Разделив об. знам. на знаменатели первой дроби и умножив полученным частным $2(1+x^2)$ оба члена дроби, получим:

$$\frac{2a(1+x^2)}{8(1-x^4)}.$$

Разделив об. знам. на знаменатели второй дроби и помножив полученным частным $(1+x)(1+x^2)$ оба члена ее, найдем:

$$\frac{b(1+x)(1+x^2)}{8(1-x^4)}.$$

Поступая подобным же образом с двумя остальными дробями, выйдем к общему знаменателю:

$$\frac{4c(1-x)(1+x^2)}{8(1-x^4)} \text{ и } \frac{8d(1-x^2)}{8(1-x^4)}.$$

II. Привести к общему знаменателю дроби:

$$\frac{1}{x^2-4}, \frac{1}{x^2-3x+2}, \frac{1}{x^2-3x+2}.$$

Разлагая знаменатели на множители, найдем:

$$\begin{aligned} x^2-4 &= (x+2)(x-2); \\ x^2-3x+2 &= (x-2)(x-1); \\ x^2-3x+2 &= (x-2)(x-1). \end{aligned}$$

Наим. кратное знаменателей = $(x+2)(x-2)(x-1)(x-1)$ или $(x^2-4)(x^2-3x+2)$. Поступая как в примере I, найдем следующие, соответственно равные данным, дроби:

$$\frac{x^2-1}{x^2-4(x^2-1)}, \frac{(x+2)(x-1)}{(x^2-4)(x^2-1)}, \frac{(x-2)(x-1)}{(x^2-4)(x^2-1)}.$$

III. Привести к общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{b-c(a-d)}, \frac{b}{b-c(b-a)}, \frac{c}{c-a(c-b)}, \frac{d}{d-a(d-c)}.$$

Здѣсь знаменатели уже даны въ формѣ произведеній простыхъ множителей. Замѣтивъ, что $a - b$, $a - c$, $a - d$ и т. д. получаются изъ $b - a$, $c - a$, $d - a$, ... умноженіемъ на -1 , замѣняемъ данныя дроби слѣдующими:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \quad \frac{-b}{(b-c)(b-d)(a-b)}, \quad \frac{c}{(c-d)(a-c)(b-c)}, \quad \frac{-d}{(a-d)(b-d)(c-d)}.$$

Общій знаменатель $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$. Дѣля его на знаменателя каждой дроби поочередно, и умножая частнымъ оба члена соответствующей дроби, найдемъ искомыя дроби:

$$\frac{a(b-c)(b-d)(c-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)} = \frac{-b(a-c)(a-d)(c-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)};$$

$$\frac{c(a-b)(a-d)(b-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)} = \frac{-d(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}.$$

III. Можетъ случиться, что одинъ изъ знаменателей дѣлится на всѣхъ остальныхъ, т.-е. служить наиб. кратнымъ всѣхъ знаменателей; онъ и будетъ общимъ знаменателемъ.

Примѣръ. Привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \frac{b}{a^2 - b^2}, \quad \frac{c}{a^4 - b^4}.$$

Замѣчая, что $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$, находимъ, что знаменатель третьей дроби есть наиб. кр. всѣхъ знаменателей; онъ и будетъ общимъ знаменателемъ. Третью дроби, какъ уже извѣстную общаго знаменателя, оставимъ безъ перемѣны, а первыя двѣ приводимъ къ общему знаменателю премою, умноживъ въ пунктѣ 2. Такимъ образомъ найдемъ, что данныя дроби могутъ быть замѣнены слѣдующими:

$$\frac{a(a^2 - b^2)}{a^4 - b^4}, \quad \frac{b(a^2 + b^2)}{a^4 - b^4}, \quad \frac{c}{a^4 - b^4}.$$

39. Сложеніе и вычитаніе дробей.—Различаемъ два случая:

1. Сложить или вычесть дроби съ равными знаменателями:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}.$$

Положимъ, что

$$\frac{a}{m} = q_1; \quad \frac{b}{m} = q_2; \quad \frac{c}{m} = q_3.$$

Зная, что дѣлимое произведенію дѣлителя на частное, имѣемъ

$$a = mq_1, \quad b = mq_2, \quad c = mq_3.$$

Придавая къ равнымъ (a и mq_1) равныя количества (b и mq_2), получимъ и суммы равныя; слѣд.

$$a + b = mq_1 + mq_2;$$

вычитая изъ равныхъ (a и b и mq_1 и mq_2) равныя, найдемъ и остатки равныя; слѣд.

$$a + b - c = mq_1 + mq_2 - mq_3,$$

... из скобки m .

$$a - b - c = (q_1 + q_2 - q_3) \cdot m;$$

$$q_1 - q_2 - q_3 = \frac{a + b - c}{m}.$$

... q_1 , q_2 и q_3 из величинами, находим:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} - \frac{c}{m} = \frac{a + b - c}{m}.$$

... правило: чтобы сложить или вычесть дроби с равными знаменателями, надо сложить или вычесть числители и подь результата... подписать общую знаменателя.

... Когда данные дроби имеют различные знаменатели, то сперва привести их къ общему знаменателю, а затѣм поступаютъ по предыдущему...

Примеры. I. Найти сумму дробей

$$\frac{a^2 - ab}{a + b} + \frac{a^2 + ab}{a - b} + \frac{a^3 - b^3}{a}.$$

... приведенія къ общему знаменателю, имѣютъ

$$\frac{(a^2 - ab)(a - b)a + (a^2 + ab)(a + b)a + (a^3 - b^3)(a + b)(a - b)}{(a + b)(a - b)a} =$$

$$\frac{a^4 - 2a^3b + a^2b^2 + (a^4 + 2a^3b + a^2b^2) + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)}{(a^3 - b^3)a} = \frac{3a^4 + b^4}{a^3 - ab^3}.$$

II. Выполнить дѣйствія:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)(x-3)} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$

... приведенія къ общему знаменателю $(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x - 3)$, имѣютъ вѣдательно:

$$\frac{x(x+1)(x-2) - (x^2-4)(x-3) + (x^2-1)(x+2)}{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)} =$$

$$\frac{-x^3 - 2x - (x^3 - 3x^2 - 4x + 12) + (x^3 + 2x^2 - x - 2)}{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)} = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 14}{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}.$$

Числитель не обращается въ ноль при $x = 1, -1, +2, -2$ и $+3$, не дѣлится ни на одного множителя знаменателя, а потому результатъ не подлежитъ дальнѣйшему упрощенію.

III. Упростить выраженіе

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

... знаменатель $-(a-b)(b-c)(c-a)$; дѣля его на каждого изъ знаменателей по порядку, получаемъ частныя:

$$-(b-c), \quad -(c-a), \quad -(a-b).$$

По приведеніи къ общему знаменателю, получимъ

$$\frac{-a^3b - c - b^3(c-a) - c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Полагая въ числитель последовательно $a = b$, $b = c$ и $c = a$, замѣчаемъ, что онъ въ каждомъ случаѣ обращается въ ноль, а потому дѣлится на $(a - b)(b - c)(c - a)$. Это произведеніе открываемъ въ числитель разложеніемъ на множители:

$$\begin{aligned} a^3c - a^3b - b^3c &+ ab^3 - c^3(a-b) = c(a^3 - b^3) - ab(a^2 - b^2) - c^3(a-b) = \\ &= (a-b)\{c(a^2 + ab + b^2) - ab(a+b) - c^3\} = \\ &= (a-b)\{(a^3 - c^3)c - ab(a-c) - b^3(a-c)\} = \\ &= (a-b)(a-c)\{(a+c)c - ab - b^3\} = \\ &= (a-b)(a-c)\{a^2c - b^3 - (b-c)(c-b)\} = \\ &= (a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c) = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c). \end{aligned}$$

Итакъ, данное выраженіе равно

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = a+b+c.$$

IV. Упростить выраженіе

$$4b \mid \frac{(a-b)^2}{a}.$$

Если дроби соединены (плюсомъ или минусомъ) съ цѣлымъ выраженіемъ, то, помноживъ цѣлое и раздѣливъ на знаменателя дроби, получимъ сумму или разность двухъ дробей. Такъ, данное выраженіе умножимъ и дѣленимъ $4b$ на a превращаемъ въ

$$\frac{4ab}{a} + \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{4ab + (a-b)^2}{a} = \frac{4ab + a^2 - 2ab + b^2}{a} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a} = \frac{(a-b)^2}{a}.$$

100. Умноженіе дробей. — Перемножить дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Положивъ

$$\frac{a}{b} = p \text{ и } \frac{c}{d} = q,$$

имѣемъ отсюда

$$a = bp \text{ и } c = dq.$$

Помноживъ равныя количества a и bp на равныя c и dq , пайдёмъ и произведенія равныя; слѣд.

$$ac = bp \cdot dq.$$

Перемѣнивъ во второй части мѣста сомножителей, получимъ

$$ac = bd \cdot pq,$$

откуда

$$p \cdot q = \frac{ac}{bd}.$$

т. е. подставивъ $\frac{a}{b}$ вмѣсто p , и $\frac{c}{d}$ вмѣсто q ,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \dots (1).$$

Отсюда правило: чтобы умножить дробь на дробь, надо числителя первой дроби помножить на числителя второй, знаменателя первой на знаменателя второй, и первое произведение разделить на второе.

Если въ равенствѣ (1) положимъ $d = 1$, оно обратится въ

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b \times 1};$$

замѣтивъ, что $\frac{c}{1}$ есть тоже что c , а $b \times 1$ равно b , имѣемъ:

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}.$$

Итакъ, чтобы умножить дробь на цѣлое выраженіе, надо числителя дроби умножить на это цѣлое, и произведеніе разделить на знаменателя дроби.

Положимъ въ равенствѣ (1) $b = 1$, получимъ

$$\frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{1 \times d}, \text{ или } a \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d},$$

откуда правило: для умноженія цѣлаго выраженія на дробь, надо цѣлое умножить на числителя дроби, и произведеніе разделить на ея знаменателя.

Примѣры. I. $\frac{a^4 - b^4}{a^2 - 2ab} \times \frac{a - b}{a^2 + ab} = \frac{(a^4 - b^4)(a - b)}{(a^2 - 2ab + b^2)(a^2 + ab)} =$

$$\frac{b^2(a + b)(a - b)(a - b)}{(a - b)^2 a(a + b)} \dots \text{окративъ дробь на } (a + b)(a - b)^2, \text{ получимъ}$$

чѣе произведеніе:

$$\frac{a^2 + b^2}{a}.$$

II. $\frac{3b}{a^2 - b^2} \times (a + b) = \frac{3b(a + b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{3b}{a - b}.$

III. $(a^4 - b^4) \times \frac{2a}{a^2 + b^2} = \frac{(a^4 - b^4) \cdot 2a}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \cdot 2a}{a^2 + b^2} =$
 $= (a^2 - b^2) \cdot 2a.$

Примѣчаніе.—Доказанное правило распространяется на какое угодно число дробей; такъ

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h} = \frac{aceg}{bdfh};$$

такъ же и въ дѣлѣ, по доказанному: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; умноживъ эту дробь на $\frac{e}{f}$

найдемъ $\frac{acg}{bdf}$; помноживъ эту дробь на четвертую $\frac{g}{h}$, найдемъ окончательное произведение

$$\frac{acg}{bdfh}.$$

Примѣръ. Вычислить

$$\frac{x^3 + y^3}{x^3} \times \frac{x-y}{y^3} \times \frac{(x+y)^5 - x^5 - y^5}{3x^2y - 3xy^2}.$$

Прилагая предыдущее правило, найдемъ

$$\frac{(x^3 + y^3)(x-y)(x^5 + y^5 - x^5 - y^5)}{(x^3 - y^3)(x+y)(x^2y - 3xy^2)}.$$

Замѣтивъ, что $(x+y)^5 - x^5 - y^5 = (x+y)(5x^4y + 5x^3y^2 + 5x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) - (x^5 + y^5) =$
 $(x+y)(5x^4y + 5x^3y^2 + 5x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 - x^5 - y^5) =$

представляемъ произведение въ видѣ

$$\frac{5xy(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) - (x^5 + y^5)}{3xy(x^2 - y^2)(x+y)(x-y)},$$

откуда, по сокращеніи, найдемъ

$$\frac{5(x^3 + y^3)}{3(x-y)}.$$

101. Дѣленіе дробей.—Пусть требуется раздѣлить $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Положимъ $\frac{a}{b} = p$ и $\frac{c}{d} = q$; имѣемъ отсюда

$$a = bp \quad \text{и} \quad c = dq.$$

Раздѣливъ равныя величины (a и bp) на равныя (c и dq), получимъ равныя; слѣд.

$$\frac{a}{c} = \frac{bp}{dq}.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на $\frac{d}{b}$, найдемъ

$$\frac{ad}{cb} = \frac{bpd}{dqdb}.$$

Сокративъ вторую дробь на bd , найдемъ

$$\frac{ad}{bc} = \frac{p}{q}.$$

Подставивъ вмѣсто p и q ихъ величины, получимъ

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \dots (1).$$

Отсюда правило: чтобы раздѣлить дробь на дробь, надо числителя первой дроби умножить на знаменателя второй, а знаменателя пер-

числителя второй, и первое произведение разделить на второе.
 Положив въ равенствѣ (1) $d=1$, найдемъ

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a \times 1}{bc} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

Тогда слѣдуетъ, что для раздѣленія дроби на цѣлое выраженіе надо:
 числитель раздѣлить на произведеніе знаменателя на цѣлое выраженіе.
 Положивъ въ равенствѣ (1) $b=1$, получимъ

$$\frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{1 \times c}, \quad \text{или} \quad a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c} \quad \dots (2).$$

Итакъ, чтобы раздѣлить цѣлое выраженіе на дробь, надо цѣлое умно-
 жить на знаменателя дроби и произведеніе раздѣлить на числителя.

Примѣчаніе I.—Двѣ величины A и B называются взаимно-обратными,
 если ихъ произведеніе равно 1. Итакъ, когда $A \cdot B = 1$, то A есть количество
 обратное величинѣ B , а B обратно количеству A . Изъ равенства $AB = 1$ нахо-
 димъ

$$A = \frac{1}{B} \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{A},$$

откуда заключаемъ, что обратная данной величины равна частному отъ раздѣ-
 ленія 1 на эту величину.

Очевидно, что дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{A}$ взаимно-обратны, потому что

$$\frac{A}{B} \times \frac{B}{A} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Имѣя въ виду это замѣчаніе, можемъ правило дѣленія на дроби выразить
 въ слѣдующей формѣ. Изъ правила умноженія дробей слѣдуетъ, что $\frac{ad}{bc}$ и $\frac{ad}{c}$
 можно представить въ видѣ произведеній: $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ и $a \times \frac{d}{c}$; а потому равен-
 ства (1) и (2) можно написать въ видѣ:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad \text{и} \quad a : \frac{c}{d} = a \times \frac{d}{c};$$

тогда видно, что для раздѣленія цѣлаго или дробнаго выраженія на дробь
 надо дѣлимое умножить на величину обратную дѣлителю.

Примѣчаніе II.—Мы нашли, что

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Величина дроби $\frac{ad}{bc}$ не измѣнится, если числителя и знаменателя раздѣлимъ
 на c . Сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{ad}{c}}{\frac{bc}{c}} = \frac{\frac{ad}{c}}{\frac{b}{1}} = \frac{ad}{b}.$$

Слѣд. при дѣленіи дроби на дробь можно поступать еще слѣдующимъ образомъ: числителя первой дроби раздѣлить на числителя второй, а знаменателя первой на знаменателя второй, и первое частное раздѣлить на второе.

Очевидно, что этотъ приемъ слѣдуетъ примѣнять только тогда, когда числит. и знамен. дѣляимаго дѣлится нацѣло на числ. и знамен. дѣлителя.

Примѣры. I. $\frac{2a(ab-b^2)}{(a+b)^2} : \frac{a(a^2-b^2)}{(a+b)^2 a(a-b)} = \frac{2b}{(a+b)^2}$

II. $7ax : \frac{14ax}{5by} = \frac{7 \cdot 5aby}{14ax} = \frac{5by}{2}$

III. $\frac{x^2 - a^2}{x^2 - 2ax + a^2} : \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2(x+a)^2} = \frac{(x-a)^2}{x^2 - a^2} \cdot \frac{(x+a)^2}{(x-a)^2} = \frac{(x+a)^2}{x^2 - a^2}$

IV. $\frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{x^2 - y^2} : \frac{a^2}{x^2 - y^2} = \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{a^2} = \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{a^2}$

Здѣсь числитель и знаменатель первой дроби дѣлятся соответственно на числ. и знамен. второй, сл. частное =

$$\frac{(a^3 + 3a^2 + 3a + 1)}{(x - y)^2 - (x + y)^2} \cdot \frac{(x + y)^2}{(x^2 - y^2)} = \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{x - y}$$

102. Приводимъ еще нѣсколько примѣровъ дѣленія надъ дробями.

I. Упростить выраженіе

$$1 - \frac{a - b}{1 + ab} = \frac{a(a - b)}{1 + ab}$$

Умножаемъ прежде всего числителя и знаменателя данной дроби на $1 + ab$, чтобы привести ихъ къ цѣлому виду; слѣдуетъ что, найдемъ:

$$\frac{a(1 + ab)}{1 + ab + a(a - b)}$$

Раскрывъ скобки въ числелѣ и знаменателѣ и сдѣлавъ привеженіе, найдемъ

$$\frac{a^2b + b}{1 + a^2}, \text{ или } \frac{b(1 + a^2)}{1 + a^2}, \text{ или } b.$$

Данное выраженіе равно, слѣдовательно, b .

II. Упростить выраженіе

$$\frac{\left(a - \frac{b^2}{a}\right) \left(a^3 - \frac{a^3 + ab^2}{a + b}\right)}{1 - \frac{a}{a + b}}$$

Чтобы привести оба члена дроби къ цѣлому виду, умножимъ ихъ на $a(a + b)$; при чемъ въ числитель первый множитель умножаемъ на a , второй на $a + b$. Такимъ образомъ найдемъ

$$\frac{(a^2 - b^2)(a^3 + a^2b - a^3 - ab^2)}{a(a + b) - a^2} = \frac{(a^2 - b^2)ab(a - b)}{ab} = (a^2 - b^2)(a - b).$$

III Помножить

$$\frac{4x^3y^2}{5a^3} - \frac{3x^2y^3}{2a^2b} + \frac{2xy^4}{3ab^2} - \frac{y^5}{b^3} \quad \text{на} \quad \frac{2x^2y}{3a} - \frac{3xy^2}{5ab} - \frac{3y^3}{2b^2},$$

т. е. оба сомножителя расположены по нисходящимъ степенямъ x .

$$\begin{array}{r} 4x^3y^2 \\ 5a^3 \\ - \\ 3x^2y^3 \\ 2a^2b \\ + \\ 2xy^4 \\ 3ab^2 \\ - \\ y^5 \\ b^3 \\ \hline 8x^5y^4 \\ 15a^5 \\ - \\ 12x^4y^4 \\ 25a^4b \\ + \\ 10x^3y^4 \\ 10a^3b^2 \\ - \\ 12x^2y^5 \\ 10a^2b^2 \\ + \\ 4xy^6 \\ 4ab^3 \\ - \\ y^7 \\ ab^4 \\ + \\ 3y^8 \\ 2b^5 \end{array}$$

IV Изъ полученнаго результата, это будетъ примѣръ дѣленія дробей, въ которомъ делимое расположено по степенямъ главной буквы.

$$\begin{array}{r} 13x^5y^3 : 71x^4y^2 : 2xy^7 : \frac{1}{5}x^4y^2 : \frac{1}{2}xy^3 : \frac{2xy^4}{ab^2} - \frac{y^5}{b^3} \\ \hline 12x^4y^4 - 3x^3y^5 + 37x^2y^6 - 2xy^7 \\ 25a^4b - 10a^3b^2 + 20a^2b^3 - 5ab^4 \\ \pm 25a^4b + 10a^3b^2 - 5a^2b^3 - 5ab^4 \\ - 1x^4y^5 + 9x^3y^6 - xy^7 + 3y^8 \\ - 5a^3y^5 + 9a^2y^6 - xy^7 - 3y^8 \\ - 5a^2y^5 + 4a^2b^3 - ab^4 - 2b^5 \end{array}$$

Опредѣленіе членовъ частнаго:

$$\begin{array}{l} 1. \quad \frac{8x^5y^3}{15a^5} : \frac{4x^4y^4}{5a^3} = \frac{8x^5y^3}{15a^5} : \frac{4x^4y^4}{5a^3} = \frac{2x^4y}{3a^2} \\ 2. \quad \frac{12x^4y^4}{25a^4b} : \frac{4x^3y^5}{5a^3} = \frac{12x^4y^4}{25a^4b} : \frac{4x^3y^5}{5a^3} = \frac{3xy^2}{5ab} \\ 3. \quad \frac{6x^3y^5}{5a^3b^2} : \frac{4x^2y^6}{5a^3} = \frac{6x^3y^5}{5a^3b^2} : \frac{4x^2y^6}{5a^3} = \frac{3y^3}{2b^2} \end{array}$$

ГЛАВА X.

Возвышеніе въ степень.

Опредѣленіе. Правила знаковъ и показателей. Степень произведенія и дроби. — Возвышеніе — одночлена въ степень. — Квадратъ и кубъ многочлена.

103. Опреѣленіе. — Въ этой главѣ мы рассмотримъ возвышеніе въ цѣлую положительную степень.

Возвысить количество въ какую положительную степень значитъ повторить его множителемъ столько разъ, сколько въ показателъ степени находится единицъ.

Такъ: $a^2 = a \cdot a$; $a^3 = a \cdot a \cdot a$; $a^n = a \cdot a \cdot a \dots (n \text{ разъ}).$

Такимъ образомъ, возвышеніе въ степень есть частный случай умноженія, — случай, когда всѣ производители равны количеству, возвышаемое въ степень, называемая *основаніемъ* степени. Такъ, въ формулѣ a^2 , a есть основаніе; въ выраженіи x^n основаніе есть x .

104. Правило знаковъ. Правило знаковъ при возвышеніи въ степень вытекаетъ непосредственно изъ правила знаковъ при умноженіи; во последнее остается одинаковымъ, будутъ ли производители даны съ ихъ окончательными знаками, или же окончательные ихъ знаки неизвестны, поэтому и правило знаковъ при возвышеніи въ степень въ обоихъ случаяхъ будетъ одно и то же.

1. *Случай возвышенія въ четную степень.* Пусть требуется количества a и $-a$ возвысить въ четную степень $2n$; это значитъ — то и другое основаніе надо повторить множителемъ $2n$ разъ. a , взятое $2n$ разъ множителемъ, дастъ a^{2n} ; взявъ $(-a)$ множителемъ $2n$ разъ, получимъ все произведеніе разбить на n паръ, изъ которыхъ каждая часть знакъ $+$, а потому и всякая степень имѣетъ знакъ $+$:

$$\underbrace{(-a)(-a)}_{+} \cdot \underbrace{(-a)(-a)}_{+} \cdot \underbrace{(-a)(-a)}_{+} \cdot \dots \cdot \underbrace{(-a)(-a)}_{+},$$

слѣд. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$. Итакъ

$$(\pm a)^{2n} = +a^{2n}.$$

т.е. четная степень всегда даетъ знакъ $+$, будетъ ли передъ основаніемъ знакъ $+$ или $-$.

2. *Случай возвышенія въ нечетную степень.* Если передъ основаніемъ находится знакъ $+$, то изъ правила знаковъ при умноженіи прямо слѣдуетъ, что и произведеніе будетъ имѣть тотъ же знакъ, слѣд.

$$(+a)^{2n+1} = a^{2n+1} \dots (1)$$

Если передъ основаніемъ будетъ знакъ $-$, то возвышая $-a$ въ нечетную степень $2n+1$, мы получимъ произведеніе $2n+1$ множителей, изъ которыхъ составится n паръ, дающихъ знакъ $+$, и останется одинъ множитель $(-a)$, вслѣдствіе чего произведеніе будетъ имѣть знакъ $-$:

$$\underbrace{(-a)(-a)}_{+} \cdot \underbrace{(-a)(-a)}_{+} \cdot \underbrace{(-a)(-a)}_{+} \cdot \dots \cdot \underbrace{(-a)(-a)}_{+} \cdot (-a),$$

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \dots (2).$$

Из (1) и (2) слѣдуетъ, что нечетная степень имѣетъ такой же знакъ какъ основание.

$$\text{Примѣры. } (-3)^2 = +9; (+5)^4 = +625; (-4)^3 = -64; (-4)^3 = -64; (+a)^4 = +a^4; (-a)^5 = -a^5; (-a)^5 = -a^5, \text{ и т. д.}$$

105. Правило показателей. — Пусть требуется a^m возвысить въ степень p , а a — какое угодно количество, а m и p — числа цѣлыя и положительныя. Возвысить a^m въ степень p значитъ повторить это выраженіе множителемъ p разъ; слѣд.

$$(a^m)^p = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots a^m \text{ (} p \text{ разъ)}.$$

Но при умноженіи показателя складываются, слѣд. вторую часть равенства можно представить въ видѣ $a^{m+m+m+\dots}$, гдѣ m берется слагаемымъ p разъ; m , повторенное слагаемымъ p разъ, даетъ mp ; слѣд.

$$(a^m)^p = a^{mp}.$$

Откуда правило: для возвышенія степени въ новую степень нужно показателя возвышаемаго количества помножить на показателя новой степени.

$$\text{Такъ: } (a^4)^2 = a^8; (a^{m-1})^{m+1} = a^{m^2-1} \text{ и т. д.}$$

106. Возвышеніе произведенія въ степень. — Пусть требуется произведеніе abc возвысить въ m -ую степень; это значитъ — повторить abc множителемъ m разъ; слѣд.

$(abc)^m = abc \cdot abc \cdot abc \dots abc$ (гдѣ abc взято m разъ); перемѣняя мѣста производителей, имѣемъ

$$abc \cdot abc \dots abc = aaa \dots a \times bbb \dots b \times ccc \dots c;$$

здесь каждая изъ буквъ a , b и c берется множителемъ m разъ, слѣд. послѣднее выраженіе въ сокращенномъ видѣ $= a^m b^m c^m$. Итакъ

$$(abc)^m = a^m b^m c^m.$$

Откуда правило: чтобы возвысить въ степень произведеніе должно каждое множителя отдѣльно возвысить въ требуемую степень и результаты перемножить.

107. Возвышеніе въ степень дроби. — Пусть требуется дробь $\frac{a}{b}$ возвысить въ m -ую степень; это значитъ дробь $\frac{a}{b}$ повторить множителемъ m разъ. По правилу умноженія дробей имѣемъ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots \frac{a}{b} \text{ (} m \text{ разъ)} = \frac{a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (} m \text{ разъ)}}{b \cdot b \cdot b \dots b \text{ (} m \text{ разъ)}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

$$\text{Итакъ, } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

т.е. для возвышенія пробы въ степень сложуетъ возвысить въ данную степень числителя и знаменателя отдѣльно, и степень числителя разделить на степень знаменателя.

По этому правилу найдемъ: $\frac{3^2 \cdot 3^3 \cdot 9}{7 \cdot 7^2 \cdot 49} = \frac{13}{7} = \frac{3^3}{7^3} = \frac{27}{343}$ в т. п.

108. Возвышеніе одночлена въ степень. — Пусть требуется одночленъ $2a^2b^3c^4d$ возвысить въ пятую степень. Для этого надо каждое изъ множителей 2 , a^2 , b^3 , c^4 и d возвысить въ данную степень и результаты перемножить. Причемъ при возвышеніи степени въ данную степень — показателей перемножать. Такимъ образомъ, послѣдовательно найдемъ:

$$(2a^2b^3c^4d)^5 = 2^5 \cdot (a^2)^5 \cdot (b^3)^5 \cdot (c^4)^5 \cdot d^5 = 32a^{10}b^{15}c^{20}d^5.$$

Итакъ, чтобы возвысить въ степень одночленъ, должно возвысить въ данную степень его коэффициента, а показателя каждого изъ буквенныхъ множителей умножить на показатель степени.

При возвышеніи въ степень троекъ нужно такимъ образомъ поступать съ числителемъ и знаменателемъ. Такъ, напр., послѣдовательно получимъ:

$$\frac{4a^2b^3c^4}{7d^4} = \frac{4^3a^6b^9c^{12}}{(7d^4)^3} = \frac{64a^6b^9c^{12}}{343d^{12}}.$$

109. Для возвышенія многочлена въ какую угодно степень служить особая формула, названная подъ именемъ формулы Ньютона. Она будетъ выведена въ слѣдствіи; въ этой главѣ мы ограничимъ я выводомъ чаще употребляемыхъ формулъ квадрата и куба многочлена.

110. Квадратъ многочлена. — Мы видѣли, что каковы бы ни были количественія a и b по знаку, всегда вѣдемъ

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Взять тринномъ $a + b + c$ и разсматривая на время $a + b$ какъ одинъ членъ, найдемъ послѣдовательно

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Послѣдняя формула показываетъ, что квадратъ триннома состоитъ изъ алгебраической суммы: квадратовъ въ ѣхъ его членовъ и удвоенныхъ произведеній каждаго члена на каждый, за нимъ слѣдующій. Докажемъ общность этого закона, т.е. что онъ справедливъ для многочлена, состоящаго изъ сколькихъ угодно членовъ; а для этого, допустимъ, что имеемъ вѣренъ для многочлена, состоящаго изъ n членовъ, докажемъ, что онъ останется вѣренъ и для многочлена, содержащаго однимъ членомъ болѣе.

Итакъ, допуская, что замѣченный для квадрата триннома законъ вѣренъ для полинома $a + b + c + d + \dots + i + h$, состоящаго изъ n членовъ, и возмемъ полиномъ $a + b + c + d + \dots + i + h + k$, содержащій $n + 1$ членъ. Принявъ на время сумму $a + b + \dots + i + h$ первыхъ n членовъ за одинъ членъ, а весь многочленъ $a + b + \dots + i + h + k$ за двучленъ, по формулѣ квадрата биннома напишемъ: $[(a + b + \dots + i + h) + k]^2 = (a + b + \dots + i + h)^2 + 2(a + b + \dots + i + h)k + k^2$

111. Сгруппировавъ члены квадрата полинома иначе, можемъ дать ему слѣдующій видъ:

$$(a + b + c + d + \dots + h)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2 + 2(a + b + c + d)e + e^2 + \dots + h^2.$$

Откуда видно, что квадратъ многочлена равенъ: квадрату 1-го члена, — удвоенное произведение 1-го члена на 2-й, + квадратъ 2-го, + удвоенное произведение суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й, + квадратъ 3-го, + удвоенное произведение суммы первыхъ трехъ членовъ на 4-й, + квадратъ четвертаго и т. д.

Въ этой формѣ квадратъ многочлена принимается при извлеченіи квадратнаго корня изъ многочлена.

112. Примеръ. Пусть $(4a^2x^3 - 7a^3x^2 - 6a^4x + a^5)^2$.

Примѣняя первую формулу, найдемъ

$$\begin{aligned} & 16a^4x^6 - 49a^6x^4 - 36a^7x^3 + a^{10} \\ & - 56a^3x^5 - 48a^6x^4 + 8a^7x^3 \\ & + 84a^7x^3 - 14a^8x^2 \\ & - 12a^9x; \end{aligned}$$

сдѣлавъ приведеніе и расположивъ члены по убывающимъ степенямъ буквы x , получимъ

$$16a^4x^6 - 56a^3x^5 - a^6x^4 + 92a^7x^3 - 22a^8x^2 - 12a^9x + a^{10}.$$

Примѣчаніе. Если сумму квадратовъ членовъ полинома изобразить сокращенно знакомъ Σa^2 , а въ суммѣ удвоенныхъ произведеній вынести за скобки 2, выраженіе же въ скобкахъ, равное алгебраической суммѣ произведеній каждаго члена на каждый, за нимъ слѣдующій, изобразить въ формѣ Σab , то формулу квадрата многочлена можно представить въ сокращенной формѣ такъ:

$$(a + b + c + \dots + i + h)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab.$$

113 Кубъ многочлена — Въ § 36, IV мы нашли, что $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. На основаніи этой формулы, взявъ тринომъ $a + b + c$ и принявъ на время $a + b$ за одинъ членъ, имѣемъ.

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + (3a^2 + 6ab + 3b^2)c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3a^2a + 3c^2b + 6abc. \end{aligned}$$

Такимъ же образомъ, взявъ четырехчленъ и возвысивъ его въ кубъ, нашли бы:

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \\ &+ 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d \\ &+ 3b^2a + 3b^2c + 3b^2d \\ &+ 3c^2a + 3c^2b + 3c^2d \\ &+ 3d^2a + 3d^2b + 3d^2c \\ &+ 6abc + 6abd + 6acd \\ &+ 6bcd \end{aligned}$$

Изъ этихъ частныхъ случаевъ видно, что кубъ взятыхъ въ нихъ полиномовъ состоитъ изъ алгебраической суммы: кубовъ всѣхъ членовъ, утроенныхъ произведений квадрата каждаго члена на каждый изъ остальныхъ, и ушестеренныхъ произведений этихъ членовъ, взятыхъ по три.

Докажемъ теперь, что если этотъ законъ вѣренъ для полинома объ n членахъ: $a + b + c + d + \dots + g + i + h$, то онъ будетъ вѣренъ и для полинома объ $n + 1$ членахъ $a + b + c + d + \dots + g + i + h + k$. Принявъ на мѣсто $a + b + c + \dots + i + h$ за одинъ членъ, по формулѣ куба бинома получимъ

$$(a + b + c + d + \dots + g + i + h + k)^3 = (a + b + c + d + \dots + i + h)^3 + 3(a + b + c + d + \dots + i + h)k^2 + k^3 \dots (1).$$

Въ допущенномъ $(a + b + c + d + \dots + i + h)^3$ состоитъ изъ: 1) суммы кубовъ всѣхъ членовъ отъ a до h включительно, 2) суммы утроенныхъ произведений квадрата каждаго члена a, b, \dots, h на каждый изъ остальныхъ, и 3) суммы ушестеренныхъ произведений этихъ членовъ, взятыхъ по три. Всѣ эти члены остаются неизмѣнными отъ вертикальной черты; выраже же отъ нея прибавлены члены, относящиеся къ члену k .

$$3(a + b + c + \dots + h)k^2 + k^3.$$

Изъ формулы получимъ:

$(a + b + c + d + \dots + g + i + h + k)^3$ $= a^3 + b^3 + c^3 + \dots + i^3 + h^3$ $+ 3a^2b + 3b^2a + 3a^2c + 3c^2a + \dots + 3a^2h + 3h^2a$ $+ 3b^2c + 3c^2b + \dots + 3b^2h + 3h^2b$ $+ 3c^2d + 3d^2c + \dots + 3c^2h + 3h^2c$ \dots $+ 3h^2a + 3h^2b + \dots + 3h^2i$ $+ 6abc + 6abd + \dots + 6ghh$	k^3 $+ 3a^2k$ $+ 3b^2k$ $+ 3c^2k$ \dots $+ 3h^2k$ $+ 3k^2a + 3k^2b + 3k^2c + \dots + 3k^2h$ $+ 6abk + 6ack + \dots + 6ihk$	а) б) γ) . . . з) л) м)
---	---	---

откуда видно, что кубъ новаго многочлена объ $n + 1$ членахъ содержитъ: 1) сумму кубовъ всѣхъ членовъ отъ a до k включительно (строка α); 2) алгебраическую сумму утроенныхъ произведений квадрата каждаго члена отъ a до k на каждый изъ остальныхъ (строки β, γ, ..., λ); 3) алгебр. сумму ушестеренныхъ произведений всѣхъ членовъ a, b, c, \dots, h, k , взятыхъ по три. Одиная словомъ, законъ, предположенный вѣрнымъ для многочлена объ n членахъ, оказывается вѣрнымъ и для многочлена, имѣющаго однихъ членомъ больше.

Но прямое возвышеніе въ кубъ показало, что онъ вѣренъ для четырехчлена, слѣд. онъ вѣренъ и для пятичлена; а потому и для шестичлена и т. д. Общность закона такимъ образомъ доказана.

Сокращенно законъ этотъ выражается формулою:

$$(a + b + c + d + \dots + i + h + k)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2b + 6\Sigma abc.$$

114. Сгруппировать иначе члены второй части, можно написать:

$$(a + b + c + \dots + i + h + k)^3 = a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c - 3(a + b)c^2 + c^3 - 3(a + b + c)^2d + \dots + k^3.$$

Въ этой формѣ теорема принимается при извлеченіи кубичныхъ корней изъ многочленовъ.

115. Примеръ. Найти $(5x^3 - 3ax^2 - 2a^2x - a^3)^3$.

Примѣняя правило § 113, найдемъ:

$$\begin{aligned} & 125x^9 - 27a^3x^6 + 8a^6x^3 - a^9 \\ & - 225ax^8 + 150a^2x^7 - 75a^3x^6 \\ & + 135a^2x^7 + 54a^4x^5 - 27a^5x^4 \\ & + 60a^4x^5 - 36a^5x^4 - 12a^7x^3 \\ & + 15a^6x^3 - 9a^7x^2 - 6a^8x - 180a^3x^6 + 90a^4x^5 - 60a^5x^4 + 36a^6x^3. \end{aligned}$$

Сдѣлавъ приведеніе и расположивъ члены по убывающимъ степенямъ буквы x , получимъ:

$$\begin{aligned} 125x^9 - 225ax^8 - 285a^2x^7 - 252a^3x^6 + 204a^4x^5 - 123a^5x^4 + 59a^6x^3 - \\ - 21a^7x^2 + 6a^8x - a^9. \end{aligned}$$

ГЛАВА XI.

Извлеченіе корня.

Опредѣленіе.—Правило знаковъ. Правило показателей.—Корень изъ произведенія и дроби.—Извлеченіе корня изъ одночленовъ.

116 Определѣніе.—Мы видѣли, что корнемъ $n^{\text{го}}$ порядка изъ A называется такое количество r , которое, будучи возвышено въ $n^{\text{ую}}$ степень, даетъ A . Выражая это количество знакомъ $\sqrt[n]{A}$, имѣемъ, по определенію, два равенства:

$$\sqrt[n]{A} = r \quad \text{и} \quad r^n = A,$$

имѣющія одинаковое значеніе.

Символъ $\sqrt[n]{}$ называется *радикаломъ порядка n* ; n —*показателемъ корня*; если показатель n равенъ 2, его не пишутъ.

Дѣйствіе нахожденія корня называется *извлеченіемъ корня*.

Въ этой главѣ мы займемся выводомъ основныхъ правилъ извлеченія корня *цѣлаго положительнаго порядка*.

117. Правило знаковъ.—Слѣдуетъ рассмотреть 4 случая, смотря по тому, будетъ ли подкоренное количество положительное или отрицательное, а показатель корня—четный или нечетный.

1. *Корень четнаго порядка изъ положительнаго количества имѣетъ два значенія, одинаковыя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знаку.*

Такъ квадратный корень изъ 9 имѣетъ два значенія: $+3$ и -3 . То и другое удовлетворяетъ данному выше определенію корня, потому что квлъ $(+3)^2 = +9$, такъ и $(-3)^2 = -9$. Такимъ образомъ можно написать, что $\sqrt{+9} = \pm 3$ (читается: квадр. корень изъ $+9$ равенъ плюсъ или минусъ 3).

четвертого порядка изъ $+16$ также имѣть два значенія: $+2$ и -2 , что какъ $(+2)^4 = +16$, такъ и $(-2)^4 = +16$. Итакъ $\sqrt[4]{+16} = \pm 2$. Вообще

$$\sqrt[2n]{+a^{2n}} = \pm a.$$

что и $(+a)^{2n} = +a^{2n}$, и $(-a)^{2n} = +a^{2n}$.

Корень нечетнаго порядка изъ положительнаго количества есть величина положительная.

Напр., $\sqrt[3]{+8} = +2$, потому что $(+2)^3 = +8$. Также $\sqrt[3]{+125} = +5$, потому что $(+5)^3 = +125$. Видно, что первый корень не можетъ равняться -2 и -5 , потому что числа не удовлетворяютъ опредѣленію корня; въ $(-2)^3 = -8$ и $(-5)^3 = -125$ будучи возвышены въ кубъ, даютъ -8 и -125 .

$$\sqrt[2n+1]{+a^{2n+1}} = +a,$$

между тѣмъ какъ $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$.

Корень нечетнаго порядка изъ отрицательнаго количества есть величина отрицательная.

Напр., $\sqrt[3]{-8} = -2$, потому что $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[3]{-64} = -4$, ибо $(-4)^3 = -64$. Вообще

$$\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a,$$

между тѣмъ какъ $(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}$.

1 Корень четнаго порядка изъ отрицательнаго количества есть величина мнимая.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется извлечь $\sqrt{-25}$. Искомый корень, если бы онъ былъ возможенъ, по абсолютной величинѣ долженъ быть равенъ 5; но ни $+5$, ни -5 , будучи возвышены въ квадратъ, не даютъ -25 , такъ что $\sqrt{-25}$ не можетъ быть выраженъ никакимъ положительнымъ и никакимъ отрицательнымъ числомъ. Такія величины называютъ *мнимыми*. Въ противоположность имъ, обыкновенныя положительныя и отрицательныя количества, съ которыми мы до сихъ поръ имѣли дѣло, называють *действительными*.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что правило знаковъ при извлеченіи корня можетъ быть выражено такъ:

Корень нечетнаго порядка имѣетъ знакъ подкореннаго количества; корень четнаго порядка изъ положительнаго количества имѣетъ двойной знакъ $(+)$; корень четнаго порядка изъ отрицательнаго количества есть величина мнимая.

118. Относительно двойнаго знака необходимо замѣтить, что его слѣдуетъ ставить только тогда, когда происхожденіе подкореннаго количества остается неизвѣстнымъ. Напр., $a^2 - 2ab + b^2$ можетъ явиться какъ результатъ возвышенія въ квадратъ или разности $a - b$, или $b - a$, такъ что $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm(a - b)$. Но если требуется извлечь квадратный корень изъ $(a - b)^2$, то въ должно полагать $\sqrt{(a - b)^2} = \pm(a - b)$, но приписывать ему только одно значеніе $a - b$. Точно такъ же: $\sqrt{(+a)^2}$ только $+a$, а $\sqrt{(-a)^2}$ только $-a$.

Относительно правила знаковъ при извлеченіи корня слѣдуетъ еще замѣтить, что данное нами въ предыдущемъ § правило—далеко неполное. Въ главѣ XXIX будетъ доказано, что корень изъ какого угодно числа имѣетъ столько различныхъ алгебраическихъ значений, сколько единицъ въ показателѣ корня; такъ, кубическій корень имѣетъ *три* различныхъ значений, корень четвертаго порядка — *четыре* и т. д.

Примѣчаніе. Въ предстоящемъ намъ изложеніи преобразованій корней мы будемъ разсматривать только такъ называемыя *арифметическія величины корней*, т. е. какъ *подкоренныя количества*, такъ и *самые корни* будемъ брать *положительные*.

119 Правило показателей.— Пусть требуется извлечь корень $n^{\text{го}}$ порядка изъ a^p , гдѣ a — пѣкоторое положительное количества, а n и p , сверхъ того, числа цѣлыя. Искомый корень долженъ представлять пѣкоторую степень буквы a ; назвавъ неизвѣстнаго показателя этой степени черепъ x , имѣемъ равенство

$$\sqrt[n]{a^x} = a^p.$$

По опредѣленію корня, послѣдній, будучи возвышенъ въ степень, изображаемую показателемъ корня, даетъ подкоренное количество, а потому

$$(a^x)^n = a^p;$$

или по правилу возвышенія степени въ степень:

$$a^{xn} = a^p.$$

Чтобы это равенство было возможно, необходимо, чтобы показатели обѣихъ частей были равны, т.-е. $xn = p$, откуда

$$x = \frac{p}{n}.$$

Итакъ

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}.$$

Отсюда правило: для извлеченія корня изъ степени должно показателя степени разбить на показателя корня.

Такъ напр. $\sqrt{a^8} = a^4$; $\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$; $\sqrt[4]{(a+b)^8} = (a+b)^2$; и т. д.

120. Корень изъ произведенія.— Пусть требуется извлечь корень $n^{\text{го}}$ порядка изъ произведенія ABC . Докажемъ, что для этого должно извлечь корень данного порядка изъ *каждаго производителя отдѣльно* и *результаты перемножить*, т.-е. что

$$\sqrt[n]{ABC} = \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C} \dots (1)$$

Дѣйствительно, если окажется, что вторая часть равенства, будучи возвышена въ $n^{\text{ую}}$ степень, дастъ ABC , то, согласно съ опредѣленіемъ корня, этимъ и будетъ доказано, что она въ самомъ дѣлѣ представляетъ корень $n^{\text{го}}$ порядка изъ ABC . Итакъ, возвышаемъ $\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C}$ въ $n^{\text{ую}}$ степень; замѣтивъ, что для этого *каждаго производителя отдѣльно* нужно возвысить въ $n^{\text{ую}}$ степень и результаты перемножить, найдемъ

$$(\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C})^n = (\sqrt[n]{A})^n \cdot (\sqrt[n]{B})^n \cdot (\sqrt[n]{C})^n.$$

Но, по опредѣленію корня, $(\sqrt[n]{A})^n = A$, $(\sqrt[n]{B})^n = B$ и $(\sqrt[n]{C})^n = C$, слѣд.

$$(\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C})^n = ABC,$$

тѣмъ справедливость теоремы (1) и доказана.

Очевидно, что способъ доказательства не зависитъ отъ числа множителей, поэтому теорема доказана для какого угодно числа множителей подкореннаго выражения.

121. Корень изъ дроби Пусть требуется извлечь корень $n^{\text{го}}$ порядка изъ дроби $\frac{A}{B}$. Докажемъ, что для извлеченія корня изъ дроби должно извлечь корень отдельно изъ числителя и знаменателя, и первый раздѣлить на второй, т.-е. что

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

Если окажется, что $n^{\text{ая}}$ степень второй части равенства равна $\frac{A}{B}$, — этимъ справедливость равенства будетъ доказана. По правилу возвышенія въ степень получимъ

$$\left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{A})^n}{(\sqrt[n]{B})^n}.$$

Но $(\sqrt[n]{A})^n = A$, $(\sqrt[n]{B})^n = B$, слѣд. въ самомъ дѣлѣ

$$\left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{A}{B},$$

и испытуемое равенство доказано.

Теоремы о корнѣ изъ произведенія и дроби доказаны не прямымъ путемъ—способомъ повѣрки. Впрочемъ, что касается второй теоремы, то она можетъ быть доказана и прямымъ путемъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = x, \dots (1)$$

возвысивъ обѣ части въ $n^{\text{ую}}$ степень, имѣемъ

$$\frac{A}{B} = x^n,$$

откуда

$$A = B \cdot x^n;$$

извлекая изъ обѣихъ частей корень $n^{\text{го}}$ порядка и применяя ко второй части теорему § 120, найдемъ

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B \cdot x^n}, \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B} \cdot x.$$

Последнее равенство показываетъ, что x есть частное отъ раздѣленія $\sqrt[n]{A}$ на $\sqrt[n]{B}$, сл.

$$x = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

Подставляя вмѣсто x въ равенство (1) его величину, находимъ

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

122. Извлеченіе корня изъ одночлена. — Цѣлый одночленъ есть произведеніе, а потому для извлеченія изъ него корня нужно извлечь корень изъ каждаго производителя и результаты перемножить. Такъ

$$\sqrt[3]{\frac{64}{125} a^{12} b^6 (x-y)^{21}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} \sqrt[3]{a^{12}} \sqrt[3]{b^6} \sqrt[3]{(x-y)^{21}} = \frac{4}{5} a^4 b^2 (x-y)^7$$

(Отсюда правило: *чтобы извлечь корень изъ одночлена, должно извлечь его изъ коэффициента, а показатели всехъ буквенныхъ множителей раздѣлить на показателя корня.*

При извлеченіи корня изъ дроби слѣдуетъ, примѣняя это правило, извлечь требуемый корень отдѣльно изъ числителя и знаменателя и первый раздѣлить на второй. Такъ

$$\sqrt[5]{\frac{32a^{10}b^{15}}{(c^3-d^2)^4}} = \frac{\sqrt[5]{32a^{10}b^{15}}}{\sqrt[5]{(c^3-d^2)^4}} = \frac{2a^2b^3}{c^3-d^2}.$$

ГЛАВА XII.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ чиселъ и многочленовъ.

Опредленія; предварительныя теоремы. — Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлаго числа и изъ дроби съ точностью до 1 и до $\frac{1}{n}$. — Сокращенный способъ. — Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочленовъ; приложенія.

123. Когда число есть квадратъ другого числа, то первое называется *точнымъ квадратомъ*, а второе *точнымъ квадратнымъ корнемъ* изъ перваго. Такъ, 49 есть точный квадратъ 7-ми; число же 7 — точный квадратный корень изъ 49.

124. ТЕОРЕМА. Когда цѣлое число не есть точный квадратъ, то квадратный корень изъ него нельзя выразить точнымъ образомъ не только въ цѣлыхъ единицахъ, но и ни въ какихъ доляхъ единицы.

Пусть данный неточный квадратъ будетъ N . Такъ какъ цѣлое число N не есть квадратъ другого цѣлаго числа, то очевидно, что квадратный корень изъ N не можетъ быть равенъ ни какому цѣлому числу. Посмотримъ, нельзя ли вы-

Число \sqrt{N} точно некоторую дробь $\frac{a}{b}$, которую всегда можно представлять в виде несократимой дроби. Допустив возможность равенства

$$\sqrt{N} = \frac{a}{b} \dots (1),$$

выразивъ обѣ его части въ квадратъ, нашли бы

$$N = \frac{a^2}{b^2}.$$

Но дробь $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b}$, сл. числитель ея содержитъ только тѣхъ множителей, которые находятся въ a , а знаменатель — только тѣхъ, которые заключаются въ b ; a и b суть числа первые между собою, следовательно a^2 и b^2 не имѣть общихъ множителей, а потому дробь $\frac{a^2}{b^2}$ несократима. Такимъ образомъ, допущенное выражаемое равенствомъ (1), привело къ ложному заключенію, что цѣлое число N равно несократимой дроби $\frac{a^2}{b^2}$, а потому это допущеніе невозможно.

Итакъ, квадратный корень изъ числа, не представляющаго точнаго квадрата, не можетъ точно выразить ни повтореніемъ цѣлой единицы, ни повтореніемъ какой-либо ея доли. Такіе корни называютъ *несоизмѣримыми съ единицею*, въ отличие отъ цѣлыхъ чиселъ и конечныхъ дробей, которыя можно точно выразить въ частяхъ единицы, и которыя называются поэтому *соизмѣримыми съ единицею*.

Такъ, квадратные корни изъ чиселъ 2, 7, 10 и т. п. суть корни несоизмѣримые. Далѣе мы увидимъ, что такіе корни можно вычислять съ какою угодно точностью. Когда приближенный корень разнится отъ истинной величины меньше чѣмъ на 1, то онъ называется *точнымъ до единицы*.

125. Опредѣленія. *Квадратный корень изъ цѣлаго числа, точный до единицы, есть корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ этомъ числѣ, или этотъ корень, увеличенный на 1.*

Число N есть неточный квадратъ, и A^2 — наибольшій квадратъ, заключающійся въ этомъ числѣ; въ такомъ случаѣ, очевидно, N будетъ содержаться между двумя послѣдовательными квадратами: A^2 и $(A + 1)^2$, т. е.

$$(A + 1)^2 > N > A^2,$$

при переходѣ къ корнямъ, находимъ:

$$A + 1 > \sqrt{N} > A.$$

Разность между $A + 1$ и A равна единицѣ; а потому разности между \sqrt{N} и A , съ одной стороны, и между $A + 1$ и \sqrt{N} , съ другой, меньше 1; следовательно, какъ A , такъ и $A + 1$ выражаютъ \sqrt{N} съ точностью до 1. Но A — квадратный корень изъ A^2 , т. е. изъ наибольшаго квадрата, содержащагося въ N , а $A + 1$ есть этотъ корень, увеличенный на 1: этимъ данное допущеніе оправдывается.

Число A является квадратнымъ корнемъ изъ N — *точнымъ до 1 по недостатку*, а $A + 1$ — *по избытку*.

Такъ, замѣчая, что наибольшій квадратъ, содержащійся въ 109, есть 100, заключаемъ, что квадратный корень изъ 109, точный до 1 по недостатку, есть 10, а по избытку — 11.

126. *Остаткомъ* квадратнаго корня называютъ разность между даннымъ числомъ и квадратомъ его корня, точнаго до 1 по недостатку. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ остатокъ корня будетъ

$$109 - 10^2 \text{ или } 9.$$

Вообще, если данное число есть N и корень изъ него, точный до 1 по недостатку, равенъ A , а остатокъ R , то, по опредѣленію остатка, $R = N - A^2$, откуда

$$N = A^2 + R.$$

Въ частномъ случаѣ, когда число есть точный квадратъ, остатокъ корня равенъ нулю.

Теорема. *Остатокъ корня не больше удвоеннаго квадратнаго корня изъ даннаго числа, точнаго до 1 по недостатку.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A есть квадратный корень изъ N , точный до 1 по недостатку. Въ такомъ случаѣ N содержится между A^2 и $(A + 1)^2$, а потому разность между N и A^2 меньше разности $(A + 1)^2 - A^2$ или $2A + 1$; слѣд.

$$N - A^2 < 2A + 1$$

или

$$N - A^2 \leq 2A,$$

ибо $N - A^2$ — число цѣлое. Но $N - A^2$ есть ничто иное какъ R ; слѣд.

$$R \leq 2A.$$

Слѣдствіе. — Если между цѣлыми числами N , A и R имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$N = A^2 + R \text{ и } R \leq 2A,$$

то это значитъ, что A есть квадратный корень изъ N , точный до 1 по недостатку, и что R есть остатокъ того корня.

Въ самомъ дѣлѣ, равенство доказываетъ, что A^2 содержится въ N , а неравенство доказываетъ, что N не содержитъ въ себѣ $(A + 1)^2$, ибо R не составляетъ $2A + 1$.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлаго числа съ точностью до единицы.

127. Теорію этого дѣйствія мы подраздѣляемъ на три случая.

Первый случай. Данное число меньше 100.

Въ этомъ случаѣ квадратный корень находятъ при помощи таблицы квадратовъ первыхъ девяти чиселъ.

Числа:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Квадраты:	1	4	9	16	25	36	49	64	81.

Пусть, напр., требуется найти квадратный корень изъ 58 съ точностью до 1.

Таблицы квадратов видимъ, что 58 содержится между 49 и 64, сл. дается между 7 и 8. поэтому искомый корень, точный до 1 по недостатку, равенъ 7, а остатокъ $= 58 - 49$ или 9.

128. Второй случай. Данное число содержится между 100 и 10000.

Пусть данное число будетъ 7865: оно содержится между 100 и 10000, или между 10^2 и 100^2 , а потому квадратный корень изъ 7865 заключается между 10 и 100. Но между этими предѣлами находятся двузначныя числа, а потому искомый корень, точный до 1, состоитъ изъ десятковъ и единицъ: пусть число десятковъ его будетъ d , а простыхъ единицъ u ; искомый корень выразится числомъ $10d + u$, и если остатокъ корня назовемъ буквою R, то, замѣчая, по изложеніи § 126, что данное число равно квадрату своего корня, точного до 1 по недостатку, получимъ:

$$7865 = (10d + u)^2 + R = 100d^2 + 2 \cdot 10d \cdot u + u^2 + R \dots (1)$$

Чтобы найти цифру (d) десятковъ корня, замѣчаемъ, что слагаемое $100d^2$, дающее цѣлое число, оканчивающееся двумя нулями, есть цѣлое число сотенъ, и потому должно содержаться въ 7800 суммы, а слѣд. d^2 содержится въ 78. Скажемъ, что квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ 78, и дасть намъ d . Въ самомъ дѣлѣ, изъ таблицы квадратовъ видимъ, что 8² заключается между 64 и 81, или между 8² и 9²:

$$8^2 < 78 < 9^2.$$

Помножая эти числа на 100, мы не измѣнимъ неравенствъ, сл.

$$80^2 < 7800 < 90^2$$

Если къ 7800 прибавимъ 65, то этихъ не измѣнимъ смысла неравенствъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ 80² меньше 7800, то оно и подавно будетъ меньше 7865. Но 7865 будетъ также меньше 90². Дѣйствительно, 7800 и 90² (или 8100) суть два цѣлыя числа сотенъ; и какъ второе больше перваго, то оно превосходитъ первое, по крайней мѣрѣ, на одну сотню. Слѣд. прибавляя къ первому 65 — число меньше 100, получимъ результатъ, во всякомъ случаѣ, меньшій 90². Итакъ

$$80^2 < 7865 < 90^2,$$

а отсюда, переходя къ корнямъ, получимъ:

$$80 < \sqrt{7865} < 90.$$

Эти неравенства показываютъ, что искомый корень больше 8 десятковъ, но меньше 9 десятковъ, т.е. что онъ содержитъ нѣсколько десятковъ 8 и, можетъ быть, нѣсколько простыхъ единицъ, число которыхъ никакъ не больше 9 (ибо величина корня меньше 9 десятковъ). Такимъ образомъ $d = 8$, т.е. цифра десятковъ корня равна квадратному корню изъ наибольшаго квадрата, содержащагося въ числѣ сотенъ данного числа.

Подставляя въ равенство (1) 8 вмѣсто d , найдемъ:

$$7865 = 6400 + 2 \cdot 80u + u^2 + R,$$

и вычтя изъ обѣихъ частей по 6400:

$$1465 = 2.80u + u^2 + R \dots (2)$$

Постараемся теперь опредѣлить цифру u единицъ корня. Для этого замѣтимъ, что слагаемое $2.80u$ и суммы 1465 , т. е. удвоенное произведение 6 десятковъ на простые единицы u корня, есть цѣлое число, оканчивающееся нулемъ и потому представляющее цѣлое число десятковъ. Число $2.80u$ заключается, поэтому, необходимо, въ 146 десяткахъ суммы. Но въ составъ этихъ 146 десятковъ могутъ входить также десятки отъ слагаемаго u^2 (квадрата единицъ корня) и отъ возможнаго остатка R . Въ виду этого мы не можемъ утверждать, что членъ $2.80u$ равняется 1460 ; онъ можетъ быть и меньше числа 1460 . Итакъ

$$2.80u \leq 1460.$$

Сокративъ на 10 и раздѣливъ обѣ части на 2, получимъ

$$u \leq \frac{164}{2.8}.$$

Цифра единицъ u есть число цѣлое, а потому изъ послѣдняго неравенства заключаемъ, что, раздѣливъ 146 на 2.8 и взявъ цѣлую часть частного, мы найдемъ число, равное цифрѣ единицъ корня, либо ее превышающее. — однимъ словомъ, найдемъ высшій предѣлъ цифры единицъ корня. Замѣтимъ, что число 1465 называется первымъ остаткомъ, выводимъ изъ сказаннаго слѣдующее правило для нахождения цифры единицъ корня *отбавивъ въ первомъ остаткѣ правую цифру запятой и раздѣливъ находящееся вѣлево отъ запятой число на удвоенную цифру десятковъ корня, въ цѣлой части частного будемъ имѣть высшій предѣлъ цифры единицъ корня.*

Въ данномъ случаѣ цѣлая часть частного отъ раздѣленія 146 на 16 есть 9; заключаемъ, что цифра единицъ корня будетъ или 9, или число меньшее 9. Чтобы испытать, годятся ли 9, мы должны корень $\sqrt{89}$ возвысить въ квадратъ и вычесть изъ даннаго числа: если вычитаніе будетъ возможно, то цифра 9 будетъ требующая: въ противномъ случаѣ, т. е. если окажется, что 89^2 больше 7865 , надо уменьшить цифру 9 на единицу и испытать цифру 8, и т. д. до тѣхъ поръ, пока вычитаніе будетъ возможно. Но

$$89^2 = (80 + 9)^2 = 80^2 + 2.80.9 + 9^2;$$

мы уже вычли изъ даннаго числа 80^2 и въ остаткѣ нашли 1465 ; остается изъ этого остатка вычесть $2.80.9 + 9^2$. Но, вынесъ въ этой суммѣ за скобки 9, получимъ

$$(2.80 + 9).9, \text{ или } 169 \times 9.$$

откуда замѣчаемъ, что число, подлежащее вычитанію изъ перваго остатка, сокращенно составляется такъ: удвоивъ цифру десятковъ корня (что даетъ 16), приписываютъ справа испытуюмую цифру единицъ и составленное такимъ образомъ число множить на эту же цифру; выполнивъ вычисленіе, найдемъ

$$169 \times 9 = 1521,$$

результатъ, превышающій первый остатокъ, откуда заключаемъ, что цифра 9 велика.

Взявъ 8 вмѣсто 9, составляемъ такимъ же образомъ

$$(2 \cdot 80 + 8) \times 8, \text{ т.-е. } 168 \cdot 8 = 1344.$$

Полученное число меньше перваго остатка, слѣд. 8 и есть истинная цифра единицъ корня, ибо она ни слишкомъ велика, ни слишкомъ мала. Итакъ, иско-
мый корень = 88, причтемъ остатокъ

$$R = 1465 - 1344 = 121.$$

Вычисленіе располагаютъ такимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} \sqrt{78,65} = 88 \\ 64 \\ 168 \overline{) 146,5} \\ \times 8 \quad 1344 \\ \hline 121 \end{array}$$

Для проверки дѣйствія, руководясь § 126, слѣд., сравниваемъ остатокъ съ удвоеннымъ корнемъ: такъ какъ въ данномъ случаѣ $121 < 2 \times 88$, то заключаемъ, что 88 есть действительно квадратный корень изъ 7865, точный до 1 десятичной. 88 есть корень, точный до 1 по избытку.

129. Для вычисления вышеизложеннаго правила вычисленія двузначнаго корня изъ двузначнаго числа, на каждой грани отъ правой руки къ лѣвой, по мере надобности, отдѣляемъ по одной цифрѣ (каждой грани можетъ быть и одна цифра), и изъ каждой отдѣляемой грани изъ наиболѣе близкаго квадрата, содержащагося въ ней, вычитаемъ квадратъ полученнаго корня. Полученная цифра будетъ цифрой десятковъ корня. Квадратъ цифры десятковъ вычитаемъ изъ первой грани и къ остатку спосимъ вторую грань; въ полученномъ остаткѣ отдѣляемъ послѣднюю цифру справа запятой, и оставшееся влѣво отъ запятой число дѣлимъ на удвоенную цифру десятковъ корня: частное дастъ высшій предѣлъ цифры единицъ корня. Для проверки къ удвоенной цифрѣ десятковъ корня принимаемъ справа цифру единицъ и образовавшееся число умножаемъ на испытуемую цифру единицъ. Если произведение не превышаетъ остатка, то испытуемая цифра единицъ есть истинная. Въ противномъ случаѣ ее уменьшаютъ на 1, и т. д., поступая такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока составленное вышеуказаннымъ способомъ произведение не будетъ числомъ, не превышающимъ перваго остатка. Если во второмъ остаткѣ получится ноль, это будетъ означать, что корень является точно; въ противномъ случаѣ—приближенно, съ ошибкою меньшею 1.

130. Приводимъ нѣсколько прихровъ

Примѣръ I.—Найти $\sqrt{1369}$. Руководясь сказаннымъ правиломъ, имѣемъ

$$\begin{array}{r} \sqrt{13,69} = 37. \\ 9 \\ 67 \overline{) 136,9} \\ \times 7 \quad 469 \\ \hline 0 \end{array}$$

Полученіе нуля въ остаткѣ показываетъ, что квадратъ 37-ми въ точности равенъ 1369, т.-е. что 37 есть точный квадратный корень изъ данного числа.

Примѣръ II.—Найти $\sqrt{6341}$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{63,41} = 79. \\ 49 \\ 149 \overline{)144,1} \\ \times 9 \overline{)1341} \\ 100 \end{array}$$

При опредѣленіи цифры единиц пришлось дѣлить 144 на 14, причемъ въ цѣлой части частнаго получилось 10; но какъ цифра единиц не можетъ быть больше 9, то испытываемъ прежде всего эту цифру. Полученіе остатка показываетъ, что цифра единиц корня дѣйствительно равна 9.

Примѣръ III.—Извлечь $\sqrt{5038}$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{50,38} \quad 70 \\ 49 \\ 14 \quad 13.8 \end{array}$$

Дѣля 13 на 14, находимъ въ цѣлой части частнаго 0; сл. цифра единиц корня равна 0, и самый корень — 70. Удвоенное произведеніе десятковъ на единицы и квадратъ единиц корня составляютъ 0, поэтому остатокъ дѣйствителенъ 138; онъ меньше удвоеннаго корня, сл. 70 есть корень точный до 1 по недостатку.

Корень точный до 1 по избытку равенъ поэтому 71.

131. Третій случай.— Это есть общій случай, который приводится къ двумъ предыдущимъ при помощи слѣдующей теоремы.

Теорема. Число десятковъ квадратнаго корня точнаго до 1 по недостатку изъ даннаго числа равно квадратному корню изъ наибольшаго квадрата, содержащагося въ числѣ сотенъ этого числа.

Пусть данное число будетъ 78658143, и пусть наибольшій квадратъ, содержащійся въ 786581, т.-е. въ числѣ сотенъ его, будетъ a^2 .

Если число 786581 есть точный квадратъ, то оно равно a^2 , если неточный, то будетъ больше a^2 ; но въ томъ и другомъ случаѣ будетъ меньше квадрата слѣдующаго за a цѣлаго числа, т.-е. меньше $(a+1)^2$.

Итакъ

$$a^2 \leq 786581 < (a+1)^2;$$

Умножая эти три числа на 100, найдемъ:

$$(10a)^2 \leq 78658100 < [(a+1) \cdot 10]^2.$$

Придавъ къ среднему числу 43, мы этимъ нарушимъ возможное равенство, обративъ его въ неравенство $(10a)^2 < 78658143$, усиливъ первое неравенство, увеличивъ его большую часть, и, наконецъ, не нарушимъ второго неравенства. Последнее обстоятельство объясняется тѣмъ, что 78658100 и $[(a+1) \cdot 10]^2$ суть цѣлыя числа сотенъ, и какъ второе больше перваго, то оно превосходитъ первое по меньшей мѣрѣ на одну сотню; слѣдовательно, увеличивъ меньшее число на 43, т.-е. менѣе чѣмъ на сотню, получимъ результатъ все-таки меньшій $[(a+1) \cdot 10]^2$. Такимъ образомъ имѣемъ

$$(10a)^2 < 78658143 < [(a+1) \cdot 10]^2,$$

Итак, для къ корнямъ, найдемъ

$$10a < \sqrt{78658143} < (a+1) \cdot 10.$$

Эти неравенства доказываютъ, что искомый корень, будучи больше a десятковъ, держитъ въ себѣ эти a десятковъ и однако же не содержитъ $a+1$ десятковъ, такъ какъ онъ меньше этого числа десятковъ (въ силу второго неравенства). Следовательно, опредѣляемый корень состоитъ изъ a десятковъ и, можетъ быть, нѣсколькихъ простыхъ единицъ, число которыхъ не больше 9; другими словами, *цѣлыхъ десятковъ въ немъ будетъ a* . Замѣтивъ же, что a есть квадратный корень изъ a^2 , т.-е. изъ наибольшаго квадрата, содержащагося въ числѣ сотенъ даннаго числа, заключаемъ, что теорема доказана.

132. Итакъ, число десятковъ квадратнаго корня изъ

78658143

есть квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ этого числа, или, что то же, — квадратный корень, точный до 1 по недостатку, изъ 786581.

Число десятковъ этого корня, или, что все равно, число сотенъ перваго, есть, на основаніи теоремы § 131, квадратный корень, точный до 1 по недостатку, изъ 7865.

Число десятковъ этого корня, т.-е. число тысячъ перваго, по той же теоремѣ, есть квадратный корень, точный до 1 по недостатку, изъ 78.

Такимъ образомъ, отдѣляя отъ правой руки къ лѣвой по двѣ цифры, мы убѣдились, что искомый корень состоитъ изъ четырехъ цифръ, что для нахождения старшей его цифры нужно извлечь, съ точностью до 1 по недостатку, квадратный корень изъ первой грани слѣва, и что число граней равно числу цифръ искомаго корня.

Прилагая теорему § 131, мы видящъ, что число сотенъ искомаго корня равно точному до 1 по недостатку квадратному корню изъ 7865; находимъ этотъ корень по правилу § 129:

$$\begin{array}{r} 78,65 \mid 8143 \mid 88 \\ 64 \\ \hline 168 \mid 146,5 \\ \times 8 \mid 1344 \\ \hline 121 \end{array}$$

88 есть число десятковъ квадратнаго корня изъ 786581; чтобы найти цифру единицъ этого корня, или, что то же, цифру десятковъ искомаго корня, нужно изъ 786581 вычесть квадратъ 880. Вычитаніе это, по частямъ сдѣланное, дало въ остаткѣ 12100 - 81 или 12181 — число, которое находимъ, снося 81 къ остатку перваго корня. Этотъ остатокъ заключаетъ, следовательно, удвоенное произведение 88 десятковъ на единицы и квадратъ единицъ корня изъ 786581. Совершенно такимъ же образомъ, какъ было указано въ § 128, можно доказать, что, раздѣливъ число десятковъ 1218 новаго остатка на удвоенное число 88 десятковъ, т.-е. на

2.88, или на 176,

мы найдемъ въ цѣлой части частнаго высшій предѣлъ цифры единицъ корня изъ 786581. Этотъ предѣлъ есть 6; для испытанія этой цифры удваиваемъ 88.

къ 176 приписываемъ справа 6 и множимъ 1766 на 6. Произведение $1766 \times 6 = 10596$ не превышаетъ 12181, а потому цифра 6 годится.

Итакъ, цифра десятковъ искомага корня есть 886. Остается найти цифру единицъ. Для этого изъ заданнаго числа слѣдуетъ вычесть 8860. Вычитаніе 880 десятковъ въ квадратъ сдѣлано и дано въ остаткѣ 1218100, который въ совокупности съ 43, составляетъ 1218143. Вычитая отсюда остальные двѣ части 8860 т.-е. 10596 сотенъ, находимъ 158543.

Въ этомъ остаткѣ заключается удвоенное произведение 8860 на простые единицы искомага корня и квадратъ единицъ. Раздѣливъ число десятковъ этого остатка или 15854 на 2, 886 1772, въ цѣлой части этого частного будемъ имѣть высшій предѣлъ для цифры простыхъ единицъ искомага корня. Предѣлъ этотъ есть 8; для испытанія цифры 8, приписываемъ ее къ 1772 и множимъ 17728 на 8. Произведение 141824 можно вычесть изъ 158543, сл. 8 есть действительно цифра единицъ искомага корня. Итакъ, корень $= 8868$, а остатокъ —

$$158543 - 141824 = 16719.$$

Дѣленіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 75,65,81,43} = 8868 \\ \underline{64} \\ 168 \overline{) 146,5} \dots\dots\dots 1\text{-я частный остатокъ.} \\ \times 8 \overline{) 1344} \\ \underline{1766} \overline{) 1218,1} \dots\dots\dots 2\text{-я } \text{»} \text{ } \text{»} \\ \times 6 \overline{) 10596} \\ \underline{17728} \overline{) 15854,3} \dots\dots\dots 3\text{-я } \text{»} \text{ } \text{»} \\ 8 \overline{) 141824} \\ \underline{16719} \dots\dots\dots \text{окончательн. остатокъ.} \end{array}$$

Окончательный остатокъ меньше $2 \times 8868 = 17736$, следовательно 8868 есть действительно корень изъ даннаго числа, точный до 1 по недостатку.

Отсюда выводимъ

133 Правило извлеченія квадратнаго корня точнаго до 1 по недостатку изъ цѣлаго числа.

Раздѣляютъ данное число на грани по двѣ цифры, отъ правой руки къ лѣвой (последняя грань можетъ имѣть и одну цифру); число граней равно числу цифръ корня.

Чтобы найти первую цифру корня, извлекаютъ квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ первой грани (слѣва).

Чтобы найти вторую цифру корня, вычитаютъ изъ первой грани квадратъ первой цифры корня и къ остатку сносятъ слѣдующую грань: получаютъ такъ называемый первый частный остатокъ. Отдѣляютъ въ немъ одну цифру спрва запятой, а стоящее влѣво отъ запятой число дѣлятъ на удвоенную первую цифру корня: частное дастъ или вторую цифру корня, или больше ея. Для повѣрки приписываютъ эту цифру съ правой стороны дѣлителя и полученное число умножаютъ на ту же цифру: если произведение возможно вычесть изъ перваго частного остатка, то испытанная цифра и будетъ второю цифрою

корня в отрицательном случае ее уменьшают на 1, и делают новую проверку таким же точно образом, как и первую; продолжают так до тех пор, пока вычитание делается возможным.

Чтобы найти третью цифру корня, к остатку послѣдняго вычитанія прибавляют третью грань, и получают второй частный остаток; въ немъ одну цифру справа запятой, а оставшееся влѣво ставятъ подъ чертой, и число дѣлятъ на удвоенное число, образуемое первыми двумя цифрами корня: частное дастъ высшій предѣлъ для третьей цифры. Проверяютъ цифру частного такимъ же образомъ, какъ и предыдущимъ случаемъ.

Такимъ образомъ продолжаютъ поступать до техъ поръ, пока не снесены все грани, и не будетъ определена послѣднимъ дѣленіемъ цифра простыхъ единицъ корня и окончательный остатокъ.

134. Примеры.

I. Найти $\sqrt{28164249}$.

$$\sqrt{28,16,42,49} = 5307$$

$$\begin{array}{r} 103 \overline{) 31,6} \\ \times 3 \overline{) 30,9} \\ \hline 1060 \overline{) 74,2} \\ \times 0 \overline{) 00,0} \\ \hline 10607 \overline{) 7424,9} \\ \times 7 \overline{) 7424,9} \\ \hline 0 \end{array}$$

II. Извлечь $\sqrt{583749876429}$.

$$\sqrt{58,37,49,87,64,29} = 764035$$

$$\begin{array}{r} 146 \overline{) 93,7} \\ \times 6 \overline{) 87,6} \\ \hline 1524 \overline{) 614,9} \\ \times 4 \overline{) 609,6} \\ \hline 152803 \overline{) 53876,4} \\ \cdot 3 \overline{) 45840,9} \\ \hline 1528065 \overline{) 803552,9} \\ \times 5 \overline{) 764032,5} \\ \hline 395 \overline{) 20,4} \end{array}$$

Такъ какъ остатокъ меньше удвоеннаго корня, то 764035 есть корень точный до 1 по недостатку; слѣд. 764036 есть корень, точный до 1 по избытку.

135. Опредѣлимъ, который изъ двухъ корней, точныхъ до 1, — корень по недостатку, или по избытку, точнѣе выражаетъ истинную величину несоизмѣрнаго корня. Можно доказать, что если, найдя корень точный до 1 по недостатку, окажется, что остатокъ корня не болѣе самаго корня, то этотъ корень ошибоченъ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{2}$; если же остатокъ окажется больше корня, то корень по избытку будетъ ошибоченъ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{2}$.

Пусть данное число есть N; корень, точный до 1 по недостатку, пусть будетъ a; остатокъ выразится разностью $N - a^2$.

Первый случай. — Извѣстъ

$$a^2 < N < (a + 1)^2;$$

по условію, остатокъ $N - a^2 \leq a$; слѣд. $N - a^2 < a + \frac{1}{4}$, откуда

$$N < a^2 + a + \frac{1}{4};$$

по $a^2 + a + \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$, а потому

$$N < \left(a + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Итакъ

$$a^2 < N < \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$$

откуда

$$a < \sqrt{N} < a + \frac{1}{2}.$$

Такъ какъ разность между крайними величинами равна $\frac{1}{2}$, то разность между \sqrt{N} и a меньше $\frac{1}{2}$. Слѣд. a есть корень, точный до $\frac{1}{2}$ по недостатку, т.-е. истинная величина \sqrt{N} отличается отъ a меньше, чѣмъ отъ $a + 1$.

Второй случай. Если окажется, что

$$N - a^2 > a,$$

то заключаемъ отсюда, что $N - a^2 > a + \frac{1}{4}$, потому что $(N - a^2)$ есть число цѣлое; слѣд.

$$N > a^2 + a + \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad N > \left(a + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Итакъ

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 < N < (a + 1)^2,$$

откуда

$$a + \frac{1}{2} < \sqrt{N} < a + 1.$$

Но разность между крайними числами равна $\frac{1}{2}$, слѣд. разность между $(a + 1)$ и \sqrt{N} меньше $\frac{1}{2}$. Заключаемъ, что $a + 1$ отличается отъ корня изъ N меньше нежели на $\frac{1}{2}$, т.-е. этотъ корень ближе лежитъ къ $a + 1$, чѣмъ къ a .

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что *выгоднѣе брать корень по избытку только тогда, когда остатокъ превышаетъ величину корня, взятаго по недостатку.*

Такъ, въ примѣрѣ II, § 134, получился остатокъ менѣйшій корня по недостатку, и потому 764035 точнѣе выражаетъ величину искомаго корня, чѣмъ число 764036. Въ примѣрѣ § 132 остатокъ больше найденнаго корня, и потому число 8869 ближе къ истинной величинѣ корня, чѣмъ число 8868.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ дробей съ точностью до 1.

136. ТЕОРЕМА. *Корень квадратный изъ несократимой дроби несоизмѣримъ, если его нельзя извлечь отдѣльно изъ числителя и знаменателя.*

Пусть $\frac{a}{b}$ есть данная несократимая дробь; равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = k,$$

т. е. k — число целое, невозможно, потому что, возвысивъ обѣ части въ квадратъ, найдемъ бы

$$\frac{a}{b} = k^2,$$

т. е. что несократимая дробь равна целому числу. Итакъ, квадратный корень изъ несократимой дроби не можетъ быть выраженъ целымъ числомъ. Посмотримъ, нельзя ли его выразить дробью, т. е. не будетъ ли возможно равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d},$$

т. е. подъ $\frac{c}{d}$ всегда можно разумѣть дробь несократимую. Возвысивъ обѣ части испытываемаго равенства въ квадратъ, найдемъ

$$\frac{a}{b} = \frac{c^2}{d^2},$$

гдѣ $\frac{c^2}{d^2}$ есть дробь, состоящая изъ чиселъ, т. е. изъ чиселъ, по условию, c и d — числа взаимно-первыхъ. Но дроби несократимыя не могутъ быть равны только тогда, когда числитель и знаменатель — между собою *, т. е. когда $a = c^2$ и $b = d^2$. Значитъ, a и b должны быть точными квадратами. Но если $\frac{a}{b}$ несократимая дробь только тогда можетъ быть равна дроби $\frac{c^2}{d^2}$, когда оба члена данной дроби суть точные квадраты, то изъ нея корень изъ дроби нельзя точно выразить дробью, т. е. дроби несократимой.

Въ частномъ случаѣ, когда $\frac{64}{81}$ извлекается точно, потому что 64 и 81 — точные квадраты. Имѣемъ

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}.$$

*) Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{a^1}{b^1}$ будутъ двѣ несократимыя дроби, и посмотримъ, при какихъ условіяхъ возможно равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1} \dots (1).$$

Опредѣляя a , имѣемъ: $a = \frac{a^1 b}{b^1}$; такъ какъ a — число целое, то $a^1 b$ должно дѣлиться на b^1 ; но a^1 есть число первое съ b^1 , сл. b должно дѣлиться на b^1 . Опредѣляя изъ (1) a^1 , имѣемъ: $a^1 = \frac{a b^1}{b}$, откуда такимъ же точно образомъ заключаемъ, что b^1 должно дѣлиться на b . Но два числа только тогда могутъ дѣлиться взаимно другъ друга, когда они равны; слѣд. $b = b^1$. Но въ такомъ случаѣ изъ равенства (1) слѣдуетъ, что и $a = a^1$. Итакъ, чтобы двѣ несократимыя дроби были равны, необходимо, чтобы числители ихъ были равны и знаменатели. Это условіе, очевидно, есть и вполне достаточное.

$\sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2}{9}}$ и $\sqrt{\frac{5}{7}}$ — несоизмѣримы, потому что у первой дроби знаменатель, у второй — числитель, а у третьей — оба члена суть неточные квадраты.

137. ТЕОРЕМА. — *Квадратный корень изъ дробнаго числа, точный до 1, есть квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ цѣлой части данного числа, или этотъ корень, сложенный съ 1.*

Пусть данное дробное число будетъ $a + b$, гдѣ a — цѣлое число, и b — правильная дробь. Разсмотримъ два случая.

Первый случай: a — точный квадратъ, напр. $a = r^2$; тогда очевидно, что

$$a + b > r^2.$$

Съ другой стороны: a , будучи r^2 , меньше $(r + 1)^2$; но если изъ двухъ неравныхъ цѣлыхъ, $(r + 1)^2$ и a , первое больше второго, то оно больше его, по меньшей мѣрѣ, на 1, сл. $(r + 1)^2 - a > b$, или $(r + 1)^2 > a + b$. Итакъ:

$$(r + 1)^2 > a + b > r^2;$$

откуда, переходя къ корнямъ, находимъ:

$$r + 1 > \sqrt{a + b} > r.$$

Разность крайнихъ чиселъ: $r + 1$ и r равна 1, а потому

$$\sqrt{a + b} - r < 1 \text{ и } (r + 1) - \sqrt{a + b} < 1,$$

слѣд. какъ r , такъ и $r + 1$ выражаютъ величину $\sqrt{a + b}$ съ ошибкою, меньшею 1; но r есть квадратный корень изъ a , а $r + 1$ — этотъ корень $+ 1$, сл. для этого случая теорема доказана.

Второй случай: a — неточный квадратъ, и пусть наибольший квадратъ, содержащійся въ a , будетъ r^2 ; въ такомъ случаѣ

$$r^2 < a < (r + 1)^2.$$

По первому неравенству: $a > r^2$, а потому и подавно

$$a + b > r^2.$$

Въ силу второго неравенства, изъ двухъ цѣлыхъ чиселъ: $(r + 1)^2$ и a , первое больше второго, сл. оно больше, по крайней мѣрѣ, на 1; а потому разность ихъ больше правильной дроби b :

$$(r + 1)^2 - a > b, \text{ откуда}$$

$$(r + 1)^2 > a + b.$$

Итакъ, имѣемъ:

$$(r + 1)^2 > a + b > r^2;$$

переходя къ корнямъ, находимъ:

$$(r + 1) > \sqrt{a + b} > r,$$

Из сего заключаемъ, что числа r и $r + 1$ выражаютъ $\sqrt{a + b}$ съ ошибкою меншею 1. Но r есть корень изъ цѣлой части a числа $a + b$, точный до недостатку, а $r + 1$ — этотъ корень $+ 1$, слѣд. теорема доказана и для этого случая. Отсюда

133 Правило. Для извлеченія квадратнаго корня изъ дробнаго числа $\frac{a}{b}$ до 1, слѣдуетъ отбросить дробь и извлечь, съ точностью до 1, корень изъ цѣлой части.

Замѣчаніе. Такъ какъ у правильной дроби цѣлая часть равна нулю, то изъ предыдущаго, что квадратный корень изъ такой дроби, точный до 0 — по недостатку, и 1 — по избытку.

Примѣръ 1. Найти $\sqrt{72\frac{41}{52}}$ точно до 1.

Изъ цѣлой части дроби извлекаемъ $\sqrt{72}$ съ точностью до 1; находимъ, что корень изъ цѣлой дроби съ требуемою точностью, равенъ: 8 — по недостатку, и 9 — по избытку.

Слѣд. $\sqrt{72\frac{41}{52}} = 8\frac{\dots}{\dots}$ до 1

Итакъ, $\sqrt{72\frac{41}{52}} = 8\frac{\dots}{\dots}$ до 1 съ требуемою точностью.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 4 \\ 47 \quad 32 \\ 7 \quad 29 \\ 32 \end{array}$$

Итакъ, $\sqrt{72\frac{41}{52}}$, искомый корень, равенъ: 27 — по недостатку, и 28 — по избытку.

Итакъ, $\sqrt{72\frac{41}{52}}$ точно до 1, $\sqrt{341731}$
0,452.

Итакъ, всего нужно выполнить указанное дѣленіе, ограничиваясь находженіемъ цѣлой части частнаго, и извлечь изъ нея корень съ точностью до 1. И такъ располагаютъ такъ:

$$\begin{array}{r} 3417310 \\ 3164 \\ \hline 2538 \\ 2260 \\ 2731 \\ 2712 \\ \hline 190 \end{array} \quad \begin{array}{l} | 452 \\ 75,60 = 86. \\ 64 \\ \hline 1160 \\ 996 \\ \hline 164 \end{array}$$

Итакъ, искомый корень равенъ: 86 — по недостатку, и 87 — по избытку

Извлечение квадратнаго корня изъ цѣлыхъ чиселъ и изъ дробей съ точностью до $\frac{1}{n}$.

139. Извлечь квадратный корень изъ цѣлаго или дробнаго числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ значитъ найти такую приближенную величину для искомаго корня, которая отличалась бы отъ его истинной величины менѣе чѣмъ на $\frac{1}{n}$.

Пусть требуется извлечь \sqrt{A} , гдѣ A — цѣлое или дробное число, представляющее неточный квадратъ, съ точностью до $\frac{1}{n}$, при чемъ дробь $\frac{1}{n}$ называется степенью приближенія. Помноживъ и раздѣливъ \sqrt{A} на n , мы не измѣнимъ его величины, слѣд.

$$\sqrt{A} = \frac{n\sqrt{A}}{n}.$$

Но $n = \sqrt{n^2}$; поэтому числителя можемъ представить въ видѣ $\sqrt{n^2} \times \sqrt{A}$, или, по правилу извлечения корня изъ произведенія, въ видѣ $\sqrt{An^2}$.

Такимъ образомъ

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{An^2}}{n}.$$

гдѣ An^2 — неточный квадратъ, потому что таково A . Извлекаемъ, по извѣстнымъ уже намъ правиламъ, $\sqrt{An^2}$ съ точностью до 1; найдемъ двѣ величины — r по недостатку, и $r+1$ по избытку, такъ что

$$r+1 > \sqrt{An^2} > r.$$

Раздѣливъ эти три числа на n и замѣтивъ, что $\frac{\sqrt{An^2}}{n} = \sqrt{A}$, найдемъ

$$\frac{r+1}{n} > \sqrt{A} > \frac{r}{n}.$$

Разность между крайними числами, $\frac{r+1}{n} - \frac{r}{n}$, равна $\frac{1}{n}$, слѣдов. каждая изъ разностей: $\sqrt{A} - \frac{r}{n}$ и $\frac{r+1}{n} - \sqrt{A}$, меньше $\frac{1}{n}$; это значитъ, что каждая изъ дробей: $\frac{r}{n}$ и $\frac{r+1}{n}$, выражаетъ величину \sqrt{A} съ ошибкою, меньшею $\frac{1}{n}$.

Отсюда выводимъ

140. Правило. Чтобы изъ даннаго цѣлаго или дробнаго числа извлечь квадратный корень съ точностью до $\frac{1}{n}$, нужно умножить это число на квадратъ знаменателя степени приближенія, изъ полученнаго произведенія извлечь квадратный корень съ точностью до 1 и раздѣлить его на знаменателя степени приближенія.

Примѣры. 1. Найти $\sqrt{32\frac{7}{13}}$ съ точностью до $\frac{1}{273}$.

По правилу должны $32\frac{7}{13}$ умножить на $(273)^2$, что даст 2425059; извлечь из этого числа квадратный корень съ точностью до 1, и раздѣлить его на 273 . Квадратный корень изъ 2425059, точный до 1 по недостатку, есть 1557, а по избытку — 1558; раздѣливъ тотъ и другой на 273, найдемъ: $5\frac{192}{273}$ и $5\frac{193}{273}$.

Такимъ образомъ $\sqrt{32\frac{7}{13}}$ заключается между числами $5\frac{192}{273}$ и $5\frac{193}{273}$, отличающимися отъ каждаго изъ нихъ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{273}$.

Найти $\sqrt[3]{3}$ съ точностью до 0,001.

Раздѣливъ 3 на 1000^2 , извлекаемъ $\sqrt[3]{3000000}$ до 1; получимъ числа 1732 и 1733. Раздѣливъ каждое на 1000, найдемъ

$$1,732 \text{ и } 1,733.$$

Найти $\sqrt[3]{3}$ съ точностью до 0,001 по недостатку, вторая — по избытку.

$$\sqrt[3]{2,1415926} = 1,053$$

Найти $\sqrt[3]{1,001}$ и $\sqrt[3]{1,002}$. Извѣстно, что $\sqrt[3]{1,001}$ и $\sqrt[3]{1,002}$ заключаются между $1,000$ и $1,001$. Цѣлая часть частнаго есть 59275, а корень изъ 59275, точный до 1 по недостатку, есть 243, а по избытку 244. Раздѣливъ 59275 на 243, получимъ для искоемыхъ приближеній, точныхъ до

$$2,43 \text{ (по нед.) и } 2,44 \text{ (по изб.)}$$

Сокращенный способъ извлеченія квадратнаго корня.

141. Предыдущія правила показываютъ, что извлеченіе квадратнаго корня сводится къ извлеченію его изъ цѣлаго числа съ точностью до 1. Это дѣйствіе дѣлается тѣмъ сложнѣе, чѣмъ больше цифръ содержитъ подданное число; въ такихъ случаяхъ дѣйствіе значительно упрощается при употребленіи такъ называемаго *сокращеннаго способа*.

Пусть будетъ A цѣлое число, изъ котораго требуется извлечь квадратный корень съ точностью до 1. Искомый корень можетъ имѣть или *нечетное*, или *четное* число цифръ.

1-й случай: корень имѣетъ нечетное число цифръ. Пусть въ немъ находится $2n + 1$ цифръ; найдемъ обыкновеннымъ способомъ больше половины его цифръ, въ данномъ случаѣ $n + 1$ цифръ, и буквою a обозначимъ число, образуемое этими цифрами, сопровождаемыми столькою нулями, сколько цифръ осталось найти, т.-е. n нулями (напр., если корень долженъ содержать 5 цифръ и найденныя три первыя его цифры будутъ 234, то буквою a мы обозначаемъ

число 23400); такимъ образомъ, a будетъ число $(2n + 1)$ — значное. Далѣе, назовемъ буквою x то, что слѣдуетъ придать къ a , чтобы получить истинный корень (x состоитъ изъ цѣлой части, являющей n цифръ и, можетъ быть, еще изъ несоизмѣримой десятичной дроби); полный корень выразится суммою $a + x$. Наша цѣль — дать правило для вычисленія цѣлой части x -а, т.е. для нахожденія x съ точностью до 1 сокращеннымъ путемъ.

По опредѣленію корня имѣемъ:

$$A = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$

гдѣ a уже извѣстно; вычтя a^2 изъ обѣихъ частей и раздѣливъ ихъ на $2a$, найдемъ

$$\frac{A - a^2}{2a} = \frac{x^2}{2a} \dots (1).$$

$A - a^2$ есть остатокъ послѣ нахожденія части a корня (назовемъ его буквою R); раздѣливъ его, какъ указываетъ формула, на $2a$, назовемъ частное этого дѣленія буквою q , а остатокъ — r , такъ что

$$\frac{R}{2a} = q + \frac{r}{2a}$$

подставимъ это выраженіе въ первую часть равенства (1); найдемъ:

$$q + \frac{r}{2a} = x + \frac{x^2}{2a},$$

откуда

$$x - q = \frac{r}{2a} - \frac{x^2}{2a}.$$

Докажемъ, что q и выражаетъ величину x съ ошибкою, меньшею 1. Такъ какъ разниця между x и q выражается формулою $\frac{r}{2a} - \frac{x^2}{2a}$, то и слѣдуетъ доказать, что

$$\frac{r}{2a} - \frac{x^2}{2a} < 1.$$

Дѣйствительно, такъ какъ r есть остатокъ дѣленія, въ которомъ $2a$ есть дѣлитель, а остатокъ меньше дѣлителя, то $\frac{r}{2a} < 1$. Съ другой стороны, въ цѣлой части x находится n цифръ, а потому x меньше наименьшаго $(n + 1)$ — значнаго числа 10^n ; а слѣд. $x^2 < 10^{2n}$; затѣмъ, a есть $(2n + 1)$ — значное число, слѣд. оно $> 10^{2n}$, а слѣд. $2a > 2 \cdot 10^{2n}$. Оставивъ двѣ дроби

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{10^{2n}}{2 \times 10^{2n}}$$

и замѣчая, что числитель первой меньше числителя второй, а знаменатель первой равенъ или больше знаменателя второй, заключаемъ, что первая дробь меньше второй:

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{10^{2n}}{2 \times 10^{2n}}, \text{ или } \frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2}.$$

Итакъ, каждая изъ дроби разности $\frac{r}{2a} - \frac{x^2}{2a}$ меньше 1, слѣд. и самая разность < 1 , т.е. ошибка, происходящая отъ замѣны x частнымъ q , если только

существует, непременно меньше 1, такъ что $a + q$ есть величина меньшая до 1.

Случай: корень имѣетъ четное число цифръ $2n$. Найдёмъ опять темъ же способомъ больше половины всѣхъ цифръ корня, т.-е. $n + 1$ цифръ. Въ цѣлой части x -са находится $(n - 1)$ -значное число, а потому x меньше наименьшаго n -значнаго числа, т.-е. 10^{n-1} , откуда $x^2 < 10^{2n-2}$; a есть $2n$ -значное число, слѣд. оно \geq или $>$ 10^{2n-1} , откуда $2a \geq 2 \cdot 10^{2n-1}$.

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{10^{2n-2}}{2 \times 10^{2n-1}} \text{ или } \frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2 \cdot 10}$$

Значеніе относительно q прежнее.

Въ цѣлой части корня, состоя изъ четнаго числа цифръ, имѣетъ первую цифру 5 или больше 5, то достаточно обыкновеннымъ способомъ найти ровно половину всѣхъ цифръ корня. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $x < 10^n$, а $x^2 < 10^{2n}$; съ другой стороны a , какъ $2n$ -значное число, начиная цифрой 5 или большею, будетъ \geq пятикратнаго наименьшаго $2n$ -значнаго числа, т.-е. $a \geq 5 \cdot 10^{2n-1}$, откуда $2a \geq 10 \cdot 10^{2n-1}$, или $2a \geq 10^{2n}$, а значитѣльно

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{10^{2n}}{10^{2n}} \text{ или } \frac{x^2}{2a} < 1.$$

Прежнее заключеніе относительно q и здѣсь имѣетъ мѣсто.

Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующее

Правило. — Для извлеченія квадратнаго корня изъ цѣлаго числа съ точностью до 1 сокращеннымъ способомъ, находятъ обыкновеннымъ способомъ больше половины всѣхъ цифръ корня, или же ровно половину, если, въ четномъ числѣ цифръ корня, первая его цифра не меньше 5; остальные цифры найдемъ, раздѣливъ полный остатокъ на двоекную найденную часть корня.

42. Примеръ. Найти квадратный корень съ точностью до 1 изъ числа 7316723456713.

Корень имѣетъ семь цифръ: находимъ четыре первыя прямымъ путемъ:

$$\begin{array}{r} \sqrt{7, 31, 67, 23, 45, 67, 13} \mid 2704 \\ 4 \\ \times 47 \mid 33,1 \\ \times 7 \mid 329 \\ 5404 \mid 2672,3 \\ \times 4 \mid 21616 \\ 5107456713 \mid 5408000 \\ 48672000 \mid 944 \\ 24025671 \\ 21632000 \\ \hline 23936713 \\ 21632000 \\ \hline 2304713 \end{array}$$

$$a = 2704000;$$

$$R = 5107456713.$$

$$q = 944.$$

$$r = 2304713.$$

Найдя первыя четыре цифры корня (2704), находимъ съ точностью до 1 частное отъ раздѣленія полнаго остатка 5107456713 на удвоенный найденный корень 2704000, т.-е. на 5408000. Это частное = 944; слѣд. искомый корень, точный до 1, есть

$$2704944.$$

143. По величинѣ частнаго q и остатка r дѣленія можно всегда узнать, будетъ ли найденный корень $a + q$ точный, или приближенный; и въ послѣднемъ случаѣ — опредѣлить, будетъ ли онъ ошибоченъ по недостатку, или по избытку.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ равенство

$$A - a^2 = R, \text{ откуда } A = a^2 + R;$$

но $R = 2aq + r$, слѣдовательно

$$A = a^2 + 2aq + r.$$

Съ другой стороны

$$(a + q)^2 = a^2 + 2aq + q^2.$$

Отсюда:

1) Если $r > q^2$, то

$$a^2 + 2aq + r > a^2 + 2aq + q^2,$$

или

$$A > (a + q)^2,$$

откуда

$$\sqrt{A} > a + q,$$

т.-е. $a + q$ будетъ приближеніе, точное до 1 по недостатку.

2) Если $r = q^2$, то

$$a^2 + 2aq + r = a^2 + 2aq + q^2,$$

или

$$A = (a + q)^2,$$

откуда

$$\sqrt{A} = a + q,$$

т.-е. $a + q$ есть точный корень изъ A .

3) Если, наконецъ, $r < q^2$, то

$$a^2 + 2aq + r < a^2 + 2aq + q^2,$$

или

$$A < (a + q)^2,$$

откуда

$$\sqrt{A} < a + q,$$

и потому $a + q$ есть приближеніе, точное до 1 по избытку.

Итакъ: корень $a + q$ будетъ приближенный по недостатку, точный, или же приближенный по избытку, смотря по тому, будетъ ли остатокъ r дѣленія больше, равенъ или меньше квадрата частнаго.

Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ остатокъ 2304713 больше квадрата числа 944; поэтому корень 2704944 ошибоченъ менѣе чѣмъ на 1 по недостатку.

нымъ способомъ. Для этого нужно полный остатокъ, равный 1190000, раздѣлить на удвоенную найденную часть корня, т.-е. на 28200,

$$\begin{array}{r} 119000.0 \\ 112800 \\ \hline 62000 \\ 56400 \\ \hline 5600 \\ -1764 \\ \hline 3836 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28200 \\ 42 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 \\ \times 42 \\ \hline 84 \\ 168 \\ \hline 1764 \end{array}$$

Находимъ въ частномъ 42 и въ остаткѣ 3600. Чтобы узнать, въ какую сторону ошибоченъ корень 14142, нужно полученный остатокъ сравнить съ квадратомъ частнаго: $3600 > 42^2$, слѣд. 14142 есть приближеніе по недостатку, и потому последнюю его цифру (2) уменьшать не слѣдуетъ.

Имеем пять цифр корня, можно сократить способ и найти следующие четыре цифры. Для этого надо знать остаток, который дала бы обыкновенная операция после нахождения части 141420000 корня из 20000000000000000, т.е. остаток корня p . Так как $a + p = 14142$ есть приближение по недостатку, то $p = r - q^4 = 5600 - 1764 = 3836$. Приписав сюда 8 нулей, делим полученное число на $2a = 282840000$.

38360000	0000	28284	0000	1356
28284		<u>1356</u>		<u>1356</u>
100760				8136
84852				6780
159080				4068
141420				1356
<u>176600</u>				<u>1838736</u>
169704				
<u>68960000</u>				
<u>— 1838736</u>				
67121264				

Находимъ въ частномъ 1356, а въ остаткѣ 68960000. Такъ какъ этотъ остатокъ больше 1356², корень снова ошибоченъ по недостатку: онъ равенъ 141421356.

Зная девять цифръ корня, можемъ сокращеннымъ способомъ найти слѣдующія восемь; для этого опредѣляемъ остатокъ корня:

$$p = 68960000 - (1356)^2 = 67121264.$$

Приписавъ къ остатку корня 16 нулей, а къ удвоенному найденному корню 8 нулей, дѣлимъ

6712126400000000 | 00000000 282842712 | 00000000
1055272160 : : : ; 23730950
2067440240
875412560 ;
2688442400
1428579920
143663600

Въ частномъ мы нашли 23730950, и какъ остатокъ дѣленія больше квадратнаго частнаго, найденный результатъ ошибоченъ по недостатку; имѣемъ

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950,$$

с точностью до 1 шестнадцатаго десятичнаго мѣста. Очевидно, можно продолжать такимъ образомъ находить сколько угодно новыхъ цифръ корня.

146. Извлеченіе квадратнаго корня изъ числа, мало разнящагося отъ 1.

Положивъ въ квадратъ $1 + \frac{\varepsilon}{2}$, найдемъ: $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}$, результатъ мало разнящійся отъ $1 + \varepsilon$, если ε есть весьма малая дробь; откинувъ $\frac{\varepsilon^2}{4}$, получимъ приближительное равенство $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon$, откуда, извлекая квадратный корень изъ частей, найдемъ:

$$\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

Результатъ. Опредѣлимъ предѣлъ погрѣшности этого приближенія, т.-е.

$$x = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{1 + \varepsilon}.$$

Въ числѣ и знаменателѣ выразимъ ε на сумму

$$\varepsilon = \alpha + \beta,$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{4} - (1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2, \quad \beta = \frac{\varepsilon^2}{4} - (1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Откинувъ въ знаменателѣ малую дробь $\frac{\varepsilon^2}{4}$ и ε (подъ знакомъ корня), мы получимъ знаменатели уменьшимъ, а слѣдов. выраженіе второй части увеличимъ, такъ что будетъ

$$\alpha < \frac{\varepsilon^2}{4(1 + \sqrt{1})}, \quad \text{или} \quad \alpha < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Отсюда заключаемъ, что для извлеченія квадратнаго корня изъ числа $1 + \varepsilon$, мало превышающаго 1, достаточно прибавить къ 1 половину избытка ε : найдемъ результатъ, точный до $\frac{\varepsilon^2}{8}$ по избытку.

Примѣръ. Найти приближенно $\sqrt{1,000694}$.

По правилу имѣемъ:

$$\sqrt{1,000694} = 1 + \frac{0,000694}{2} = 1,000347$$

съ точностью до $\frac{7^2}{8 \cdot 10^8}$ или до $\frac{1}{10^7}$. Заключаемъ, что ошибка не вліяетъ на послѣдній десятичный знакъ приближенія 1,000347.

147. Признаки неточных квадратов.—Въ заключеніе укажемъ нѣкоторые признаки неточныхъ квадратовъ.

1. $(2n)^2 = 4n^2$, т.-е. квадратъ всякаго четнаго числа $(2n)$ дѣлится на 4, а слѣд. обратно, четное число только тогда *можетъ быть* квадратомъ, когда оно дѣлится на 4. Само собою разумѣется, что изъ этого не слѣдуетъ, чтобы всякое число, дѣлящееся на 4, было необходимо точнымъ квадратомъ; такъ, 40 есть неточный квадратъ.

2. $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$, т.-е. всякое нечетное число имѣетъ квадратъ вида $4n^2 + 4n + 1$, т.-е. такой, который, будучи уменьшенъ на 1, дѣлится на 4; слѣд. обратно, нечетное число только тогда *можетъ быть* точнымъ квадратомъ, когда оно, уменьшенное на 1, дѣлится на 4.

3. Изъ умноженія цѣлыхъ чиселъ извѣстно, что произведеніе двухъ такихъ чиселъ оканчивается тою же цифрою, какою и произведеніе ихъ простыхъ единицъ. Но квадраты чиселъ 1, 2, 3, . . . 9 оканчиваются цифрами 1, 4, 9, 6, 5, 4, 9, 6, 1, но не оканчиваются цифрами 2, 3, 7 и 8. Изъ этого слѣдуетъ, что всякое цѣлое число, оканчивающееся одною изъ цифръ 2, 3, 7 и 8, не можетъ быть точнымъ квадратомъ. Зѣль опять слѣдуетъ замѣтить, что если число оканчивается одною изъ цифръ 1, 4, 5, 6 и 9, то оно не есть необходимо точный квадратъ; такъ, 625 есть точный, а 15—неточный квадратъ.

4. Если число оканчивается 5-ю, его квадратъ долженъ оканчиваться 25-ю. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая число какъ сумму десятковъ и простыхъ единицъ, находимъ, что квадратъ десятковъ оканчивается двумя нулями, удвоенное произведеніе десятковъ на единицы, въ данномъ случаѣ, будетъ оканчиваться также двумя нулями, слѣд. квадратъ числа, оканчивающагося 5-ю, необходимо оканчивается 25-ю. Слѣд., всякое число, оканчивающееся 5-ю, котораго предпослѣдняя цифра не есть 2, не можетъ быть точнымъ квадратомъ.

5. Квадратъ числа, оканчивающагося нулями, имѣетъ нулей вдвое больше, т.-е. четное число ихъ. Слѣд., число, оканчивающееся нечетнымъ числомъ нулей, не есть точный квадратъ.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена.

148. Корень изъ многочлена только въ исключительныхъ случаяхъ извлекаемъ, т.-е. можетъ быть выраженъ въ формѣ рациональнаго многочлена.

Для возможности извлеченія квадратнаго корня изъ многочлена, послѣдній долженъ содержать не менѣе трехъ неприводимыхъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, если данный многочленъ есть двучленъ, то корень изъ него не можетъ быть выраженъ точно ни одночленомъ, ни многочленомъ, потому что квадратъ одночлена есть одночленъ, а квадратъ простѣйшаго многочлена — двучленъ, содержать три неприводимыхъ члена.

Пусть данный многочленъ будетъ точный квадратъ:

$$25a^6x^6 - 20a^3x^5 + 74a^4x^4 - 48a^2x^3 + 57a^6x^2 - 28a^7x + 4a^8,$$

расположенный по убывающимъ степенямъ главной буквы x , и пусть

$$p + q + r + s + \dots$$

будетъ квадратный корень изъ него, также расположенный по убывающимъ сте-

печамъ x . Данный многочленъ, какъ квадратъ своего корня, будетъ $= (p + q + r + s + \dots)^2$; или, раскрывъ этотъ квадратъ, получимъ равенство

$$25a^2x^6 - 20a^2x^5 + 74a^2x^4 - 48a^2x^3 + 57a^2x^2 - 28a^2x + 4a^8 = p^2 + 2pq + q^2 + 2(p+q)r + r^2 + 2(p+q+r)s + s^2 + \dots (1)$$

Вторая часть этого равенства, по раскрытіи скобокъ и по приведеніи, должна давать первую часть, потому равенство это есть тождество, а слѣдов. высшіе члены въ обѣихъ частяхъ должны быть равны. Но вторая часть есть произведение $(p + q + \dots)(p + q + \dots)$, а потому высшій членъ ея равенъ произведенію высшихъ членовъ сомножителей, т.е. $p \cdot p$ или p^2 . Итакъ $p^2 = 25a^2x^6$, откуда

$$p = \sqrt{25a^2x^6}.$$

Итакъ, чтобы найти высшій членъ корня, нужно извлечь квадратный корень изъ высшаго члена данного полинома.

Возьмемъ для p его значеніе со знакомъ $+$, т.е. положимъ $p = 5ax^3$. Вмѣстѣ изъ первой части равенства (1) $25a^2x^6$, а изъ второй части — $20a^2x^5$, откуда

$$2pq + q^2 + 2(p+q)r + r^2 + \dots (2),$$

члены должны быть равны; но высшій членъ равенства (2) $2pq$ равенъ $2 \cdot 5ax^3 \cdot q = 10ax^3q$, а высшій членъ равенства (1) $20a^2x^5$, откуда

$$q = -20a^2x^5 : 10ax^3 = -2a^2x^2.$$

Итакъ, чтобы найти второй членъ корня, нужно вычесть изъ данного полинома квадратъ первого члена корня, и высшій членъ первого остатка разделить на удвоенный первый членъ корня.

Получимъ изъ обѣихъ частей тождества (2) по

$$2pq + q^2, \text{ или } (2p + q)q.$$

т.е. въ данномъ случаѣ

$$(10ax^3 - 2a^2x^2)(-2a^2x^2) = -20a^2x^5 + 4a^4x^4,$$

найдемъ тождество

$$70a^4x^4 - 48a^2x^3 + 57a^2x^2 + \dots = 2(p+q)r + r^2 + 2(p+q+r)s + s^2 + \dots (3).$$

Высшіе члены обѣихъ частей его должны быть равны; но высшій членъ второй части есть $2pr$, слѣдов. $2pr = 70a^4x^4$; а какъ $p = 5ax^3$, то

$$10ax^3 \cdot r = 70a^4x^4, \text{ откуда}$$

$$r = 70a^4x^4 : 10ax^3 = 7a^3x.$$

Отсюда заключаемъ: чтобы найти третій членъ корня, нужно вычесть изъ перваго остатка произведеніе второго члена на алгебраиче-

скую сумму удвоеннаго перваго члена со вторымъ, и высшій членъ второго остатка раздѣлить на удвоенный первый членъ корня.

Вычтемъ изъ обѣихъ частей тождества (3) по

$$2(p - q)r + r^2, \text{ т.-е. } (2p + 2q + r) \cdot r,$$

или въ данномъ случаѣ

$$(10ax^3 - 4a^2x^2 + 7a^3x) \cdot 7a^4x = 70a^4x^4 - 28a^5x^3 + 49a^6x^2.$$

Сдѣлавъ это, получимъ тождество

$$-20a^5x^3 + 8a^6x^2 - 28a^7x - 4a^8 = 2(p + q + r)s + s^2 + \dots (4).$$

Высшіе члены обѣихъ частей должны быть равны, и какъ высшій членъ второй части есть $2ps$, то $2ps = -20a^5x^3$, или $10ax^3 \cdot s = -20a^5x^3$, откуда $s = -2a^4x^0$; $10ax^3 = -2a^4$.

Отсюда: чтобы найти четвертый членъ корня, нужно вычесть изъ второго остатка произведение третью члена корня на алгебраическую сумму удвоенныхъ первыхъ двухъ членовъ корня съ третьимъ, и высшій членъ третьего остатка раздѣлить на удвоенный первый членъ корня.

Вычтемъ изъ обѣихъ частей тождества (4) по

$$2(p + q + r)s + s^2, \text{ т.-е. } (2p + 2q + 2r + s) \cdot s,$$

или въ данномъ случаѣ

$$(10ax^3 - 4a^2x^2 + 14a^3x - 2a^4) \cdot (-2a^4) = -20a^5x^3 + 8a^6x^2 - 28a^7x + 4a^8;$$

въ первой части тождества получается въ остаткѣ ноль, слѣд. данный полиномъ есть квадратъ полинома $p + q + r + s$, т.-е. въ данномъ случаѣ корень въ точности равенъ $5ax^3 - 2a^2x^2 + 7a^3x - 2a^4$.

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{rcl} 25a^4x^3 - 20a^5x^2 + 74a^6x^4 - 48a^7x^3 + 57a^8x^2 - 28a^9x + 4a^8 & 5a^4x^3 - 2a^5x^2 + 7a^6x - 2a^4 & \\ \pm 20a^5x^3 \mp 4a^6x^4 & (10ax^3 = 2a^4x^0)(-2a^4x^0) & \\ \hline 2\text{-й ост.} \dots \dots 70a^4x^4 - 48a^5x^3 + 57a^6x^2 - 28a^7x + 4a^8 & (10ax^3 - 4a^2x^2 + 7a^3x) \cdot 7a^4x & \\ \quad - 70a^4x^4 \pm 28a^5x^3 \mp 49a^6x^2 & & \\ \hline 3\text{-й ост.} \dots \dots -20a^5x^3 + 8a^6x^2 - 28a^7x + 4a^8 & (10ax^3 - 4a^2x^2 + 14a^3x - 2a^4)(-2a^4) & \\ \quad \pm 20a^5x^3 \mp 8a^6x^2 \pm 28a^7x \mp 4a^8 & & \\ \hline & (1) & \end{array}$$

149. Правило. — Чтобы извлечь квадратный корень изъ цѣлаго по буквѣ x полинома, представляющаго точный квадратъ, располагаютъ полиномъ по убывающимъ степенямъ буквы x ; извлекая квадратный корень изъ перваго члена полинома, найдемъ первый членъ корня.

Вычтя изъ даннаго полинома квадратъ перваго члена корня, и раздѣливъ первый членъ остатка на удвоенный первый членъ корня, получимъ второй членъ его.

Чтобы найти третій членъ корня, вычитаютъ изъ перваго остатка произведение второго члена корня на алгебраическую сумму удвоеннаго перваго члена корня со вторымъ, и дѣлятъ первый членъ второго остатка на удвоенный первый членъ корня: частное и будетъ третьимъ членомъ корня.

Для нахождения четвертого члена корня вычитают из второго остатка произведение третьего члена корня на алгебраическую сумму удвоенных первых двух членов корня съ третьимъ, и отънимаютъ первый членъ третьего остатка на удвоенный первый членъ корня: частное этого дѣленія и дастъ четвертый членъ корня.

Продолжаютъ эти дѣйствія до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ не получится ноль.

Это правило безъ измѣненія прилагается и къ тому случаю, когда данный полиномъ будетъ расположенъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы.

150. Примѣчанія. — I. Степень корня, очевидно, вдвое меньше степени полинома.

II. Для первого члена корня (§ 148) мы могли бы взять: — $5ax^3$; изъ формулъ для q , r и s видно, что въ такомъ случаѣ нашли бы: $q = +2a^2x^2$, $r = -7a^3x$, $s = +2a^4$; слѣд. второе значеніе корня будетъ: — $5ax^3 + 2a^2x^2 - 7a^3x + 2a^4$. Оно отличается отъ перваго только знакомъ. Итакъ, искомымъ корнемъ имѣетъ два значенія:

$$\pm (5ax^3 - 2a^2x^2 + 7a^3x - 2a^4).$$

151. Выводя правило § 149, мы предполагали, что существуетъ многочленъ $P = q + \dots + t$ съ конечнымъ числомъ членовъ, квадратъ котораго равенъ данному полиному P . Но прежде, чѣмъ идти впередъ неизвѣстно, существуетъ ли такой многочленъ $P = q + \dots + t$, будетъ ли P точный квадратъ. Чтобы узнать это, примѣнимъ его, всегда посылъ примѣнимъ, членъ P долженъ быть, будетъ ли P точный квадратъ, и если да, то каковы будутъ члены q, r, s . § 148, когда оно существуетъ, если полиномъ P расположенъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы, нижній членъ P долженъ быть точнымъ квадратомъ, съ которыми могъ бы быть соединенъ членъ P , равняющійся лишнему члену, — назовемъ его L , — $P = q^2 + L$, откуда $t = \pm \sqrt{L}$. Следовательно, членъ P можетъ быть непосредственно найденъ извлеченіемъ корня изъ L члена данного полинома. Поэтому, показатель главной буквы члена L долженъ быть числомъ четнымъ. Пусть это такъ и есть, и пусть это число $2k$. Когда, выполняя дѣйствія, мы дойдемъ въ корнѣ до члена степени k , найдемъ, наприм., что этотъ членъ Px^k , то, чтобы данный полиномъ былъ точнымъ квадратомъ, необходимо: во-1-хъ, чтобы было $(Px^k)^2 = L$, и, во-2-хъ, чтобы слѣдующій остатокъ былъ нулемъ. Эти условія, будучи необходимыми, очевидно, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточны.

Тѣ же разсужденія приложимы и къ случаю, когда оба полинома расположены по восходящимъ степенямъ главной буквы: стоитъ только вездѣ слово «нижній» замѣнить словомъ «высшій».

Когда указанные условія не имѣютъ мѣста, то данный полиномъ не есть точный квадратъ.

Пусть, въ такомъ случаѣ, данный многочленъ есть P , остатокъ, который долженъ бы быть нулемъ — R , а корень — U ; такъ какъ остатокъ получился по вычитаніи изъ P всѣхъ членовъ квадрата многочлена U , то $P - U^2 = R$, откуда

$$P = U^2 + R.$$

Эта формула и служитъ для преобразованія неточнаго квадрата.

Примеръ I. Возьмемъ полиномъ, расположенный по убывающимъ степенямъ главной буквы, наприм.

$$9a^2x^4 - 24a^2x^3 + 46a^4x^2 - 20a^5x + 13a^6.$$

Если этотъ многочленъ есть точный квадратъ, то низшій членъ корня долженъ быть равенъ $\sqrt{13a^6}$, а слѣдующій затѣмъ остатокъ долженъ быть нулемъ. Если оба эти условія окажутся невыполненными, то должно заключить, что данный полиномъ не есть точный квадратъ. Приѣмается правило § 149.

$$\begin{array}{r} 9a^2x^4 = 24a^2x^3 + 46a^4x^2 - 20a^5x + 13a^6 \\ \pm 24a^2x^3 \mp 16a^4x^2 \\ \hline 30a^4x^2 - 20a^5x + 13a^6 \\ - 30a^4x^2 \pm 40a^5x \mp 25a^6 \\ \hline 20a^5x - 12a^6 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3ax^3 - 4a^2x + 5a^3 \\ (6ax^2 - 4a^2x) (= 4a^2x) \\ (6ax^2 - 8a^2x + 5a^3) \cdot 5a^3 \end{array}$$

Найдя въ корнѣ членъ $+5a^3$, и замѣчая, что: 1) онъ не равенъ $\sqrt{13a^6}$, а 2) что слѣдующій остатокъ не есть 0, заключаемъ, что данный полиномъ не есть точный квадратъ. Приѣмая формулу $P = U^2 + R$, можемъ его представить въ видѣ

$$(3ax^2 - 4a^2x + 5a^3)^2 + 20a^5x - 12a^6.$$

Примеръ II. Пусть данный полиномъ расположенъ по восходящимъ степенямъ главной буквы, наприм.

$$1 - 5x + 4x^2 - 6x^3 + 8x^4.$$

Если этотъ многочленъ—точный квадратъ, то добѣ въ корнѣ до члена, содержащаго x^3 , и получивъ затѣмъ остатокъ неравный 0, должны заключить, что данный полиномъ есть неточный квадратъ.

$$1 - 5x + 4x^2 - 6x^3 + 8x^4$$

$$\pm 5x \mp \frac{25}{4}x^2$$

$$- \frac{9}{4}x^2 - 6x^3 + 8x^4$$

$$+ \frac{9}{4}x^2 \mp \frac{45}{8}x^3 \mp \frac{81}{64}x^4$$

$$- \frac{93}{8}x^3 + \frac{431}{64}x^4$$

$$\pm \frac{93}{8}x^3 \mp \frac{465}{16}x^4 \mp \frac{837}{64}x^5 \mp \frac{8649}{256}x^6$$

$$- \frac{1129}{64}x^4 - \frac{537}{64}x^5 - \frac{8649}{256}x^6 \text{ и т. д.}$$

$$1 - \frac{5}{2}x - \frac{9}{4}x^2 - \frac{93}{16}x^3$$

$$(2 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}x^2)$$

$$(2 - 5x - \frac{9}{8}x^2) - \frac{9}{8}x^2$$

$$2 - 5x - \frac{9}{4}x^2 - \frac{93}{16}x^3 \mid \frac{93}{16}x^3$$

$$(2 - 5x - \frac{9}{4}x^2 - \frac{93}{16}x^3) - \frac{93}{16}x^3$$

и т. д.

Разница этого случая отъ предыдущаго заключается въ томъ, что степени главной буквы въ послѣдовательныхъ остаткахъ повышаются, а это ведетъ за собою возможность получения въ частностъ неограниченнаго числа членовъ, члѣныхъ относительно главной буквы, такъ что разложеніе многочлена по формулѣ $P = U^2 + R$, гдѣ U и R —цѣлыя относительно x выраженія,—неопредѣленно.

152 *Примеченія. — I. Найти условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы квадратный триномъ*

$$ax^2 + bx + c$$

былъ точнымъ квадратомъ.

1-й методъ. Найдемъ остатокъ квадратнаго корня изъ даннаго тринома.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c & \left| x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right. \\ & - bc \pm \frac{b^2}{4a} \left(2x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{b}{2\sqrt{a}} \\ & c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Чтобы триномъ былъ точнымъ квадратомъ, необходимо и достаточно, чтобы остатокъ былъ равенъ нулю, т.-е. чтобы

$$c - \frac{b^2}{4a} = 0, \text{ или } b^2 - 4ac = 0.$$

2-й методъ. Положивъ

$$ax^2 + bx + c = (x + \beta)^2$$

раскрывъ вторую часть, найдемъ тождество

$$ax^2 + bx + c = x^2 + 2\alpha x + \beta^2;$$

равнявая коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ x , найдемъ три условія:

$$a = \alpha^2; \quad b = 2\alpha\beta; \quad c = \beta^2.$$

Эти три условія должны существовать совместно, а потому величины α и β , выведенныя изъ 1-го и 3-го, должны удовлетворять второму.

Такимъ образомъ найдемъ: $b = \pm 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{c}$, или $b^2 = 4ac$.

Примѣчаніе. Если бы a равнялось нулю, то изъ условія $b^2 = 4ac$, слѣдуетъ, что и b должно $= 0$; триномъ приводится въ этотъ случай къ c : это есть квадратъ количества \sqrt{c} . Поэтому можно сказать, что каково бы ни было a , искомое условіе есть $b^2 - 4ac = 0$.

II. *Найти условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы триномъ*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

былъ точнымъ квадратомъ.

Различаемъ два случая: 1) $a = 0$; 2) a не равно 0.

Когда $a = 0$, то, какъ триномъ не можетъ имѣть высшей степени x первой, необходимо положить и $b = 0$. Это условіе, будучи необходимымъ, имѣетъ съ тѣмъ и достаточно; ибо, если оно выполнено, то триномъ приводится къ cy^2 ; а это есть точный квадратъ количества $\sqrt{c} \cdot y$.

Пусть a не равно нулю. Извлечение корня дает:

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2 \sqrt{a \cdot x + \frac{b}{a}y}}{\left(c - \frac{b^2}{a}\right) \cdot y^2} = \frac{2bxy + \frac{b^2}{a}y^2 \left(2\sqrt{a \cdot x + \frac{b}{a}y}\right) \cdot \frac{b}{a}y}{\left(c - \frac{b^2}{a}\right) \cdot y^2}$$

Закключаемъ, что если $\frac{b^2}{a} = c$, или $\frac{b^2}{a} - ac$ не равно нулю, т.-е. если $b^2 - ac$ отлично отъ нуля, тринომъ не есть точный квадратъ. Итакъ, *необходимо*, чтобы $b^2 - ac$ равнялось нулю. Этого условия, выхъ съ тѣмъ, и достаточно; ибо равенство

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \left(\sqrt{a \cdot x + \frac{b}{a}y}\right)^2 \cdot \frac{ac - b^2}{a}y^2$$

показываетъ, что какъ скоро $b^2 = ac$, данный триномъ превращается въ точный квадратъ количества

$$\sqrt{a \cdot x + \frac{b}{a}y}, \text{ или } \frac{ax + by}{\sqrt{a}}.$$

III. Найти условия, *необходимыя и достаточныя* для того, чтобы *полиномъ*

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

былъ точнымъ квадратомъ.

Къ этому примѣру можно приложить общій методъ, который мы пользовались въ двухъ предыдущихъ примѣрахъ. Но мы выведемъ искомыя условия изъ условий, найденныхъ въ предыдущемъ примѣрѣ.

Различаемъ опять два случая: $a = 0$ и a не равно 0.

Первый случай. Когда $a = 0$, то, какъ данный полиномъ, чтобы быть точнымъ квадратомъ, не долженъ содержать членовъ съ первой степенью x , мы должны при всякихъ y и z имѣть

$$b'z + b''y = 0,$$

откуда, извѣстныхъ уже путемъ, заключаемъ, что

$$b' = 0 \quad \text{и} \quad b'' = 0.$$

Полиномъ приводится къ

$$a'y^2 + 2byz + a''z^2.$$

Изъ предыдущаго примѣра знаемъ, что триномъ этого вида будетъ точнымъ квадратомъ при условіи

$$a'a'' - b^2 = 0.$$

Итакъ, искомыя условия суть:

$$b' = 0, \quad b'' = 0, \quad a'a'' - b^2 = 0.$$

Второй случай. Пусть a не равно 0. Дадимъ полиному видъ

$$ax^2 + 2(b''y + b'z)x + a'y^2 + 2byz + a''z^2.$$

Его можно разсматривать какъ квадратный относительно x тринномъ, котораго первый коэффициентъ a отличенъ отъ нуля. Прилагая сюда доказанное въ предыдущемъ примѣрѣ условіе, найдемъ

$$(b''y + b'z)^2 = a(a'y^2 + 2byz + a''z^2).$$

Такъ какъ это равенство должно быть *тождествомъ*, оно должно имѣть мѣсто *при всякомъ y и при всякомъ z* ; откуда известнымъ образомъ найдемъ условія:

$$b''^2 = aa'; \quad b'b'' = ab; \quad b'^2 = aa''.$$

Этихъ условій, вѣсть съ тѣмъ, и вполне достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, изъ нихъ имѣемъ:

$$a' = \frac{b'^2}{a}; \quad a'' = \frac{b''^2}{a}; \quad b = \frac{b'b''}{a}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, эти значения a' , a'' и b въ данный полиномъ, дадимъ ему видъ

$$\begin{aligned} ax^2 + \frac{b'^2 y^2}{a} + \frac{b''^2 z^2}{a} + \frac{2b'b'' yz}{a} + 2b'zx + 2b''zy \\ = \frac{ax^2 + 2b'xy + b'^2 \frac{y^2}{a} + 2b''zy + b''^2 \frac{z^2}{a}}{1} = \frac{(ax + b'y + b'z)^2}{a}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при найденныхъ условіяхъ данный полиномъ есть *полный квадратъ* количества

$$\frac{ax + b'y + b'z}{\sqrt{a}}.$$

ГЛАВА XIII.

Извлеченіе кубическаго корня изъ чиселъ и многочленовъ.

Предложенія: предварительныя теоремы. — Извлеченіе кубическаго корня изъ цѣлыхъ и десятичныхъ чиселъ съ точностью до 1 и до $\frac{1}{n}$. — Сокращенный способъ. — Извлеченіе кубическаго корня изъ многочленовъ.

153. Когда число есть кубъ другого числа, то первое называется *точнымъ кубомъ*, а второе — *точнымъ кубическимъ корнемъ* изъ перваго. Такъ 125 — точный кубъ 5-ти, а 5 — точный кубический корень изъ 125.

154. Разсужденіями, приведенными въ § 124, докажемъ, что:

Если цѣлое число не есть точный кубъ, то кубический корень изъ него не выражается точно въ цѣлыхъ единицахъ, не можетъ быть точно выраженъ и ни въ какихъ доляхъ единицы.

Такие корни называются несоизмеримыми с единицею: такъ, кубичные корни изъ чиселъ: 3, 10, 15 и т. д. суть числа несоизмеримыя.

155. Определеія.—*Кубичный корень изъ цѣлаго числа, точный до единицы, есть корень изъ наибольшаго куба, заключающагося въ этомъ числѣ, или этотъ корень $+1$.*

Первый называется корнемъ точнымъ до 1 по недостатку, второй — по избытку. Такъ, замѣчая, что наибольшій кубъ, заключающійся въ 70, есть 64, заключаемъ, что кубичный корень изъ 70, точный до 1 по недостатку, есть 4, а по избытку — 5.

156. Остаткомъ кубичнаго корня изъ цѣлаго числа называется избытокъ этого числа надъ кубомъ его корня, точнаго до 1 по недостатку. Напр., остатокъ кубичнаго корня изъ 70 есть разность $70-64$ или 6.

Вообще, если данное число есть N , кубичный корень изъ него, точный до 1 по недостатку, равенъ A , а остатокъ R , то, по определенію остатка, $R = N - A^3$, откуда

$$N = A^3 + R.$$

Въ частности, когда N есть точный кубъ, остатокъ корня равенъ нулю.

Теорема.—*Остатокъ кубичнаго корня не больше утроеннаго произведения корней изъ даннаго числа, точныхъ до 1 по недостатку и по избытку.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A есть кубичный корень изъ N , точный до 1 по недостатку; въ такомъ случаѣ N содержится между A^3 и $(A+1)^3$, и слѣд. разность между N и A^3 меньше разности $(A+1)^3 - A^3$ или $3A(A+1) + 1$, т.-е.

$$R < 3A(A+1) + 1.$$

Но R и $3A(A+1) + 1$ суть числа цѣлыя, и R — меньше изъ нихъ, то оно меньше второго по крайней мѣрѣ на 1, т.-е.

$$R \leq 3A(A+1).$$

Слѣдствіе. *Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы A было кубичнымъ корнемъ изъ N , точнымъ до 1 по недостатку, суть:*

$$N = A^3 + R \quad \text{и} \quad R \leq 3A(A+1).$$

Въ самомъ дѣлѣ, равенство выражаетъ, что кубъ числа A содержится въ N , а неравенство означаетъ, что N не заключаетъ въ себѣ куба числа $A+1$.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ цѣлаго числа съ точностью до 1.

Эту теорію подраздѣляемъ на три случая.

157. Первый случай. Данное число меньше 1000.

Въ этомъ случаѣ кубичный корень находятъ прямо при помощи таблицы кубовъ первыхъ девяти чиселъ

Числа: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кубы: 1	8	27	64	125	216	343	512	729.

требуется извлечь кубический корень, съ точностью до 1, изъ 427. Изъ кубовъ видно, что это число содержится между 343 и 512, слѣд. самый кубъ, въ немъ заключающійся, есть 343; поэтому искомый корень въ остатокъ есть 427 — 343 или 84.

58. Второй случай. Данное число содержится между 1000 и 1000000. Если дано число 341254; оно больше 1000 или 10^3 , но меньше 1000000 или 10^6 , а потому кубический корень изъ него больше 10, но меньше 100, состоитъ изъ десятковъ и единицъ: пусть число его десятковъ будетъ d , единицъ — u ; искомый корень будетъ $10d + u$, и если возможный корень назовемъ буквою R, то получимъ равенство:

$$41254 - (10d + u)^3 + R = 1000d^3 + 3 \cdot 100d^2 u + 3 \cdot 10d \cdot u^2 + u^3 + R \dots (1).$$

Чтобы найти цифру десятковъ корня, замѣчаемъ, что слагаемое $1000d^3$ — целое число тысячъ, а потому необходимо содержится въ 341000 суммы, т. е. d^3 заключается въ 341. Докажемъ, что кубический корень изъ наибольшаго куба, заключающагося въ 341, и дасть намъ d . Въ самомъ дѣлѣ, изъ кубовъ замѣчаемъ, что 341 содержится между 216 и 343, или между 6^3 и 7^3 :

$$6^3 < 341 < 7^3.$$

Умножимъ эти числа на 1000, мы не измѣнимъ неравенства, такъ что:

$$\overline{6}^3 < 341000 < \overline{7}^3.$$

Прибавимъ къ 341000 число 254, мы усилимъ первое неравенство. Что касается второго, то какъ 341000 и $\overline{7}^3$ суть целыя числа тысячъ и первое больше второго, то оно меньше его по крайней мѣрѣ на 1000; слѣд., увеличимъ первое на $\overline{7}^3 - 254$ — число, меньше 1000, получимъ результатъ, во всякомъ случаѣ, меньшій $\overline{7}^3$, такъ что и второе неравенство не нарушится. Итакъ

$$\overline{6}^3 < 341254 < \overline{7}^3,$$

т. е. переходя къ корнямъ, имѣемъ:

$$60 < \sqrt[3]{341254} < 70.$$

Эти неравенства доказываютъ, что искомый корень больше 6 десятковъ, но не включаетъ въ себя 7 десятковъ, т. е. что онъ содержитъ 6 целыхъ десятковъ, и, можетъ быть, нѣсколько простыхъ единицъ, число которыхъ не больше 9. Итакъ, $d = 6$, т. е. цифра десятковъ корня равна кубическому корню изъ наибольшаго куба, содержащагося въ числѣ тысячъ данного числа.

Подставивъ въ равенство (1) 6 вмѣсто d , получимъ:

$$341254 - 216000 + 3 \cdot 3600 \cdot u + 3 \cdot 60 \cdot u^2 + u^3 + R \dots (2)$$

Изъ обѣихъ частей по 216000, найдемъ

$$125254 - 3 \cdot 3600 \cdot u + 3 \cdot 60 \cdot u^2 + u^3 + R$$

Для нахождения цифры n единиц корня замѣчаемъ, что слагаемое 3.3600. n есть цѣлое число сотенъ, а потому необходимо заключается въ 1252 сотняхъ суммы. Но въ составъ этихъ сотенъ суммы могутъ входить сотни и отъ остальныхъ членовъ ея (т.-е. отъ 3.60. n^2 , n^3 в R). Поэтому, членъ 3.3600 n или равенъ, или меньше 125200. Итакъ

$$3.3600n \leq 125200,$$

откуда

$$n \leq \frac{1252}{3.36}$$

Но цифра единиц n есть число цѣлое, а потому, раздѣливъ 1252 на 3.36, и взявъ цѣлую часть частнаго, найдемъ высшій предѣлъ цифры единиц корня. Замѣтивъ, что 125254 называется первымъ остаткомъ, выводимъ изъ сказаннаго слѣдующее правило для нахождения цифры единиц корня: *отбѣливъ въ первомъ остаткѣ отъ цифры справа занятую n раздѣливъ оставшееся лѣво отъ запятой число на утроенный квадратъ цифры десяткова корня, въ цѣлой части частнаго будемъ имѣть высшій предѣлъ цифры единиц корня.*

Въ данномъ случаѣ, цѣлая часть сказаннаго частнаго есть 10; слѣд., цифра единиц корня будетъ 9 или меньше 9. Для испытанія цифры 9, мы должны составить сумму 3.3600. 9 + 3.60. 9² + 9³ и вычесть ее изъ перваго остатка; если вычитаніе будетъ возможно, то цифра 9 будетъ требована; въ противномъ случаѣ ее надо послѣдовательно уменьшать на 1 до тѣхъ поръ, пока вычитаніе сдѣлается возможнымъ. Сумму, подлежащую вычитанію, можно написать такъ:

$$[3 \times 3600 + (3 \times 60 + 9) \times 9] \times 9.$$

$$3 \times 3600 = 10800; 3 \times 60 + 9 = 189; 189 \times 9 = 1701; 10800 + 1701 = 12501; 12501 \times 9 = 112509, \text{ что меньше } 125254.$$

Итакъ, цифра единиц равна 9; искомый корень = 69, а остатокъ корня = 125254 — 112509 = 12745.

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{341,254} \quad 69 \\ \underline{216} \\ 108 \overline{)1252,54} \\ \underline{1125 \ 09} \\ 12 \ 745 \end{array} \quad \begin{array}{r} 189 \\ \times 9 \\ \hline 1701 \\ + 10800 \\ \hline 12501 \\ \times 9 \\ \hline 112509 \end{array}$$

159. Общій случай. — Этотъ случай приводится къ двумъ предыдущимъ при помощи слѣдующей теоремы.

ТЕОРЕМА. — Число десятковъ кубическаго корня изъ даннаго числа равно кубическому корню изъ наибольшаго куба, содержащагося въ числѣ тысячъ этого числа.

Пусть данное число будетъ 495864349, и пусть a^3 будетъ наибольшій кубъ, содержащійся въ числѣ тысячъ этого числа, т.-е. въ 495864; въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$a^3 \leq 495864 < (a+1)^3.$$

откуда, умноживъ всё числа на 1000, получимъ:

$$(10a)^3 \leq 495864000 < [10(a+1)]^3;$$

или, придавая къ среднему числу 349, что не измѣнитъ смысла неравенствъ, но обратитъ возможное равенство въ неравенство:

$$(10a)^3 < 495864349 < [10(a+1)]^3.$$

Отсюда, переходя къ корнямъ, найдемъ:

$$10a < \sqrt[3]{495864349} < (a+1) \cdot 10.$$

Итакъ, искомый корень заключается между a десятками и $a+1$ десяткомъ, а потому содержитъ a десятковъ, и некоторое число единицъ, не большее 9. Теорема такимъ образомъ доказана.

160. Мы нашли, что число десятковъ кубическаго корня изъ числа 495864349 есть корень кубичный изъ 495864; число же десятковъ этого послѣдняго корня, или число сотенъ перваго, равно кубическому корню изъ 495 (по той же теоремѣ). Отсюда заключаемъ:

1. Чтобы найти цифру высшаго разряда кубическаго корня изъ числа, достаточно разделить его на грани, отставляя по три цифры отъ правой руки къ левой, и извлечь кубичный корень изъ первой грани слева.

2. Число цифръ корня, точнаго до 1 по недостатку, изъ числа равно числу сказанныхъ граней.

161. Извлечемъ кубичный корень изъ 495864349.

Извлекая кубичный корень изъ 495864 такъ, какъ указано въ § 158, найдемъ число десятковъ искомаго корня: оно будетъ 79. Назвавъ цифру единицъ корня буквою x и возможный остатокъ черезъ R , имѣемъ:

$$495864349 = 79^3 \cdot 1000 + 3 \cdot 79^2 \cdot 100 \cdot x + 3 \cdot 790 \cdot x^2 + x^3 + R.$$

Вычитая изъ обѣихъ частей этого равенства по $79^3 \cdot 1000$, получимъ:

$$2825349 = 3 \cdot 79^2 \cdot 100 \cdot x + 3 \cdot 790 \cdot x^2 + x^3 + R.$$

Изъ известныхъ разсужденій убѣдимся, что высшій предѣлъ цифры единицъ x найдемъ, опредѣливъ цѣлую часть частнаго отъ раздѣленія 28253 на $3 \cdot 79^2$, т.-е. на 18723. Цѣлая часть этого частнаго равна 1; поэтому цифра единицъ корня будетъ или 1 или 0.

Для испытанія 1, составляемъ остальные три члена куба корня, т.-е. $3 \cdot 79 \cdot 100 \times 1 + 3 \cdot 790 \times 1^2 + 1^3$, что даетъ 1874671; такъ какъ это число не превышаетъ остатка 2825349, заключаемъ, что цифра единицъ корня есть 1, самый корень = 791, а остатокъ корня $2825349 - 1874671$, или 950678.

Дѣйствіе располагають слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt[3]{495,864,349} & 791 \\
 343 & 49 \times 3 = 147, \quad 219 \times 9 = 1971 \\
 \hline
 147 \ 9 & 1528,64 \\
 1500 \ 39 & 14700 \\
 \hline
 18723 \ 1 & + 1971 \\
 28253,49 & 16671 \times 9 = 150039 \\
 18746 \ 71 & 1971 \\
 \hline
 9506 \ 78 & 16671 \\
 & 81 \\
 & \overline{18723 = 3 \times 79^2, \quad 2371 \times 1 = 2371.} \\
 & 1872300 \\
 & 2371 \\
 & 1874671 \times 1
 \end{array}$$

Отсюда выводимъ:

162. Правило извлеченія кубическаго корня съ точностью до 1 иль цѣлаго числа.

Раздѣляютъ данное число на грани по три цифры отъ правой руки къ левой, при чемъ первая грань слѣва можетъ имѣть и две цифры и даже одну.

Первую цифру корня найдемъ, извлекая кубическій корень изъ первой грани слѣва.

Чтобы найти вторую цифру, вычитаютъ изъ первой грани кубъ первой цифры корня, и къ остатку сносятъ вторую грань: такимъ образомъ получается первый частный остатокъ. Отдѣляютъ съ правой стороны его две цифры, а оставшееся влѣво отъ запятой число относятъ на утроенный квадратъ первой цифры корня: цѣлая часть частнаго дастъ высшій предѣлъ для второй цифры корня.

Чтобы узнать, годится ли эта цифра, приписываютъ ее справа къ утроенной первой цифрѣ корня, и умножаютъ полученное число на испытующую цифру; къ произведенію прибавятъ утроенный квадратъ первой цифры корня (служившій сейчасъ дѣлителемъ), приписавъ къ нему справа два нуля, и умножатъ полученную сумму на испытующую цифру. Если это произведеніе не превышаетъ первый остатокъ, испытующая цифра годится: въ противномъ случаѣ уменьшаютъ ее на 1 и снова исполняютъ указанное испытаніе, и т. д., пока испытаніе не дастъ произведенія, не превышающаго первый частный остатокъ. Найденную цифру приписываютъ справа отъ первой цифры корня.

Для нахожденія третьей цифры корня, вычитаютъ составленное произведеніе изъ перваго остатка, и къ разности сносятъ третью грань: получится второй частный остатокъ. Съ правой стороны его отодвигаютъ две цифры, и дѣлятъ оставшееся влѣво отъ запятой число на утроенный квадратъ числа, найденнаго въ корнѣ: цѣлая часть частнаго будетъ представлять высшій предѣлъ третьей цифры корня: испытываютъ эту цифру вышеуказаннымъ способомъ.

Такимъ образомъ продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока будутъ снесены всѣ грани.

Извлечение кубического корня из дробей съ точностью до 1.

163. ТЕОРЕМА. Кубический корень из несократимой дроби несоизмѣримъ, если его нельзя извлечь отдельно из числителя и знаменателя.

То же доказательство какъ въ § 136.

Такъ, члены дроби $\frac{8}{125}$ — точные кубы, поэтому кубический корень изъ нея извлекается точно:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}.$$

Кубические корни изъ дробей $\frac{8}{9}$, $\frac{3}{64}$ и $\frac{2}{3}$ — несоизмѣримы.

164. ТЕОРЕМА. — Кубический корень изъ дроби, точный до 1, есть корень изъ наибольшаго куба, заключающагося въ цѣлой части данного числа, или этотъ корень $+1$.

Доказательство аналогично § 137. Отсюда

Правило. Чтобы извлечь кубический корень изъ дроби точно до 1, надо отбросить дробную часть, и извлечь кубический корень изъ цѣлой части точно до 1.

Примѣръ. Извлечь кубический корень изъ 2896,75 съ точностью до 1.

Отбрасывая дробь, извлекаемъ съ указанною точностью, корень изъ 2896; найдемъ результаты: 14 — по недостатку и 15 — по избытку.

Извлечение кубического корня изъ цѣлыхъ чиселъ и изъ дробей съ точностью до $\frac{1}{n}$.

165. Правило. Чтобы извлечь кубический корень изъ цѣлаго или изъ дробнаго числа съ точностью до $\frac{1}{n}$, нужно умножить это число на кубъ знаменателя степени приближенія, изъ произведенія извлечь корень точно до 1, и разделить его на знаменателя степени приближенія.

Доказательство такое же какъ и въ § 139.

Примѣръ. Вычислить $\sqrt[3]{3}$ съ точностью до $\frac{1}{100}$.

Для этого надо извлечь кубический корень изъ 3×100^3 , т.е. изъ 3000000 съ точностью до 1, и разделить результатъ на 100.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{3,000,000} & 144 \\ \hline 1 & 34 \times 4 = 136 \\ 20,00 & 300 \\ 1744 & 136 \\ \hline 2560,00 & 436 \times 4 = 1744 \\ 2419\ 84 & 136 \quad 424 \times 4 = 1696 \\ 140\ 16 & 436 \\ & 16 \\ & 58800 \\ & 1696 \\ \hline & 60496 \times 4 = 241984 \end{array}$$

Искомый корень 1,44 — по недостатку, и 1,45 — по избытку.

Сокращенный способ извлечения кубичнаго корня.

166. Пусть требуется извлечь кубичный корень съ точностью до 1 изъ цѣлаго числа A — случай, къ которому приводятся всѣ остальные. Положимъ, что корень имѣетъ $2m + 1$ цифръ, и что обыкновеннымъ способомъ найдено $m + 1$ цифръ, т.-е. больше половины всѣхъ цифръ корня, а остается найти послѣдняя m цифръ. Обозначимъ буквою a число, оставленное найденными $m + 1$ цифрами, сопровождаемыми m нулями, а буквою x остальную часть корня, которая вообще есть число несонизѣримое: истинный корень выразится суммою $a + x$. Итакъ:

$$A = (a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$

откуда

$$\frac{A - a^3}{3a^2} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}.$$

Найдемъ цѣлую часть q частного отъ раздѣленія $A - a^3$ на $3a^2$, и пусть остатокъ дѣленія будетъ r ; слѣд. получимъ равенство:

$$\frac{A - a^3}{3a^2} = q + \frac{r}{3a^2}.$$

Приравнивая два выраженія частного $\frac{A - a^3}{3a^2}$, найдемъ:

$$x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} = q + \frac{r}{3a^2}.$$

откуда

$$x = q + \frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a} \left(1 + \frac{x}{3a} \right).$$

Докажемъ, что абсолютная величина разности $\frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a} \left(1 + \frac{x}{3a} \right)$ меньше 2, и что слѣд. q выражаетъ величину x съ ошибкою, меньшею 2 единицы.

Замѣтивъ, что r есть остатокъ дѣленія, въ которомъ дѣлитель равенъ $3a^2$, заключаемъ, что $\frac{r}{3a^2} < 1$. Затѣмъ, въ цѣлой части x находится m цифръ, поэтому x меньше наименьшаго $(m + 1)$ значаго числа, т.-е. $x < 10^m$, а потому $x^2 < 10^{2m}$; съ другой стороны a состоитъ изъ $2m + 1$ цифръ, слѣд. $a \geq 10^{2m}$; а потому $\frac{x^2}{a} < 1$. Наконецъ, $3a > 3 \cdot 10^{2m}$, а потому $\frac{x}{3a} < \frac{1}{3 \cdot 10^{2m}}$. Отсюда видно, что $\left(1 + \frac{x}{3a} \right) < 2$, и слѣдовательно

$$\frac{x^2}{a} \left(1 + \frac{x}{3a} \right) < 2,$$

а значить и абсолютная величина разности $\frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a} \left(1 + \frac{x}{3a} \right)$ также меньше 2. Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе:

чтобы извлечь, съ точностью до 1, кубичный корень изъ цѣлаго числа, находятъ обыкновеннымъ способомъ больше половины всѣхъ цифръ корня; затѣмъ остальные, съ точностью до 2, находятъ, раздѣливъ полный

остаток на утроенный квадрат найденной части корня (т.е. числа, стоящего из $n+1$ перемык цифр с n нулями).

Следует заметить, что лишь в исключительных, редких, случаях приближение будет ошибочно больше чем на 1; обыкновенно же, ошибка бывает меньше 1; во всяком случае, найдя указанным сокращенным способом корень, следует прямо вычислять предель разности $\frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a} \left(1 + \frac{x}{3a} \right)$.

167. Можно всегда определить, будет ли корень, вычисленный сокращенным способом, т.е. $a + q$ — точный, или приближенный; а в последнем случае — в какую сторону сделана ошибка.

В самом деле, назовем остаток по нахождении части a корня буквою R ; имеем равенство:

$$A - a^3 = R, \text{ откуда } A = a^3 + R.$$

Разделив R на $3a^2$, в частном получим q , а в остатке r ; след.

$$R = 3a^2 \cdot q + r,$$

а потому

$$A = a^3 + 3a^2q + r.$$

Отсюда:

1) Если $r > (3a + q)q^2$, то $A > (a + q)^3$, а след. $a + q$ будет приближение по недостатку.

2) Если $r = (3a + q)q^2$, то $A = (a + q)^3$, след. $a + q$ будет точный корень.

3) Если же $r < (3a + q)q^2$, то $A < (a + q)^3$, а след. $a + q$ будет приближением по избытку.

168. Извлечь кубический корень из 96428639457679. Первая три цифры определяем обыкновенным способом.

96,428,639,457,679	458		
324,28	4800	125	607500 1358
5303639	625	5	10864 8
356727	5425		618364
	25		64
	6075		629292

Находим 458. Остаток $R = 356727457679$; $a = 45800$; $3a^2 = 6292920000$. Делив R на $3a^2$, находим в частном 56. Искомый корень 45856.

Вычисляем предель разности $\frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a} \left(1 + \frac{x}{3a} \right)$. Так как $a > 4 \cdot 10^4$, и $x < 10^3$, то $\frac{x^2}{a} < \frac{1}{4}$. Заметь, $3a > 12 \cdot 10^4$, сл. $\frac{x}{3a} < \frac{1}{12 \times 10^4}$, а потому $1 + \frac{x}{3a} < 1 + \frac{1}{10^4}$. Отсюда: $\frac{x^2}{a} \left(1 + \frac{x}{3a} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{12 \cdot 10^4} \right)$ т.е. < 1 . Сл. и $\frac{r}{3a^2} < 1$. Корень 45856 ошибочен меньше чем на 1, и как легко убедиться — по недостатку.

Извлечение кубического корня из многочленов

169. Пусть требуется извлечь кубический корень из многочлена

$$-125a^9x^{12} + 150a^8x^{11} + 165a^7x^{10} - 172a^6x^9 - 99a^5x^8 + 54a^4x^7 + 27a^3x^6,$$

расположенного по убывающим степеням буквы x , которую мы принимаем за главную. Допуская, что многочлен этот есть точный куб, и что корень из него, также расположенный по убывающим степеням буквы x , есть $p + q + r + s + \dots$, заключаем, что данный многочлен должен быть равен кубу своего корня, т.е. $(p + q + r + s + \dots)^3$. Таким образом имеем тождество:

$$\begin{aligned} -125a^9x^{12} + 150a^8x^{11} + 165a^7x^{10} - 172a^6x^9 - 99a^5x^8 + 54a^4x^7 + 27a^3x^6 \\ p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + 3p^2r + 3(p+q)r^2 + r^3 + \dots (1) \end{aligned}$$

По свойству тождества, выше члены обеих частей должны быть равны, а потому $p^3 = -125a^9x^{12}$, откуда

$$p = \sqrt[3]{-125a^9x^{12}} = -5a^3x^4.$$

Отсюда заключаем: для нахождения высшего члена корня нужно извлечь кубический корень из высшего члена данного многочлена.

Вычтем из первой части тождества (1) $-125a^9x^{12}$, а из второй — равное этому количество p^3 , найдем тождество,

$$\begin{aligned} 150a^8x^{11} + 165a^7x^{10} - 172a^6x^9 - 99a^5x^8 + 54a^4x^7 + 27a^3x^6 - 3p^2q + \\ - 3pq^2 - q^3 + 3(p+q)r^2 + 3(p+q)r^2 + r^3 + \dots (2), \end{aligned}$$

а потому выше по букве x члены обеих частей должны быть равны, т.е.

$$3p^2q = 150a^8x^{11}, \text{ или, такъ какъ } p = -5a^3x^4, \text{ то } 3 \cdot 25a^6x^8 \cdot q = 150a^8x^{11},$$

откуда

$$q = 150a^8x^{11} : 75a^6x^8 = 2a^2x^3.$$

Отсюда заключаем: чтобы найти второй член корня, нужно из данного полинома вычесть куб первого члена и высший член первого остатка разделить на утроенный квадрат высшего члена корня.

Вычтем из второй части тождества (2) $3p^2q + 3pq^2 + q^3$, а из первой равное этому выражение $3(-5a^3x^4)^2 \cdot 2a^2x^3 + 3(-5a^3x^4)(2a^2x^3)^2 + (2a^2x^3)^3$ или $150a^8x^{11} - 60a^7x^{10} - 5a^6x^9$; найдем тождество

$$\begin{aligned} 225a^7x^{10} - 180a^6x^9 - 99a^5x^8 + 54a^4x^7 - 27a^3x^6 - 3(p+q)r^2 + \\ + 3(p+q)r^2 + r^3 + \dots (3) \end{aligned}$$

Приравнявая снова высшие члены обеих частей, получим равенство

$$\begin{aligned} 3p^2r = 225a^7x^{10}, \text{ или } 3 \cdot 25a^6x^8 \cdot r = 225a^7x^{10}, \text{ откуда} \\ r = 225a^7x^{10} : 75a^6x^8 = 3a^2x^2. \end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ: чтобы найти третій членъ корня, нужно изъ перваго остатка вычесть утроенное произведение квадрата 1-го члена корня на 2-й + утроенное произведение перваго члена на квадратъ второго и кубъ второго, и первый членъ второго остатка разделить на утроенный квадратъ 1-го члена корня.

Вычтемъ изъ второй части тождества (3) выражение $3(p+q)^2r + 3(p+q)r^3 + r^3$, и изъ первой равное ему количество: $3(-5a^3x^4 + 2a^2x^3)(3ax^2)^2 + (3ax^2)^3 - 225a^7x^{10} - 180a^6x^9 + 36a^5x^8 - 135a^4x^7 + 54a^3x^6 - 27a^2x^5 - 225a^7x^{10} - 180a^6x^9 + 99a^5x^8 + 54a^4x^7 - 27a^3x^6$. По вычитаніи въ остаткѣ въ 1-й части получается ноль; поэтому, данный полиномъ есть точный кубъ, и искомый корень $= -5a^3x^4 + 2a^2x^3 + 3ax^2$.

Численные располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} -125a^9x^{12} + 150a^8x^{11} + 165a^7x^{10} - 172a^6x^9 + 99a^5x^8 + 54a^4x^7 - 27a^3x^6 - 5a^3x^4 - 2a^2x^3 - 3ax^2 \\ \pm 125a^9x^{12} \\ \hline +150a^8x^{11} + 165a^7x^{10} - 172a^6x^9 + 99a^5x^8 + 54a^4x^7 - 27a^3x^6 - 3a^2x^5 - 3(5a^3x^4) - 4a^2x^3 - 2a^2x^3 \\ 150a^8x^{11} - 165a^7x^{10} - 8a^6x^9 \\ \hline 225a^7x^{10} - 180a^6x^9 - 99a^5x^8 + 54a^4x^7 - 27a^3x^6 - 3(-5a^3x^4) - 2a^2x^3 - 3a^2x^3 \\ -225a^7x^{10} + 180a^6x^9 - 36a^5x^8 + 54a^4x^7 - 27a^3x^6 - 3 - 5a^3x^4 - 2a^2x^3 + 9a^2x^3 - 27a^3x^6 \\ + 135a^5x^8 \\ \hline 0 \end{array}$$

Отсюда выводятся слѣдующее

170. Правило. Располагая полиномъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, извлекаемъ кубический корень изъ перваго его члена получаемъ первый членъ корня.

Вычтя кубъ его изъ данного полинома, найдемъ первый остатокъ, разделивъ первый членъ этого остатка на утроенный квадратъ перваго члена корня, въ частномъ получимъ второй членъ корня.

Вычтя изъ перваго остатка утроенное произведение квадрата перваго члена корня на второй, утроенное произведение перваго члена на квадратъ второго и кубъ второго члена корня, получимъ второй остатокъ. Разделивъ первый его членъ на утроенный квадратъ перваго члена корня, получимъ въ частномъ третий членъ корня.

Вычтя изъ второго остатка утроенное произведение квадрата суммы первыхъ двухъ членовъ корня на третий, утроенное произведение суммы первыхъ двухъ членовъ на квадратъ третьяго и кубъ третьяго члена, найдемъ третій остатокъ. Разделивъ первый его членъ на утроенный квадратъ перваго члена корня, получимъ въ частномъ четвертый членъ корня и т. д.

Численные продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ получится ноль.

171. Когда неизвестно, представляетъ ли данный полиномъ точный кубъ, или нѣтъ, применяють къ нему предыдущее правило, замѣчая, что будетъ ли полиномъ расположенъ по нисходящимъ, или по восходящимъ степенямъ главной буквы, всегда можно предвидѣть степень послѣдняго члена корня, въ предположеніи, что данный многочленъ есть точный кубъ; она должна быть втрое меньше степени послѣдняго члена его. Когда данный полиномъ есть точный кубъ, послѣдній членъ корня долженъ равняться кубическому корню изъ послѣдняго члена полинома, а слѣдующій остатокъ долженъ быть нулемъ. Въ противномъ случаѣ данный многочленъ не есть точный кубъ.

ГЛАВА XIV.

Объ иррациональных числахъ.

Происхождение иррациональных чиселъ.—Несоизмѣримыя величины въ геометрии.—Способъ предполож. — Распространеніе основныхъ законовъ дѣйствій на числа несоизмѣримыя.

172. Изученіе обратныхъ дѣйствій служитъ источникомъ для открытія новыхъ рядовъ величинъ. Такъ, три простыхъ арифметическихъ дѣйствій надъ цѣлыми числами, т.-е. сложение, умноженіе, которое есть только частный случай сложения и возвышенія въ степень — частный случай умноженія, даютъ въ результатъ всегда только цѣлыя числа. При изученіи же трехъ обратныхъ дѣйствій — вычитанія, дѣленія и извлеченія корня, открываются новые роды величинъ, а именно: вычитаніе приводитъ къ открытію отрицательныхъ величинъ, дѣленіе — къ открытію дробныхъ, а извлеченіе корня приводитъ къ двумъ новымъ рядамъ величинъ — несоизмѣримыхъ и мнимыхъ. Въ этой главѣ мы займемся изученіемъ чиселъ *несоизмѣримыхъ* или *иррациональныхъ*.

173. Происхождение иррациональных чиселъ при извлеченіи корня.

Обобщимъ теоремы §§ 124, 136, 154 и 163 для корня какого-угодно порядка.

ТЕОРЕМА I. Если цѣлое число A есть неточная n -ая степень, то корень n -го порядка изъ него — несоизмѣримъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ A не есть точная n -ая степень другого цѣлаго числа, то $\sqrt[n]{A}$ не можетъ равняться никакому цѣлому числу. Допустимъ же, что этотъ корень равняется несократимой дроби $\frac{p}{q}$, т.-е. допустимъ возможность равенства

$$\sqrt[n]{A} = \frac{p}{q}.$$

нѣди бы отсюда, что

$$A = \frac{p^n}{q^n}.$$

Но p есть число первое съ q , слѣд. p^n — первое съ q^n , а потому $\frac{p^n}{q^n}$ не можетъ равняться цѣлому числу A , и допущенное равенство невозможно. Итакъ, корень n -го порядка изъ цѣлаго числа, не представляющаго точной n -ой степени, *несоизмѣримъ съ единицею*.

Таковы: $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{32}$, $\sqrt[5]{53}$, и т. д.

ТЕОРЕМА II. Корень n -го порядка изъ несократимой дроби $\frac{A}{B}$ несоизмѣримъ, если его нельзя извлечь отдельно изъ числителя и знаменателя.

Въ самомъ дѣлѣ, равенство $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = P$, гдѣ P — число цѣлое, невозможно, ибо оно приводитъ къ равенству $\frac{A}{B} = P^n$, выражающему, что несократимая дробь

равна цѣлому числу. Такимъ образомъ, искомый корень не можетъ быть выраженъ цѣлымъ числомъ. Но онъ не можетъ быть точно выраженъ и конечною дробью. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ равенство $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{C}{D}$, гдѣ $\frac{C}{D}$ — дробь несократимая, имѣемъ: $\frac{A}{B} = \frac{C^n}{D^n}$, гдѣ вторая часть — также дробь несократимая. Равенство этихъ дробей возможно только тогда, когда $A = C^n$, и $B = D^n$, т. е. когда A и B суть точныя n -ыя степени; если же этого нѣтъ, то $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$ нельзя точно выразить ни въ цѣлыхъ единицахъ, ни въ доляхъ единицы, слѣд. корень этотъ будетъ несоизмѣримъ.

Таковы: $\sqrt[3]{\frac{27}{44}}$, $\sqrt[4]{\frac{2}{7}}$ и т. д.

174. Хотя ирраціональные числа нельзя вычислять точно, но всегда можно ихъ опредѣлять съ *какою-угодно степенью точности*.

Пусть, напр., требуется вычислить $\sqrt[n]{A}$, гдѣ A есть цѣлое число, не представляющее точной n -ой степени, съ ошибкою меньшею $\frac{1}{p}$, гдѣ p — какъ угодно большое цѣлое число. Умноживъ и раздѣливъ данный корень на p , получимъ (подведя множителя p подъ знакъ корня):

$$\sqrt[n]{A} = \frac{p \sqrt[n]{A}}{p} = \frac{\sqrt[n]{Ap^n}}{p}.$$

Если наибольшая n -ая степень, содержащаяся въ Ap^n , будетъ цѣлое число r^n , то $r + 1 > \sqrt[n]{Ap^n} > r$, откуда, раздѣливъ всѣ три числа на p и замѣтивъ, что $\frac{\sqrt[n]{Ap^n}}{p} = \sqrt[n]{A}$, найдемъ

$$\frac{r + 1}{p} > \sqrt[n]{A} > \frac{r}{p},$$

откуда прямо слѣдуетъ, что какъ $\frac{r}{p}$, такъ и $\frac{r + 1}{p}$ выражаютъ $\sqrt[n]{A}$ приближенно, съ ошибкою меньшею $\frac{1}{p}$: требуемое доказано.

Точно такъ же, если $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$, гдѣ $\frac{A}{B}$ дробь несократимая, нельзя вычислить

точно, то можно найти его съ какимъ-угодно приближеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, помноживъ числ. и знам. на B^{n-1} , найдемъ:

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \sqrt[n]{\frac{AB^{n-1}}{B^n}} = \frac{\sqrt[n]{AB^{n-1}}}{B};$$

но, по предыдущему, всегда можно найти двѣ дроби, разняшіяся меньше чѣмъ на $\frac{1}{p}$ отъ $\sqrt[n]{AB^{n-1}}$; пусть эти дроби будутъ $\frac{k}{p}$ и $\frac{k+1}{p}$, такъ что

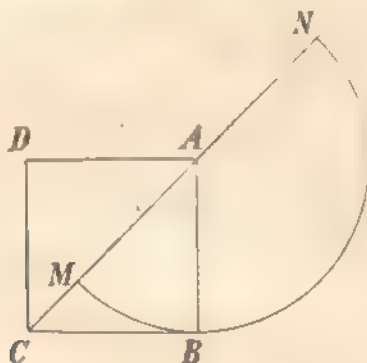
$$\frac{k+1}{p} > \sqrt[n]{AB^{n-1}} > \frac{k}{p},$$

раздѣливъ всѣ три члена на В, наведемъ,

$$\frac{k+1}{Bp} > \sqrt[n]{\frac{A}{B}} > \frac{k}{Bp}$$

откуда заключаемъ, что крайнія дроби выражаютъ искомый корень съ ошибкою, меньшею $\frac{1}{Bp}$.

175. Несоизмѣримыя величины въ геометріи. Геометрія также представляетъ примѣры несоизмѣримыхъ величинъ: въ частности въ видѣ окружности, круга и диаметра, діагонали квадрата и стороны. Чтобы показать, какимъ образомъ можно удостовѣриться геометрически въ несоизмѣрности двухъ линий, докажемъ о рѣшѣ, — равнѣсьемъ на самомъ дѣлѣ — такъ, явны, что *діагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороной.*



Черт. 10.

Проведемъ діагональ AC квадрата ABCD и продолжимъ ее за точку А. Изъ А, какъ изъ центра радиусомъ АВ опишемъ полуокружность, которая пересѣчетъ діагональ и ея продолженіе въ точкахъ М и N. Для доказательства, что АС несоизмѣрима съ АВ, постараемся измѣрить первую изъ этихъ линий помощью второй.

Итакъ, составимъ отношеніе $\frac{AC}{AB}$.

Мы имеемъ: $AC = AM + MC = AB + MC$, откуда

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{MC}{AB} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}} \dots (1).$$

Вопросъ приводится къ опредѣленію отношенія $\frac{AB}{MC}$. Замѣчая, что CB есть касательная, а CN —сѣкущая къ окружности нѣмемъ:

$$AB^2 = CB^2 = CM \times CN,$$

откуда

$$\frac{AB}{MC} = \frac{CN}{AB}.$$

Но $CN = NA + AM + MC = 2AB + MC$, поэтому

$$\frac{AB}{MC} = \frac{2AB + MC}{AB} = 2 + \frac{MC}{AB} \quad (2).$$

Внося эту величину въ равенство (1), находимъ

$$\frac{AC}{AB} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}}}.$$

Итакъ, снова приходится опредѣлять отношеніе $\frac{AB}{MC}$. Но эта величина намъ и вѣдѣна, она опредѣляется равенствомъ (2); такимъ образомъ снова мы имеемъ $\frac{AB}{MC}$, которое опять нужно будетъ замѣнить его величиною изъ (2), и т. д. Такая постановка будетъ продолжаться неограниченно, такъ что дѣйствіе никогда не можетъ быть окончено, потому что всегда будемъ получать отношеніе $\frac{AB}{MC}$. Итакъ, отношеніе $\frac{AC}{AB}$ представляется въ видѣ

$$\frac{AC}{AB} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

такъ, что оно никогда не можетъ быть вычислено съ точностью: линіи AC и AB суть, слѣдовательно, линіи несоизмѣримыя.

176. Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами подчинены тѣмъ же законамъ, какъ и дѣйствія надъ числами соизмѣримыми. Дѣйствительство этого положенія основано на особомъ способѣ, называемомъ *способомъ предѣловъ*, съ начальными основаніями котораго намъ необходимо, поэтому, теперь же ознакомиться.

Способъ предѣловъ.

177. Количество называется *постояннымъ*, если въ данномъ вопросѣ оно не измѣняетъ своей величины. Такъ: радиусъ въ данномъ кругѣ есть величина постоянная, также сумма угловъ треугольника и т. п.

Количество наз. *переменнымъ*, если оно не имѣетъ одной опредѣленной величины, но измѣняется въ болѣе или менѣе широкихъ границахъ. Напр., углы треугольника, хорда круга, и т. п.

Если переменная величина, изменяясь, приближается къ некоторой постоянной, такъ что разность между ними можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою, то постоянная называется *предѣломъ* переменной. Для выясненія понятія о предѣлѣ приводимъ слѣдующіе примѣры.

Примѣръ I.—Разсмотримъ выраженіе $1 + \frac{1}{x}$, въ которомъ буквъ x будемъ послѣдовательно давать цѣлыя положительныя значенія: 1, 2, 3, ...; тогда $1 + \frac{1}{x}$ будетъ принимать величины: $1 + \frac{1}{1}$, $1 + \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{3}$, ... постепенно уменьшающіяся и приближающіяся къ 1.

Слѣд. $1 + \frac{1}{x}$ будетъ количество переменное, приближающееся къ постоянному числовому значенію — къ 1.

При этомъ, разность между переменнымъ $1 + \frac{1}{x}$ и постояннымъ 1 выражается дробью $\frac{1}{x}$, которая можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою; въ самомъ дѣлѣ, желая, чтобы эта разность была меньше $\frac{1}{100000}$, нужно только x -судать величину, большую 100000.

Заключаемъ, что предѣломъ переменной $1 + \frac{1}{x}$, въ данномъ случаѣ, будетъ 1.

Слово предѣлъ означаютъ буквами *lim* (отъ франц. слова *limite*—предѣлъ), такъ что можемъ предыдущій результатъ письменно выразить такъ:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Примѣръ II.—Разсмотримъ еще величину a , выраженную линіей АВ.

Раздѣлимъ эту линію пополамъ, потомъ одну изъ половинокъ еще пополамъ и т. д. до бесконечности, и рассмотримъ рядъ



Черт. 11.

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \dots + \frac{a}{2^n} + \frac{a}{2^{n+1}} + \dots$$

состоящій изъ бесконечнаго числа членовъ. Это будетъ величина переменная, увеличивающаяся съ возрастаніемъ n и все болѣе и болѣе приближающаяся къ a . Если взять въ этой суммѣ n первыхъ членовъ, то она будетъ меньше a на $\frac{a}{2^n}$; чѣмъ больше будетъ n , тѣмъ эта разница будетъ ближе къ нулю, никогда, однако, его не достигая. Итакъ a есть предѣлъ переменной $\frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \dots$ при неограниченномъ увеличеніи n .

то каждая из них может быть сделана меньше $\frac{\alpha}{n}$, поэтому имеем ряд неравенств:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &< \frac{\alpha}{n} \\ x_2 &< \frac{\alpha}{n} \\ x_3 &< \frac{\alpha}{n} \\ &\vdots \\ x_n &< \frac{\alpha}{n} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Сложив их, найдем:} \\ & x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n < \frac{\alpha}{n} \cdot n, \\ &\text{так как } \frac{\alpha}{n} \text{ берется слагаемым } n \text{ раз; или} \\ & x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n < \alpha. \\ &\text{Итак, сумма } x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ может быть сделана меньше } \alpha, \\ &\text{и требуемое доказано.} \end{aligned}$$

II. *Разность двух бесконечно-малых есть величина бесконечно малая.*

Действительно, если x_1 и x_2 суть величины бесконечно-малы, то уменьшив x_1 на x_2 , получим разность $x_1 - x_2$ меньшую x_1 , и потому и подавно бесконечно-малую.

III. *Произведение нескольких бесконечно-малых, взятых в определенном числе, есть величина бесконечно-малая.*

Возьмем n бесконечно-малых: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ и докажем, что произведение их может быть сделано меньше произвольно малого количества α . $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, будучи бесконечно-малыми, могут быть сделаны меньше $\sqrt[n]{\alpha}$; поэтому имеем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &< \sqrt[n]{\alpha} \\ x_2 &< \sqrt[n]{\alpha} \\ x_3 &< \sqrt[n]{\alpha} \\ &\vdots \\ x_n &< \sqrt[n]{\alpha} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Перемножив эти неравенства, найдем:} \\ & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n < \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\alpha} \dots \sqrt[n]{\alpha}, \\ &\text{или} \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n < (\sqrt[n]{\alpha})^n; \\ &\text{но, по определению корня, } (\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha, \text{ слѣд.} \\ & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n < \alpha, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствие. Такъ какъ степень есть произведение равныхъ множителей, то изъ предыдущей теоремы прямо слѣдуетъ, что степень съ конечнымъ цѣлымъ положительнымъ показателемъ бесконечно-малой есть величина бесконечно-малая.

IV. *Произведение бесконечно-малой на величину конечную — бесконечно мало.*

Пусть x_1 — бесконечно-малое, а n — конечное количество; доказать, что nx_1 можетъ быть сделано меньше произвольно малого количества α . Такъ какъ x_1 бесконечно-мало, то всегда можно положить $x_1 < \frac{\alpha}{n}$, откуда $nx_1 < \frac{\alpha}{n} \cdot n$, или $nx_1 < \alpha$.

V. *Частное отъ раздѣленія бесконечно-малой величины на конечную есть бесконечно-малая величина.*

Если α_1 бесконечно-мало, то всегда можно сделать $\alpha_1 < \alpha$, где α — произвольно мало; а отсюда $\frac{\alpha_1}{n} < \alpha$.

Из конечных целых положительных показателей из бесконечности есть величина бесконечно-малая.

Из этих обозначений, имеем: $\alpha_1 < \alpha^n$, ибо α_1 бесконечно-мало; а α^n — n -ой степени из бесконечности частой, найдем $\alpha_1 < \alpha$.

Находим постоянную величину, служащую пределью перемещения способом предельности. Она основана на нижеследующих теоремах.

ТЕОРЕМА I. — Если постоянная величина K заключается между переменными u и v (т.-е. если $u < K < v$, или $u > K > v$), то K служит общим пределью u и v .

Дать, так как K заключается между u и v , то разности $K - u$ и $K - v$ численно меньше разности $v - u$, т.-е. бесконечно-малой, а также бесконечно-малы; отсюда, на основании определения предельности, что K служит общим пределью переменных u и v .

Примеръ. Окружность круга заключается между периметрами правильного двоицевого многоугольника описанного и вписанного, разность между ними при неограниченном удвоении числа сторон становится бесконечно-малой, заключаемъ, что окружность есть общій предѣлъ для обоихъ периметровъ.

184. Теорема II. Если переменная величина v заключается между постоянной u и ее пределью K , то v имеет тот же предель K .

Въ самомъ дѣлѣ, K есть по условію предѣлъ переменной u , слѣд. разности $K - u$ есть величина бесконечно-малая; но v заключается между u и K , слѣд. разности $K - v$ численно меньше разности $K - u$, т.-е. и подалеко бесконечно-мала, а потому K есть предѣлъ переменной v .

185. Теорема III. Если двѣ переменныя величины u и v связаны между собою такъ, что при всякомъ измѣненіи остаются равны между собою, или же разнятся одна отъ другой на бесконечно-малую величину, если, притомъ, одна изъ нихъ стремится къ опредѣленному предѣлу, то и другая переменная стремится къ тому же предѣлу.

Дѣйствительно, пусть u и v будутъ двѣ переменныя, разность между которыми равна нулю или бесконечно-малой, тогда

$$u = v + \delta,$$

гдѣ δ равно 0 или бесконечно-мало; пусть, кромѣ того, u стремится къ предѣлу K ; тогда, по опредѣленію предѣла, можно положить

$$u = K + \epsilon,$$

гдѣ ϵ — бесконечно-мало. Сравнивая оба выраженія u , имеемъ

$$v + \delta = K + \epsilon,$$

$$v - K = \epsilon - \delta.$$

Вторая часть равенства, как разность двух безконечно-малых, безконечно-мала, слѣд. такова же и первая часть: значить ϵ имѣть предѣломъ K — ту же постоянную, что и u .

186. Теорема IV. Если два переменныя u и v имѣютъ общій предѣлъ K , то всякая переменная w , заключающаяся между u и v , имѣетъ тотъ же предѣлъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если K служить предѣломъ для u и v , то

$$u = K + \delta \text{ и } v = K + \epsilon,$$

гдѣ δ и ϵ безконечно-малы. Вычитая второе равенство изъ перваго, имѣемъ:

$$u - v = \delta - \epsilon,$$

т.-е. $u - v$ есть безконечно-малая величина. Но w заключена между u и v , слѣд. разности $u - w$ и $w - v$ явятся меньше безконечно-малой $\delta - \epsilon$, а потому также безконечно-малы. Значить, переменныя u и w — съ одной стороны, и v и w — съ другой, равны между собою такъ, что разность между собою на безконечно-малую величину, а потому, по теор. III, заключаемъ, что w имѣетъ тотъ же предѣлъ, что и u и v , т.-е. K .

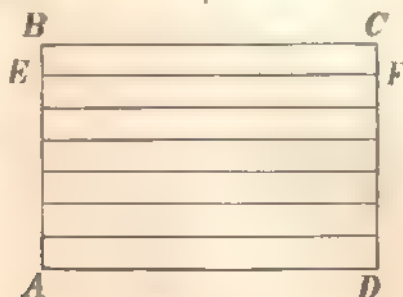
187. Теорема V. Предѣлъ суммы конечнаго числа переменныхъ равенъ суммѣ ихъ предѣловъ.

Пусть имѣемъ n переменныхъ (гдѣ n — конечное число): u_1, u_2, \dots, u_n , которыхъ предѣлы соответственно равны: K_1, K_2, \dots, K_n . По опредѣленію предѣла имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} K_1 - u_1 &= \alpha_1 \\ K_1 - u_2 &= \alpha_2 \\ K_2 - u_3 &= \alpha_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Здѣсь } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \text{ безконечно-малы. Складывая эти равенства,} \\ &\text{находимъ:} \\ &(K_1 - K_2 + K_2 - K_3 + \dots + K_n) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Вторая часть этого равенства, какъ сумма конечнаго числа безконечно-малыхъ, безконечно-мала, слѣд. равенство это показываетъ, что разность между постоянной $K_1 - K_2 + \dots + K_n$ и переменной $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ безконечно-мала, а слѣд. по опредѣленію предѣла, постоянная $K_1 - K_2 + \dots + K_n$ служить предѣломъ переменной $u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Примѣчаніе. Въ теоремѣ оговорено, что число слагаемыхъ должно быть *конечное* и опредѣленное: безъ этого ограниченія теорема не имѣетъ мѣста. Пояснить это примѣромъ.



Черт. 12.

Раздѣлимъ прямоугольникъ $ABCD$ на нѣкоторое число равныхъ частей прямыми параллельными AD (черт. 12). Если число дѣленій неограниченно увеличивать,

то каждый из малых прямоугольников $BCFE$ и т. д. становится бесконечно-малым, стремясь къ предѣлу— нулю. При конечномъ числѣ слагаемыхъ сумма предѣловъ была бы равна нулю; въ данномъ же случаѣ эта сумма предѣловъ равна прямоугольнику $ABCD$. Слѣд., при неограниченномъ числѣ слагаемыхъ теорема не имѣетъ мѣста.

188. ТЕОРЕМА VI. Предѣлъ суммы переменнѣй и постоянной равенъ суммѣ постоянной и предѣла переменнѣй.

Пусть переменная u имѣетъ предѣлъ K ; по опредѣленію предѣла имѣемъ: $u - K = \alpha$, гдѣ α — бесконечно-малая величина. Прибавивъ и вычтя въ первой части постоянную a , найдемъ: $(u - a) - (K - a) = \alpha$. Это равенство показываетъ, что разность между переменною $u - a$ и постоянною $K - a$ бесконечно мала, а потому $K - a$ есть предѣлъ переменнѣй $u - a$, и теорема доказана.

189. ТЕОРЕМА VII. Предѣлъ разности двухъ переменнѣй равенъ разности ихъ предѣловъ.

Пусть переменныя u_1 и u_2 имѣютъ предѣлы K_1 и K_2 ; по опредѣленію имѣемъ:

$$u_1 - K_1 = \alpha_1 \quad \text{и} \quad u_2 - K_2 = \alpha_2,$$

гдѣ α_1 и α_2 — бесконечно-малы. Вычитая 2-е равенство изъ 1-го, имѣемъ:

$$(u_1 - u_2) - (K_1 - K_2) = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Поскольку $\alpha_1 - \alpha_2$ — бесконечно-малая величина, то по опредѣленію предѣла, $u_1 - u_2$ имѣетъ предѣлъ $K_1 - K_2$, и теорема доказана.

190. ТЕОРЕМА VIII. Предѣлъ разности между переменнѣй и постоянною равенъ разности между предѣломъ переменнѣй и постоянною.

Если переменная u имѣетъ предѣлъ K , то, по опредѣленію предѣла, $u - K = \alpha$, гдѣ α — бесконечно-малая. Вычтя и прибавивъ къ 1-й части равенства постоянную a , имѣемъ: $(u - a) - (K - a) = \alpha$. Отнявъ равенствомъ и доказываемъ, что предѣлъ величины $u - a$ равенъ $K - a$.

191. ТЕОРЕМА IX. Предѣлъ произведенія конечнѣй переменнѣй, взятыхъ въ конечномъ числѣ, равенъ произведенію ихъ предѣловъ.

Пусть двѣ переменныя u_1 и u_2 имѣютъ предѣлы K_1 и K_2 ; въ такомъ случаѣ: $u_1 = K_1 + \alpha_1$ и $u_2 = K_2 + \alpha_2$, гдѣ α_1 и α_2 — бесконечно-малы. Перемноживъ оба равенства, имѣемъ

$$u_1 \cdot u_2 = (K_1 + \alpha_1)(K_2 + \alpha_2) = K_1 \cdot K_2 + \alpha_1 \cdot K_2 + \alpha_2 \cdot K_1 + \alpha_1 \cdot \alpha_2.$$

Произведенія $\alpha_1 \cdot K_2$ и $\alpha_2 \cdot K_1$ въ силу пункта IV § 181, а $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ — въ силу III того же §, бесконечно-малы, а потому послѣднее равенство показываетъ, что переменная $u_1 \cdot u_2$ разнится бесконечно мало отъ постоянной $K_1 K_2$, сл. что $K_1 K_2$ — предѣлъ переменнѣй $u_1 u_2$.

Теорема справедлива для сколькихъ угодно множителей; это можно доказать, разсматривая произведеніе нѣсколькихъ переменнѣй какъ одну переменную и применяя сюда теорему о двухъ переменнѣхъ. Такимъ образомъ найдемъ:

$$\text{пред.}(u_1 u_2 u_3) = \text{пред.}(u_1 u_2) \cdot \text{пред.} u_3 = \text{пред.}(u_1 u_2) \cdot \text{пред.} u_3 = \text{пред.} u_1 \cdot \text{пред.} u_2 \cdot \text{пред.} u_3.$$

Примѣчаніе. Теорема справедлива только для случая, когда число множителей конечно. Напримѣръ, въ случаѣ выраженія $(1 + \frac{1}{m})^m$, при $m = \infty$ каждый множитель имѣетъ предѣломъ 1, между тѣмъ какъ произведеніе имѣетъ предѣломъ не 1, которая, повидимому, должна бы была составлять произведеніе предѣловъ, а число e (2,71828...), какъ это будетъ доказано въ главѣ XLIX.

192. ТЕОРЕМА X. *Предѣлъ произведенія переменнѣй на постоянную равенъ произведенію этой постоянной на предѣлъ переменнѣй.*

Пусть u есть переменная, предѣлъ которой $= K$, и a — данная постоянная.

По опредѣленію предѣла имѣемъ $u = K + \alpha$, гдѣ α — безконечно-мало. Помноживъ обѣ части равенства на a , получимъ: $u \cdot a = Ka + \alpha \cdot a$; но αa есть величина безконечно-малая (§ 180, IV), сл. Ka разнится безконечно-мало отъ ua , а потому пред. $(ua) = K \cdot a$, и теорема доказана.

193. ТЕОРЕМА XI. *Если обѣ переменныя при ростѣ своихъ измѣненій сохраняютъ постоянное, конечное, отношеніе, то и предѣлы ихъ имѣютъ то же самое отношеніе.*

Пусть u_1 и u_2 двѣ переменныя, отношеніе которыхъ всегда остается равнымъ постоянному m , т. е. $\frac{u_1}{u_2} = m$. Отсюда: $u_1 = u_2 \cdot m$; но по предыдущей теоремѣ: пред. $(u_1) = m \times$ пред. (u_2) , откуда $\frac{\text{пред.}(u_1)}{\text{пред.}(u_2)} = m$, и теорема доказана.

194. ТЕОРЕМА XII. *Предѣлъ отношенія двухъ конечныхъ переменнѣй u_1 и u_2 равенъ отношенію ихъ предѣловъ K_1 и K_2 .*

Пусть $\frac{u_1}{u_2} = x$, откуда $u_1 = u_2 \cdot x$. Изъ этого равенства, въ осн. теор. III § 184 и теор. IX § 190 имѣемъ: пред. $(u_1) =$ пред. $(u_2) \cdot$ пред. (x) , а отсюда, раздѣливъ обѣ части на пред. (u_2) , получимъ $\frac{\text{пред.}(u_1)}{\text{пред.}(u_2)} = \text{пред.}(x)$ или — пред. $(\frac{u_1}{u_2})$.

195. ТЕОРЕМА XIII. *Предѣлъ частнаго отъ раздѣленія переменнѣй на конечную постоянную равенъ частному отъ раздѣленія предѣла переменнѣй на эту постоянную.*

Пусть предѣлъ переменнѣй u равенъ K , а постоянная $= m$. Положимъ $m = x$, откуда $u = mx$, гдѣ x — переменная. По теор. III § 184 и теор. X § 191 имѣемъ пред. (u) или $K = m \cdot$ пред. (x) , откуда пред. $(x) = \frac{K}{m}$, или пред. $(\frac{u}{m}) = \frac{K}{m}$, что и требовалось доказать.

196. ТЕОРЕМА XIV. *Предѣлъ частнаго отъ раздѣленія конечной постоянной на конечную переменную равенъ частному отъ раздѣленія этой постоянной на предѣлъ переменнѣй.*

Пусть данная постоянная — a , переменная — u , и пусть $\frac{a}{u} = x$, гдѣ x — переменная; отсюда $a = ux$. Пусть пред. $(u) = K$, а пред. $(x) = L$; по опредѣленію предѣла: $u = K + \alpha$, $x = L + \beta$, гдѣ α и β — безконечно-малы. Перемноживъ эти равенства, имѣемъ: $u \cdot x = (K + \alpha)(L + \beta) = KL + L\alpha + K\beta + \alpha\beta$. Три послѣдніе члена, представляя алгебраическую сумму безконечно-малыхъ, могутъ давать въ результатѣ или безконечно-малую, или нуль. Въ первомъ случаѣ

и другая часть была бы переменная величина, а этого не может быть, потому что первая часть (ux) равна постоянной a ; следовательно $+Lx + K^2 + x^3$ уменьшается в пользу a , а потому $ux < K.L$, или, замѣняя ux равной ей величиной a , находимъ: $a = K.L$, откуда $L = \frac{a}{K}$, что и треб. доказать.

197. Теорема XV. Предѣлъ степени переменной равенъ той же степени предѣла этой переменной, полагая показатель цѣлымъ и положительнымъ числомъ.

Пусть n есть данная степень; при m цѣломъ положительномъ она предѣлится произведениемъ m переменныхъ множителей $u \cdot u \dots u$; если предѣлъ u есть k , то по теор. IX § 196 имѣемъ: пред. $(u \dots u) = k \cdot k \dots k$, или пред. $u^n = k^n$.

198 Теорема XVI. Предѣлъ корня съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ изъ переменной равенъ корню того же порядка изъ предѣла этой переменной.

Пусть имѣемъ $\sqrt[m]{u}$, гдѣ u — переменное и m — цѣлое положительное число. Полагая, что $u = [\sqrt[m]{u}]^m$, по предыдущей теоремѣ имѣемъ: пред. $(u) = (\sqrt[m]{u})^m$; нѣпосредственно изъ обѣихъ частей корень m -го порядка, находимъ:

$$\text{пред. } (\sqrt[m]{u}) = \sqrt[m]{\text{пред. } (u)}.$$

что и треб. было доказать.

Распространеніе основныхъ законовъ на несоизмѣримыя числа.

199. Мы видѣли, что есть такія, называемыя *несоизмѣрими*, количества, которыя нельзя точнымъ образомъ выразить ни въ цѣлыхъ единицахъ, ни въ какихъ-либо дѣльных единицахъ. Однако и между такимъ количествомъ и единицею существуетъ нѣкоторое отношеніе. Это-то отношеніе мы и попытаемся опредѣлить; выяснимъ, что слѣдуетъ разумѣть, напр., подъ $\sqrt{2}$.

Извѣстнымъ способомъ нахожденія приближенныхъ квадратныхъ корней, можемъ вычислить сколько угодно десятичныхъ знаковъ корня кв. изъ 2; сдѣлавъ это, рассмотримъ рядъ чиселъ

$$1 \quad 1,4 \quad 1,41 \quad 1,414, \quad 1,4142, \dots$$

которые выражаютъ наибольшее число цѣлыхъ единицъ, десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ, квадраты которыхъ меньше 2

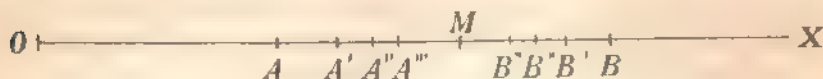
Рассмотримъ затѣмъ другой рядъ чиселъ,

$$2, \quad 1,5 \quad 1,42 \quad 1,415, \quad 1,4143 \dots$$

выражающихъ наименьшее число цѣлыхъ единицъ, десятыхъ, сотыхъ... которыхъ квадратъ больше 2. Эти числа получаютъ прибавленіемъ 1-цы къ послѣдней цифрѣ чиселъ перваго ряда.

Затѣмъ, взявъ неограниченную прямую OX съ началомъ O и принявъ за 1, нанесемъ, начиная отъ точки O , отрѣзки

$OA, OA', OA'', OA''', \dots$, равные $1; 1,4; 1,41; \dots$; а заѣмъ, отрезки $OB, OB', OB'', OB''', \dots$ равные $2; 1,5; 1,42; 1,415, \dots$. Отрезки OA, OA', OA'', \dots идутъ возрастающъ, но при этомъ всегда остаются меньше некоторой определенной длины; напр., они всегда будутъ меньше OB . Но когда переменное количество постоянно



Черт. 13.

возрастаетъ и, однако, остается всегда меньше некоторой определенной величины, то очевидно, оно стремится къ некоторому предѣлу. Слѣд. и переменные отрезки OA, OA', OA'', \dots увеличиваясь, стремятся къ некоторому предѣлу; пусть этотъ предѣлъ будетъ OM .

Съ другой стороны, переменныя количества OB, OB', OB'', \dots постоянно уменьшаются и однако всегда остаются больше некоторой определенной величины; напр., они всегда больше OA ; сл. и этотъ рядъ уменьшающихся отрезковъ стремится къ некоторому предѣлу. Легко видѣть, что этотъ предѣлъ будетъ тотъ же, что и для перваго ряда, т.-е. $= OM$. Въ самомъ дѣлѣ, составивъ разности между 1-ми значениями того и другого ряда, заѣмъ между вторыми ихъ значениями, потомъ между третьими, и т. д., замѣчаемъ, что эти разности суть $1; 0,1; 0,01; 0,001; \dots$ т.-е. постоянно убываютъ; заключаемъ, что разность между переменными, $OB_n - OA_n$, есть величина бесконечно-малая; а слѣд. OB_n стремится къ тому же предѣлу какъ и OA_n (§ 185), т.-е. къ предѣлу OM .

Итакъ, оба ряда значеній стремятся къ одному и тому же предѣлу, и квадратъ этого предѣла есть число 2; въ с. д. квадратъ этого общаго предѣла не и. б. ни больше 2, ни меньше 2, потому что онъ служитъ общимъ предѣломъ и чиселъ меньшихъ 2, и чиселъ большихъ 2.

Этотъ-то общій предѣлъ и называется квадратнымъ корнемъ изъ 2, и обозначается символомъ $\sqrt{2}$.

Совершая дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами, необходимо дать згнать дѣйствіямъ *опредѣленія*, ибо точный смыслъ дѣйствій извѣстенъ только въ отношеніи соизмѣримыхъ чиселъ. Достаточно дать опредѣленія сложенія и умноженія; на обратныя дѣйствія мы сохранимъ ихъ общія опредѣленія.

200. Опредѣленіе суммы. Пусть требуется опредѣлить, что слѣдуетъ разумѣть подъ *суммою несоизмѣримыхъ чиселъ π и $\sqrt{2}$* .

Взявъ ихъ приближенныя величины точныя до $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$ по недостатку и по избытку, получимъ:

$$\begin{array}{ll} 3,1 < \pi < 3,2 & 1,7 < \sqrt{2} < 1,8 \\ 3,14 < \pi < 3,15 & 1,73 < \sqrt{2} < 1,74 \\ 3,141 < \pi < 3,142 & 1,732 < \sqrt{2} < 1,733 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

отсюда, взявъ суммы, найдемъ два ряда (А) и (В):

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} 3,1 + 1,7 \\ 3,14 + 1,73 \\ 3,141 + 1,732 \\ \dots \end{array} \right. \quad (B) \left\{ \begin{array}{l} 3,2 + 1,8 \\ 3,15 + 1,74 \\ 3,142 + 1,733 \\ \dots \end{array} \right.$$

Суммы группы (А) идутъ постоянно увеличиваясь, но всегда оставаясь конечными, ибо ихъ слагаемыя конечны; слѣд. эти суммы стремятся къ некоторому пределу. Суммы группы (В) идутъ уменьшаясь, но оставаясь конечными, ибо ихъ слагаемыя конечны; слѣдовательно суммы этой группы стремятся къ определенному пределу. Каковы же эти пределы? Взявъ разности двухъ суммъ въ группахъ (А) и (В), соответствующихъ приближенію $\frac{1}{10^n}$, находимъ, что эта разность равна $\frac{2}{10^n}$; слѣд. при неограниченномъ возрастаніи n , она стремится къ нулю. Это значитъ, что оба сказанные пределы равны. *Этотъ общій пределъ группъ (А) и (В) и называемъ суммою несоизмѣримыхъ π и $\sqrt{2}$, и изображаютъ ее въ видѣ $\pi + \sqrt{2}$.*

201. Свойства суммы. 1. Сумма двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ не изменяется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.

По опредѣленію суммы несоизмѣримыхъ чиселъ имѣемъ

$$\pi + \sqrt{2} = \text{пред. } (a + b),$$

называя буквою a — приближенную величину числа π , а буквою b — числа $\sqrt{2}$; точно такъ же

$$\sqrt{2} + \pi = \text{пред. } (b + a).$$

Но приближенія a и b суть числа соизмѣримыя, слѣд. по теор. II § 15, $a + b$ всегда равно $b + a$; если же переменныя величины при своихъ измѣненіяхъ остаются равными, то по теор. III § 184 и пределы ихъ равны; слѣд.

$$\pi + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \pi.$$

II. Придать сумму двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ — все равно что при-
дать послѣдовательно каждое изъ нихъ.

По опредѣленію суммы несоизмѣримыхъ чиселъ имѣемъ:

$$\sqrt{5} + (\pi + \sqrt{2}) = \text{пред. } [a + (b + c)],$$

такъ какъ a , b и c суть приближенныя величины чиселъ: $\sqrt{5}$, π и $\sqrt{2}$.
Точно такъ же

$$\sqrt{5} + \pi + \sqrt{2} = \text{пред. } (a + b + c);$$

такъ какъ a , b и c соизмѣримы, то всегда

$$a + (b + c) = a + b + c;$$

пределы же равных переменных равны, слѣд.

$$\sqrt{5} = (\pi + \sqrt{2}) = \sqrt{5} \quad \pi + \sqrt{2}.$$

202. Определеіе произведенія. Определеіть произведеіе $\pi \wedge \sqrt{3}$. Для этого составимъ произведеіа приближеній чиселъ π и $\sqrt{3}$, точныхъ до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$... по недостатку, а также по избытку: такимъ образомъ получимъ двѣ группы произведеіей:

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} 3,1 \times 1,7 \\ 3,14 \times 1,73 \\ 3,141 \quad 1,732 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array} \right. \quad (B) \left\{ \begin{array}{l} 3,2 \times 1,8 \\ 3,15 \times 1,74 \\ 3,142 \quad 1,733 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array} \right.$$

Произведеіа группы (A) постепенно увеличиваются; но, оставаясь конечными, стремятся къ нѣкоторому предѣлу. Произведеіа группы (B) ядутъ уменьшались, но какъ онѣ остаются конечными, то приближаются также къ нѣкоторому предѣлу. Докажемъ, что предѣлы обоихъ произведеіей одинъ и тотъ же.

Изъ самыхъ дѣлѣ, взявъ для π и $\sqrt{3}$ приближенія, точныя до $\frac{1}{10^n}$, видимъ

$$\frac{a}{10^n} < \pi < \frac{a+1}{10^n}$$

$$\frac{b}{10^n} < \sqrt{3} < \frac{b+1}{10^n}$$

Перемножая, получимъ:

$$\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^n} < \pi \times \sqrt{3} < \frac{(a+1)}{10^n} \times \frac{(b+1)}{10^n}.$$

Разность между этими приближенными произведеіями равна

$$\frac{1}{10^n} \left(\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^n} \right) + \frac{1}{10^{2n}}.$$

Членъ $\frac{1}{10^{2n}}$ по мѣрѣ неограниченнаго возрастанія n , стремится къ нулю, сумма $\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^n}$ стремится къ $\pi + \sqrt{3}$, т.е. остается конечною, множитель же $\frac{1}{10^n}$ стремится къ нулю, а потому произведеіе $\frac{1}{10^n} \left(\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^n} \right)$ стремится къ нулю. Игакъ разность между переменными приближенными произведеіями стремится къ нулю, а слѣд. сказанные предѣлы равны.

Этотъ общій предѣлъ рядовъ A и B и называютъ произведеіемъ π на $\sqrt{3}$.

203. Свойства произведеіа. I. Произведеіе двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ не измѣняется отъ переменн мѣстъ сомножителей.

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію произведенія несоизмѣримыхъ чиселъ, имѣемъ:

$$\pi \cdot \sqrt{2} = \text{пред. } (a \cdot b) \text{ и } \sqrt{2} \cdot \pi = \text{пред. } (b \cdot a)$$

гдѣ a и b соизмѣримыя приближенія чиселъ π и $\sqrt{2}$. Но, по свойству произведенія соизмѣримыхъ чиселъ всегда $ab = ba$; сл. и предѣлы этихъ перемѣнныхъ равны, т.-е.

$$\pi \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \pi.$$

II. Чтобы умножить на произведение двухъ множителей, достаточно умножить послѣдовательно на каждый изъ нихъ.

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію (§ 201), имѣемъ:

$$\sqrt{5} \cdot (\pi \sqrt{2}) = \text{пред. } [a(bc)];$$

и также

$$\sqrt{5} \cdot \pi \cdot \sqrt{2} = \text{пред. } (abc).$$

Но a , b и c соизмѣримы; слѣд. $a(bc) = abc$, и потому и предѣлы этихъ перемѣнныхъ равны, т.-е.

$$\sqrt{5} (\pi \sqrt{2}) = \sqrt{5} \cdot \pi \cdot \sqrt{2}.$$

III. Въ произведеніи сколько угодно несоизмѣримыхъ множителей можно какъ угодно измѣнять порядокъ ихъ.

Докажемъ сперви, что можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ. Пусть a есть произведение всѣхъ множителей, за исключеніемъ двухъ послѣднихъ: $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$. Полное произведеніе будетъ

$$a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5},$$

или, въ силу пункта II,

$$a \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{5});$$

но, въ силу п. I, это выраженіе =

$$a \cdot (\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}),$$

а, на осн. п. II, это произведеніе равно

$$a \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}.$$

Итакъ:

$$a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = a \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}.$$

т.-е. можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ множителей

Отсюда слѣдуетъ, что можно измѣнить порядокъ всякихъ двухъ смежныхъ множителей, ибо ихъ можно разсматривать послѣдними въ произведеніи, составленномъ изъ нихъ и имъ предшествующихъ.

Изъ этого слѣдуетъ, что переставляя послѣдовательно смежные сомножители, можно каждый изъ нихъ помѣстить на какомъ угодно мѣстѣ произведенія. Слѣд. порядокъ сомножителей не вліяетъ на величину произведенія.

IV. Чтобы умножить данное число на сумму двух несоизмеримых чисел, нужно умножить его на каждое слагаемое отдельно и результаты сложить.

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленіямъ, имѣемъ

$$\sqrt{5} \cdot (\pi + \sqrt{2}) = \text{пред. } [a(b+c)];$$

съ другой стороны:

$$\sqrt{5} \cdot \pi + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \text{пред. } [ab + ac] = \text{пред. } [a(b+c)].$$

Слѣдовательно

$$\sqrt{5} \cdot (\pi + \sqrt{2}) = \sqrt{5} \cdot \pi + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}.$$

Итакъ, вообще, основныя законы дѣйствій, показанные для соизмеримыхъ чиселъ, распространяются и на несоизмеримыя.

ГЛАВА XV.

Объ ирраціональныхъ выраженіяхъ.

Происхожденіе ирраціональныхъ выраженій. Преобразованіе ихъ въ дѣйствія надъ ними. — Ирраціональныя дроби. — Примѣры.

204. Происхожденіе ирраціональныхъ выраженій. — Дѣйствіе извлеченія корня изъ алгебраическихъ выраженій не всегда возможно. Такъ, когда показатель подкореннаго количества не дѣлится на показателя корня, то извлеченіе корня можно только *обозначить*, но нельзя *выполнить* въ самомъ дѣлѣ, напр. $\sqrt[5]{a^7}$, $\sqrt[10]{a^9}$ и т. д. Точно такъ же, корни изъ многочлена, не представляющаго точной степени, не могутъ быть извлечены, а потому его только обозначаютъ при помощи знака $\sqrt{\quad}$; примѣромъ можетъ служить $\sqrt{a^2 + b^2}$. Подобнаго рода *выраженія, которыя нельзя привести къ раціональному виду, называютъ ирраціональными*, также *радикальными* или *коренными*.

Не слѣдуетъ смѣшивать ирраціональныхъ выраженій съ несоизмеримыми числами: ирраціональное выраженіе можетъ представлять и соизмеримыя и несоизмеримыя числа, смотря по числовому значенію входящихъ въ него буквъ. Такъ, \sqrt{a} представляетъ соизмеримое число 3 при $a = 9$, и несоизмеримое число $\sqrt{7}$ при $a = 7$; точно такъ же, $\sqrt{a^2 + b^2}$ представляетъ соизмеримое число 5 при $a = 3$ и $b = 4$, и несоизмеримое число $\sqrt{5}$ при $a = 1$ и $b = 2$.

Вослѣдствіемъ мы увидимъ, что $\sqrt[n]{A}$ имѣетъ *m* различныхъ значеній, имѣющихъ одну и ту же абсолютную величину; въ этой главѣ мы изучимъ преобразованіе корней, ограничиваясь разсмотрѣніемъ ихъ абсолютныхъ значеній.

205. Преобразованіе ирраціональныхъ выраженій помощью выведенія множителей изъ-подъ знака корня и введенія множителей подъ коренной знакъ.

1. Если въ выраженіи $\sqrt[m]{A}$ подкоренное количество A разлагается на такие два множителя, изъ которыхъ одинъ представляетъ точную степень съ показателемъ, равнымъ показателю корня, то этотъ множитель — извлечениемъ изъ него корня — можетъ быть вынесенъ изъ-подъ знака корня.

Пусть $A = P^m \times Q$, гдѣ Q уже не есть точная m -ая степень; въ такомъ случаѣ

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{P^m} \cdot \sqrt[m]{Q};$$

примѣняя правило извлеченія корня изъ произведенія, и замѣчая, что $\sqrt[m]{P^m} = P$, найдемъ:

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{P^m \times Q} = \sqrt[m]{P^m} \cdot \sqrt[m]{Q} = P \times \sqrt[m]{Q}.$$

Примѣры. 1. Упростить, выведеніемъ множителя изъ-подъ знака корня, выраженіе $\sqrt[3]{50a^9b^{10}}$.

Подкоренное количество разлагается на два множителя $25a^9b^{10} \times 2a$, изъ которыхъ первый есть квадратъ $5a^4b^5$; слѣд.

$$\sqrt[3]{50a^9b^{10}} = \sqrt[3]{25a^9b^{10} \times 2a} = \sqrt[3]{(5a^4b^5)^3 \times 2a} = 5a^4b^5 \cdot \sqrt[3]{2a}.$$

2. Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\sqrt[3]{128a^{12}b^{12}c^2} = \sqrt[3]{64a^{12}b^{12} \times 2a^2c^2} = \sqrt[3]{(4a^4b^4)^3 \cdot 2a^2c^2} = 4a^4b^4 \cdot \sqrt[3]{2a^2c^2}.$$

3. Точно такимъ же образомъ:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3b^4}{c^3d^3}} = \sqrt[3]{\frac{b^3}{c^3d^3} \times a^3b} = \frac{b}{cd} \cdot \sqrt[3]{a^3b}.$$

$$4. \sqrt[3]{(x+y)^2(x^2+y^2)(x^4-y^4)} = \sqrt[3]{(x+y)^2(x^2+y^2)(x^2-y^2)(x+y)(x-y)} \\ = \sqrt[3]{(x+y)^3(x^2+y^2)^2(x-y)} = (x+y)(x^2+y^2) \sqrt[3]{x-y}.$$

$$5. \sqrt[m]{\frac{a^{mp+3}b^{mq+6}}{c^{mr}d^{ms+1}}} = \sqrt[m]{\frac{a^{mp} \cdot a^3 b^{mq} \cdot b^3}{c^{mr} d^{ms} \cdot d}} = \sqrt[m]{\frac{a^{mp}b^{mq} \cdot a^3b^3}{c^{mr} d^{ms} \cdot d}} = \frac{a^p b^q}{c^r d^s} \sqrt[m]{\frac{a^3b^3}{d}}.$$

II. Если передъ радикаломъ находится множитель, то этотъ множитель можно внести подъ знакъ корня, возвысивъ въ степень, изображаемую показателемъ корня.

Требуется доказать, что $P \sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{P^m} \cdot \sqrt[m]{Q}$.

Замѣтивъ, что $P = \sqrt[m]{P^m}$, и что, по правилу извлеченія корня изъ произведенія (§ 120): $\sqrt[m]{A \cdot B} = \sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B}$, откуда обратно: $\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{AB}$, имѣемъ:

$$P \times \sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{P^m} \cdot \sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{P^m \times Q}.$$

требуемое, такимъ образомъ, доказано.

Примѣры. (Дѣлать внесеніе множителей подъ знакъ корня въ примѣрахъ:

$$1. (a-b) \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a-b}} = \sqrt{(a+b)(a-b)^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{a^2-b^2}.$$

$$2. \frac{x-y}{x-y} \cdot \sqrt[3]{\frac{(x-y)^3}{x^2-2xy+y^2}} = \sqrt[3]{\frac{(x-y)^4(x-y)^3}{(x-y)^2(x+y)^3}} = \sqrt[3]{(x-y)(x-y)} = \sqrt[3]{x^2-y^2}.$$

Дѣйствія надъ ирраціональными выраженіями.

206. Подобныя ирраціональныя выраженія; ихъ приведеніе. — Два ирраціональныя выраженія называются подобными, если у нихъ показатели корня и подкоренныя выраженія одинаковы: такъ напр. $2b\sqrt{ac}$ и $-3x\sqrt{ac}$ суть иррац. выраженія подобныя; а $2\sqrt[3]{7b^2c}$ и $\sqrt[4]{2ac}$ неподобны. Иногда корни, кажущіеся на первый взглядъ неподобными, могутъ быть приведены къ виду подобныхъ ирраціональныхъ выраженій: для этого ихъ надо упростить, сдѣлавъ, гдѣ возможно, вынесеніе множителей изъ-подъ знака корня. Напр. выраженія $\sqrt[3]{27a^4c^3}$ и $\sqrt[3]{12a^2c^5}$, имѣющіе одинаковыхъ показателей корня, но неодинаковыя подкоренныя количества, кажутся на первый взглядъ не-подобными; но сдѣлавъ въ нихъ вынесеніе изъ-подъ знака корня, приведемъ ихъ къ виду

$$3a^2x\sqrt[3]{3x} \text{ и } 2ax^2\sqrt[3]{3x}, —$$

подобныхъ выраженій. Множители $3a^2x$ и $2ax^2$ при радикалахъ называются *коэффициентами*.

Соединеніе нѣсколькихъ подобныхъ ирраціональныхъ выраженій въ одно называется ихъ приведеніемъ. Дѣйствіе это состоитъ въ томъ, что коэффициенты подобныхъ иррац. выраженій заключаютъ въ скобки, къ которымъ и приписываютъ множителямъ общій корень. *Примѣры:*

I. Выраженіе: $\sqrt[3]{27a^4x^3} - \sqrt[3]{12a^2x^5} + \sqrt[3]{75a^2x}$ приводится къ

$$3a^2x\sqrt[3]{3x} - 2ax^2\sqrt[3]{3x} + 5a^2\sqrt[3]{3x};$$

вынося въ немъ общій корень и a за скобки, получимъ:

$$(3ax - 2x^2 + 5a^2)a\sqrt[3]{3x}.$$

II. Сдѣлавъ приведеніе въ выраженіи

$$\sqrt[3]{10x^3} + \sqrt[3]{20y} - \sqrt[3]{5y} + \sqrt[3]{40x^3} - \sqrt[3]{80y},$$

вынесеніемъ множителей изъ-подъ радикаловъ выраженіе приводится къ виду

$$x\sqrt[3]{10x} + 2\sqrt[3]{5y} - \sqrt[3]{5y} + 2x\sqrt[3]{10x} - 4\sqrt[3]{5y},$$

привода подобные члены, получимъ

$$3x\sqrt[3]{10x} - 3\sqrt[3]{5y}.$$

207. Сложеніе и вычитаніе. При сложеніи иррац. выраженій ихъ пишутъ рядомъ съ тѣми знаками, какіе они имѣютъ; при вычитаніи же приписываютъ къ уменьшаемому члены вычитаемого съ обратными знаками; затѣмъ члены суммы или разности приводятъ къ простѣйшему виду, и, если окажутся въ числѣ ихъ подобные члены, дѣлаютъ приведеніе.

Примѣры. I. $\left(\sqrt[3]{54} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{250}\right) + \left(-\frac{3}{4}\sqrt[3]{9} + 0.5\sqrt[3]{\frac{128}{9}} + \sqrt[3]{\frac{63}{4}}\right)$

$$\sqrt[3]{54} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{250} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{9} + \frac{2}{9} + 0.5\sqrt[3]{\frac{128}{9}} + \sqrt[3]{\frac{63}{4}}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{27 \times 2 + 1} \sqrt[3]{\frac{1}{4} \times 2 - \sqrt[3]{125} \times 2 - \frac{3}{4}} \sqrt[3]{\frac{1}{9} \times 2 + 1,5} \sqrt[3]{\frac{64}{9} \times 2 + \sqrt[3]{\frac{27}{8} \times 2}} \\ &= 3\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{2} + \frac{4}{3} \sqrt[3]{2} + \frac{5}{2} \sqrt[3]{2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{2} + \frac{19}{12} \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } & (m^4 n^3 \sqrt[3]{\frac{5y}{m^3 n^3}} + 6 \sqrt[3]{\frac{5m^3 n^6 y}{8}}) (8m^3 n^4 \sqrt[3]{\frac{5y}{8m^{12} n^6}} - m \sqrt[3]{\frac{m^6 y}{8}} + \sqrt[3]{\frac{135m^3 n^6 y}{8}}) \\ &= m^4 n^3 \sqrt[3]{\frac{5y}{m^3 n^3}} + 6 \sqrt[3]{\frac{5m^3 n^6 y}{8}} - 8m^3 n^4 \sqrt[3]{\frac{5y}{8m^{12} n^6}} - m \sqrt[3]{\frac{m^6 y}{8}} + \sqrt[3]{\frac{135m^3 n^6 y}{8}} \\ &= \frac{m^4 n^3}{m^3 n^3} \sqrt[3]{5y} + \frac{6}{2} \sqrt[3]{\frac{5m^3 n^6 y}{8}} - \frac{8m^3 n^4}{2m^{12} n^6} \sqrt[3]{5y} - \frac{m \cdot m^2}{2} \sqrt[3]{\frac{y}{5y}} - \frac{3mn^2}{2} \sqrt[3]{\frac{y}{5y}} \\ &= mn^3 \sqrt[3]{5y} + 3mn^3 \sqrt[3]{5y} - 4mn^2 \sqrt[3]{5y} + \frac{mn^2}{2} \sqrt[3]{5y} - \frac{3mn^2}{2} \sqrt[3]{5y} = -mn^2 \sqrt[3]{5y}. \end{aligned}$$

208. Умноженіе. Въ § 120 было доказано, что

$$\sqrt[n]{A \cdot B \cdot C} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C};$$

написавъ это равенство въ обратномъ порядкѣ, найдемъ:

$$\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C} = \sqrt[n]{A \cdot B \cdot C};$$

Отсюда правило: чтобы перемножить нѣсколько иррац. выраженій одинаковаго порядка, надо перемножить поочередно каждый изъ произведеній и извлечь корень того же порядка.

Примѣры I. $\sqrt[3]{2axy^4} \times \sqrt[3]{6a^2xy^3} = \sqrt[3]{12a^3x^2y^7} = 2a^2xy^3\sqrt[3]{3y}.$

II. $\sqrt{ax^2 + x^2} \cdot \sqrt{ab^2 - bx} = \sqrt{(ax^2 + x^2)(ab^2 - bx)} = \sqrt{bx(ax^2 + x^2)^2} = (ax^2 + x^2)\sqrt{bx}.$

III. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^3} = b^3 \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} = b^3 = \sqrt[3]{a^3} = (a^3 - b^3) = \sqrt[3]{b^3} = b.$

IV. $(a\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}a^2\sqrt[3]{a^3} + 3a^2\sqrt[3]{a^7}) \times (-6\sqrt[3]{a^3}) = -6a\sqrt[3]{a^4} + 3a^2\sqrt[3]{a^6} -$
 $- 18a^3\sqrt[3]{a^{10}} = -6a^4 + 3a^5 - 18a^5.$

209. Дѣленіе. Въ § 121 было доказано, что

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}};$$

Написавъ это равенство въ обратномъ порядкѣ, имѣемъ:

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}.$$

Отсюда правило: чтобы разбить один на другой два корня с одинаковыми показателями, надо первое подрадикальное количество разделить на второе, и из частного извлечь корень того же порядка.

Примеры. I. $14 \sqrt[3]{9a^3} : 2 \sqrt[3]{4a} = 7 \sqrt[3]{\frac{9a^3}{4a}} = 7 \sqrt[3]{\frac{9}{4} a^2} = 7a \sqrt[3]{\frac{9a}{4}}$.

II. $a : \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a^5} : \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a^2}$.

III. $\frac{\frac{4}{3}a^3 - \frac{23}{6}a^2\sqrt{ab} - a^2b}{\frac{4}{3}a^3 + \frac{1}{6}a^2\sqrt{ab} - 4a^2\sqrt[3]{ab} - \frac{a^2b}{2} \pm 4a^3\sqrt{ab} \pm \frac{1}{2}a^3b}$
 $\frac{2a\sqrt{a} + \frac{1}{4}a\sqrt{b}}{2a\sqrt{a} - 2a\sqrt{b} + \frac{1}{4}b\sqrt{a}}$
 $\frac{\frac{3}{2}a^2b + \frac{3}{16}ab\sqrt{ab}}{\frac{3}{2}a^2b - \frac{3}{16}ab\sqrt{ab}}$
 0

1) Вычисление 1-го члена частного: $\frac{4}{3}a^3 : 2a\sqrt{a} = \frac{4}{3}a^3\sqrt[3]{a^3} : 2a\sqrt[3]{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$.

2) Вычисление 2-го члена частного: $-4a^2\sqrt[3]{ab} : 2a\sqrt{a} = -2a\sqrt[3]{b}$.

3) Вычисление 3-го члена частного: $\frac{3}{2}a^2b : 2a\sqrt[3]{a} = \frac{3}{2}ab\sqrt[3]{a^3} : 2a\sqrt[3]{a} = \frac{3}{4}b\sqrt{a}$.

210. Возвышение въ степень Пусть требуется $\sqrt[m]{a^k}$ возвысить въ p -ую степень, гдѣ m , k и p — целыя положительныя числа. Это значить — данный корень взять множителемъ p разъ; слѣд.

$$(\sqrt[m]{a^k})^p = \sqrt[m]{a^k} \cdot \sqrt[m]{a^k} \cdot \sqrt[m]{a^k} \cdot \dots (\text{всѣхъ множителей } p);$$

но, по правилу перемноженія корней (§ 208), вторая часть равна

$$\sqrt[m]{a^k \cdot a^k \cdot a^k \cdot \dots (p \text{ разъ})} = \sqrt[m]{(a^k)^p}.$$

Итакъ:

$$(\sqrt[m]{a^k})^p = \sqrt[m]{(a^k)^p}.$$

т.е. чтобы корень возвысить въ степень, нужно въ эту степень возвысить подрадикальное выраженіе, и изъ результата извлечь корень даннаго порядка.

Примеры. I. $(\sqrt[5]{x^4y^3z})^3 = \sqrt[5]{(x^4y^3z)^3} = \sqrt[5]{x^{12}y^9z^3} = x^2y\sqrt[5]{x^2y^4z^3}$.

II. $\left(\frac{3x^4}{5y} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4}{y^3}}\right)^4 = \frac{51x^{16}}{625y^4} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^{16}}{y^{20}}} = \frac{81x^{4k+5}}{625y^{10}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$.

211. Извлечение корня. Пусть требуется извлечь корень m -го порядка изъ $\sqrt[m]{A}$: положимъ, что результатъ этого дѣйствія будетъ x , т. е. что

$$\sqrt[m]{A} = x \quad . \quad . \quad (1)$$

Возвышая обѣ части равенства въ степень m и замѣчая, что извлечение m -го порядка изъ $\sqrt[m]{A}$ и возвышеніе результата въ m -ую степень, какъ два противоположныя дѣйствія, взаимно уничтожаются, найдемъ:

$$\sqrt[m]{A}^m = x^m.$$

Возвышая обѣ части этого равенства въ степень p , получимъ

$$A = x^{mp};$$

и извлекая изъ обѣихъ частей корень порядка mp , найдемъ:

$$\sqrt[mp]{A} = x.$$

Подставивъ эту величину вмѣсто x въ равенство (1), получимъ:

$$\sqrt[m]{\sqrt[mp]{A}} = \sqrt[m]{x} \quad . \quad . \quad (2).$$

Отсюда правило: чтобы извлечь корень изъ корня, нужно подкоренное количество оставить безъ переменныя и извлечь изъ него корень, котораго показателъ — произведенію показателей данныхъ корней.

Примѣры. I. $\sqrt[3]{\sqrt[6]{2ax^2}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{2ax^2}}.$

II. $\sqrt[3]{9a^4\sqrt[5]{ab^2}} = 3a^{\frac{4}{3}}\sqrt[5]{ab^2}.$

Если равенство (2) прочесть въ обратномъ порядкѣ, то найдемъ, что извлечение корня, показателъ котораго разлагается на множители, можно замѣнить последовательнымъ извлеченіемъ корней, которыхъ показатели равны этимъ множителямъ. Напр.

1) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2.$

2) $\sqrt[12]{4096a^{24}b^4x^8} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096a^{24}b^4x^8}} = \sqrt[3]{16a^6b^2x^2} = \sqrt[3]{8a^5b^2x^2} = 2a^{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{bx^2}.$

212. ТѢОРЕМА. Величина корня не измѣнится, если показателъ подкореннаго количества и показателъ корня помножить или раздѣлить на одно и то же число.

Мы видѣли, что если $\sqrt[m]{a^k}$ возвысить въ степень p , то получится $\sqrt[m]{a^{kp}}$. Извлекая изъ полученнаго выраженія корень порядка p , на основ. § 211 найдемъ $\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^{kp}}} = \sqrt[m]{a^k}$. Такъ какъ надъ выраженіемъ $\sqrt[m]{a^k}$ мы произвели два противоположныя дѣйствія, то величина его не измѣнилась, а потому

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^k}} = \sqrt[m]{a^k}.$$

Итакъ: 1) данное выражение можно замѣнить равнымъ ему: $\sqrt[m]{a^{kp}}$, т.-е. величина иррациональнаго выражения не измѣняется отъ умноженія показателей корня и подкореннаго количества на одно и то же число; 2) обратно, $\sqrt[m]{a^{kp}}$ равенъ $\sqrt[m]{a^k}$, слѣд. величина корня не измѣняется отъ раздѣленія показателей корня и подкореннаго количества на одно и то же число.

Слѣдствіе I. На первомъ изъ этихъ свойствъ основано приведеніе иррациональныхъ количествъ къ общему показателю корня. Для этого нужно составить наиб. кратное всѣхъ показателей корней; оно и будетъ общимъ показателемъ; послѣдній дѣлать на показатели каждаго корня и соотвѣтствующими частными умножать показатели корней и подкоренныхъ количествъ. При этомъ могутъ быть тѣ же случаи, какъ и при приведеніи дробей къ общему знаменателю.

1. Всѣ показатели корней числа взаимно простые, напр.

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt[3]{2ab^2}, \quad \sqrt[5]{\frac{a^2}{2cd}}$$

Общій показатель = 2 · 3 · 5 = 30; раздѣливъ его поочередно на 2, на 3 и на 5, умножимъ показатели корней и подкоренныхъ выраженій: перваго — на 15, втораго — на 10, третьяго — на 6; найдемъ:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= \sqrt[15]{a^{15}} = \sqrt[30]{a^{30}}, \\ \sqrt[3]{(2ab^2)^{10}} &= \sqrt[30]{(2ab^2)^{30}} = \sqrt[30]{2^{30} \cdot a^{30} \cdot b^{60}}, \\ \sqrt[5]{\left(\frac{a^2}{2cd}\right)^6} &= \sqrt[30]{\left(\frac{a^2}{2cd}\right)^{30}} = \sqrt[30]{\frac{a^{60}}{2^{30} c^{12} d^6}}. \end{aligned}$$

2. Одинъ изъ показателей число кратное для остальныхъ, напр.

$$\sqrt[3]{2A}, \quad \sqrt[6]{\frac{1}{3}A^2B}, \quad \sqrt[12]{C}.$$

Общій показатель корня = 12; имѣемъ:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2A} &= \sqrt[12]{(2A)^4} = \sqrt[12]{16A^4}, \\ \sqrt[6]{\frac{1}{3}A^2B} &= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{3}A^2B\right)^2} = \sqrt[12]{\frac{1}{9}A^4B^2}, \\ \sqrt[12]{C} &\text{ остается безъ перемѣн.} \end{aligned}$$

3. Показатели корней имѣютъ общихъ множителей; напр.

$$\sqrt[15]{A}, \quad \sqrt[12]{B}, \quad \sqrt[36]{C}.$$

Общій показатель = 180; получимъ:

$$\sqrt[15]{A} = \sqrt[180]{A^{12}} = \sqrt[180]{A^{12}}, \quad \sqrt[12]{B} = \sqrt[180]{B^{15}} = \sqrt[180]{B^{15}}, \quad \sqrt[36]{C} = \sqrt[180]{C^5} = \sqrt[180]{C^5}.$$

Примѣчаніе. Правила, данныя въ §§ 208 и 209 для умноженія и дѣленія корней, относятся къ случаю корней съ одинаковыми показателями; если же пока-

печь изъ него общемъ методѣ (о чемъ рѣчь будетъ ниже), рассмотримъ здѣсь частные случаи этой задачи, важные въ практикѣ.

214. Укажемъ приемы, которыми можно уничтожить ирраціональность въ знаменателѣ, содержащемъ *только квадратные корни*.

1. $\frac{a}{b \pm c}$. Умножая числитель и знаменатель на \sqrt{c} , получимъ:

$$\frac{a}{b \pm c} = \frac{a\sqrt{c}}{b(\pm c^2)} = \frac{a\sqrt{c}}{bc^2}.$$

2. $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$. Умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{b} - \sqrt{c}$, найдемъ:

$$\frac{a}{b \pm \sqrt{c}} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{(b \pm \sqrt{c})(b - \sqrt{c})} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{(b^2 - c)} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{b - c}.$$

3. $\frac{a}{m\sqrt{b} - n\sqrt{c}}$. Умножая числ. и знам. на $m\sqrt{b} + n\sqrt{c}$, получимъ:

$$\frac{a}{m\sqrt{b} - n\sqrt{c}} = \frac{a(m\sqrt{b} + n\sqrt{c})}{(m\sqrt{b})^2 - (n\sqrt{c})^2} = \frac{a(m\sqrt{b} + n\sqrt{c})}{mb - nc}.$$

4. $\frac{a}{b \pm \sqrt{c} \pm d}$. Умножая числ. и знам. на $\sqrt{b} + \sqrt{c} - d$, найдемъ:

$$\frac{a}{b \pm \sqrt{c} \pm d} = \frac{a(b + \sqrt{c} - d)}{(b \pm \sqrt{c} \pm d)(b + \sqrt{c} - d)} = \frac{a(b + \sqrt{c} - d)}{(b^2 - c)^2 - d^2}.$$

$$\frac{a(b + \sqrt{c} - d)}{b^2 + c - d + 2\sqrt{bc}}.$$

умножая оба члена этой дроби на $b + \sqrt{c} - d - 2\sqrt{bc}$, получимъ:

$$\frac{a}{b \pm \sqrt{c} \pm d} = \frac{a(b + \sqrt{c} - d)(b + \sqrt{c} - d - 2\sqrt{bc})}{(b + \sqrt{c} - d)^2 - 4bc}.$$

Общій способъ исключенія изъ знаменателя квадратныхъ корней, каково бы ни было изъ число, заключается въ слѣдующемъ. Если \sqrt{k} есть одинъ изъ радикаловъ, который мы хотимъ исключить, вынося его за скобки изъ всѣхъ членовъ, его содержащихъ; знаменатель приметъ видъ $P + Q\sqrt{k}$, гдѣ P и Q — рациональныя или ирраціональныя выраженія, не содержаща \sqrt{k} . Если теперь умножимъ оба члена дроби на $P - Q\sqrt{k}$, то новый знаменатель $P^2 - Q^2k$ уже не будетъ содержать \sqrt{k} . Такъ какъ произведенное умноженіе не вводитъ новыхъ радикаловъ, то очевидно, что применяя указанный приемъ послѣдовательно къ каждому изъ нихъ, мы исключимъ всѣ радикалы.

Этотъ именно способъ мы и прилагали въ предыдущихъ примѣрахъ; приложимъ его еще къ дроби, содержащей въ знаменателѣ пять радикаловъ:

$$\frac{m}{1/a + 1/b + 1/c + 1/d + 1/e}.$$

Умноживъ оба члена ея на $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} - \sqrt{e}$, получимъ новый знаменатель, въ которомъ f есть рациональная часть:

$$f + 2(\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt{c} + \sqrt{b}\sqrt{c}) + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})\sqrt{d} \dots (1)$$

Умножая оба члена полученной дроби на выраженіе, выведенное изъ (1) переменною \sqrt{d} на $-\sqrt{d}$, получимъ новый знаменатель, въ которомъ g представляетъ рациональную часть:

$$g - 4(f + 2c - 2d)\sqrt{a}\sqrt{b} + 4[(f + 2b - 2d)\sqrt{a} + (f + 2a - 2d)\sqrt{b}]\sqrt{c} \dots (2).$$

Помножая оба члена новой дроби на выраженіе, выведенное изъ предыдущаго переменною \sqrt{c} на $-\sqrt{c}$, получимъ новый знаменатель, котораго рациональная часть обозначена буквою h :

$$h + [8g(f + 2c - 2d) - 32c(f + 2a - 2d)(f + 2b - 2d)]\sqrt{ab} \dots (3).$$

Умножая, наконецъ, оба члена послѣдней дроби на выраженіе, выведенное изъ предыдущаго переменною \sqrt{ab} на $-\sqrt{ab}$, и означая числителя новой дроби буквою A , найдемъ

$$A = [8g(f + 2c - 2d) - 32c(f + 2a - 2d)(f + 2b - 2d)]^2 \cdot ab$$

дробь, которой знаменатель рационаленъ.

Примѣчаніе I. Взявъ, напр., дробь

$$x = \frac{1}{12 + 13\sqrt{5}}$$

и приѣмая къ ней указанный приемъ, мы должны начать исключеніе съ большаго корня, такъ какъ вычисления при этомъ будутъ проще. Умножая, поэтому, оба члена на $12 - 13\sqrt{5}$, найдемъ:

$$x = \frac{12 - 13\sqrt{5}}{216}$$

Умноживъ числитель и знаменатель на 16 , получимъ окончательно:

$$x = \frac{112 - 118\sqrt{5}}{12}$$

Примѣчаніе II. Нередко можно значительно упрощать вычисления, пользуясь слѣдующимъ замѣчаніемъ.

Выраженіе $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$, состоящее изъ четырехъ радикаловъ, разлагается на два множителя вида $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, если числа a, b, c и d составляютъ кратную пропорцію.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть напр.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k, \text{ откуда } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}} = \sqrt{k}, \text{ и слѣд. } \sqrt{a} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{k} \text{ и } \sqrt{b} = \sqrt{d} \cdot \sqrt{k}.$$

Знаменатель приметъ видъ

$$\sqrt{c} \cdot \sqrt{k} + \sqrt{d} \cdot \sqrt{k} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = \sqrt{c}(1 + \sqrt{k}) + \sqrt{d}(1 + \sqrt{k}) = (\sqrt{c} + \sqrt{d})(1 + \sqrt{k})$$

$$\text{или } \frac{1}{\sqrt{c}} (\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

Приѣмимъ это замѣчаніе къ дроби

$$x = \frac{1}{10 + 15 + 14 + 21}.$$

Такъ какъ $10 \times 21 = 15 \times 14$, то, согласно сказанному, найдемъ:

$$x = \frac{1}{(12 + 3)(15 + 7)};$$

умноживъ числ. и знам. на $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - 15)$, сразу уничтожимъ ирраціональность въ знаменателѣ, и найдемъ:

$$x = \frac{(13 - 12)(17 - 15)}{2}.$$

215. Пусть знаменатель содержитъ только радикалы *кубичные*.

1. $\frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$. Положивъ: $\sqrt[3]{a} = x$ и $\sqrt[3]{b} = y$, имѣемъ: $a = x^3$, $b = y^3$.

Взявъ разложеніе $x^3 - y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, и подставивъ вмѣсто x и y ихъ величины, найдемъ:

$$a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}),$$

откуда видно, что отъ умноженія знаменателя дроби на $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ онъ обращается въ рациональное выраженіе, равное $a + b$. Итакъ, умноживъ числ. и знам. на указанный триномъ, получимъ:

$$x = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a + b}.$$

2. $\frac{A}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$. Подобнымъ же образомъ, пользуясь разложеніемъ: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, найдемъ:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a - b}.$$

3. $\frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$. Положивъ въ равенствѣ

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

$$x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}, \text{ найдемъ:}$$

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc});$$

отсюда, умноживъ числителя и знам. данной дроби на

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc},$$

найдемъ:
$$\frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc})}{a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}}.$$

Если abc есть точный кубъ, то преобразование окончено: новый знаменатель рационализированъ; если же abc не есть точный кубъ, то представивъ знаменатель въ видѣ

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^3 - 27abc},$$

и свести вопросъ къ предыдущему случаю.

4. $\frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}}$, съ условіемъ, что $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Не трудно убѣдиться, что знаменатель можно представить въ видѣ произведенія двухъ множителей $\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, и вопросъ приводится къ примѣру 1.

216. Если знаменатель дроби есть сумма или разность двухъ радикаловъ того же порядка, то ихъ можно привести къ общему показателю корня; такимъ образомъ знаменатель будетъ вида $\sqrt[m]{a} \pm \sqrt[m]{b}$. Отсюда два случая:

I. $\frac{A}{\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}}$. Положивъ $\sqrt[m]{a} = x$ и $\sqrt[m]{b} = y$, откуда $a = x^m$ и $b = y^m$, и замѣчая, что при всякомъ m — четномъ или нечетномъ, имѣемъ:

$$x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \dots + xy^{m-2} + y^{m-1}),$$

подставивъ сюда вмѣсто x и y ихъ величины, найдемъ:

$$a - b = (\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}} + \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \sqrt[m]{a^{m-3}b^2} + \dots + \sqrt[m]{ab^{m-2}} + \sqrt[m]{b^{m-1}}).$$

Это равенство показываетъ, что если числит. и знам. данной дроби помножимъ на $\sqrt[m]{a^{m-1}} + \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \dots + \sqrt[m]{b^{m-1}}$, то знаменатель обратится въ рациональное выраженіе $a - b$; такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{A}{\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}} = \frac{A(\sqrt[m]{a^{m-1}} + \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \sqrt[m]{a^{m-3}b^2} + \dots + \sqrt[m]{b^{m-1}})}{a - b}.$$

II. $\frac{A}{\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}}$. Если m — число четное, то замѣчая, что разность одинаковыхъ

четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на сумму первыхъ степеней, имѣемъ:

$$x^m - y^m = (x + y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \dots - y^{m-1}).$$

Подставляя сюда $\sqrt[m]{a}$ вмѣсто x , и $\sqrt[m]{b}$ вмѣсто y , дадимъ равенству видъ:

$$a - b = (\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \sqrt[m]{a^{m-3}b^2} - \dots - \sqrt[m]{b^{m-1}}).$$

Откуда видно, что для уничтоженія иррациональности въ знаменателѣ дроби надо оба члена ея помножить на $\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \dots - \sqrt[m]{b^{m-1}}$. Сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{A}{\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}} = \frac{A(\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \dots - \sqrt[m]{b^{m-1}})}{a - b}.$$

Если m — число нечетное, то припоминая, что сумма одинаковых нечетных степеней двух количеств дѣлится на сумму первых степеней, имѣемъ равенство:

$$x^m + y^m = (x + y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 - \dots + y^{m-1});$$

положивъ въ немъ $x = \sqrt[m]{a}$ и $y = \sqrt[m]{b}$, имѣемъ:

$$a + b = (\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \sqrt[m]{a^{m-3}b^2} - \dots + \sqrt[m]{b^{m-1}}).$$

Отсюда слѣдуетъ, что для уничтоженія ирраціональности въ знаменателѣ данной дроби, при m нечетномъ, надо оба ея члена умножить на $\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \dots + \sqrt[m]{b^{m-1}}$; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{1}{\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \dots + \sqrt[m]{b^{m-1}}}{a + b}.$$

Примѣръ. $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}}$. Приводя корни къ общему показателю 6, получимъ дробь

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2}}.$$

Множитель, обращающій знаменатель въ выраженіе рациональное, въ данномъ случаѣ есть

$$\sqrt[6]{(a^3)^3} - \sqrt[6]{(a^3)^2 b^2} + \sqrt[6]{(a^3)(b^2)^2} - \sqrt[6]{(a^3)^2 (b^2)^3} + \sqrt[6]{a^3 (b^2)^4} - \sqrt[6]{(b^2)^5}, \text{ или } \\ \sqrt[6]{a^9} - \sqrt[6]{a^6 b^2} + \sqrt[6]{a^3 b^4} - \sqrt[6]{a^6 b^2} + \sqrt[6]{a^3 b^4} - \sqrt[6]{b^6}.$$

Умноживъ имъ числитель и знаменатель дроби, получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a^9} - \sqrt[6]{a^6 b^2} + \sqrt[6]{a^3 b^4} - \sqrt[6]{a^6 b^2} + \sqrt[6]{a^3 b^4} - \sqrt[6]{b^6}}{a^3 - b^3}.$$

217. Въ заключеніе этой главы приведемъ нѣсколько примѣровъ дѣйствій надъ ирраціональными выраженіями.

1. Проверить равенство:

$$\sqrt{\frac{a + 1 a^2}{2} b} + \sqrt{\frac{a - 1 a^2}{2} b} = \sqrt{a} + \sqrt[3]{b}.$$

Проверка равенства двухъ данныхъ выраженій, которыя > 0 , приводится къ проверкѣ равенства ихъ квадратовъ, т.-е. что

$$\frac{a + 1 a^2 + b}{2} + \frac{a - 1 a^2 + b}{2} + 2 \sqrt{\frac{a^2 - (a^2 - b)}{4}} = a + \sqrt[3]{b},$$

или что $a + \sqrt[3]{b} = a + \sqrt[3]{b}.$

Но это равенство вѣрно; слѣд. вѣрно и предложенное.

2. Упростить выражение:

$$\frac{\sqrt[3]{x^4} \sqrt[3]{x^2 y^2} - 2 \sqrt[3]{x^3 y}}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x y^3} - \sqrt[3]{x^2 y} - \sqrt[3]{y^4}}.$$

Это выражение можно представить въ видѣ

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - 2 \sqrt[3]{xy})}{(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{y^4} - \sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{x^2}))}.$$

или

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2}{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{xy})}.$$

или, по сокращеніи на $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{xy})}.$$

т.-е.

$$\frac{x - \sqrt[3]{x^2 y}}{x + y}.$$

3. Разложить на множители выражение:

$$\sqrt[3]{a^2 b^4} - \sqrt[3]{b^2 a^4} = \sqrt[3]{a^2 b^4} - \sqrt[3]{c^2 a^4} = (\sqrt[3]{b^4 a^2} - \sqrt[3]{c^4 a^2} + \sqrt[3]{a^4 b^2}).$$

Намъ вѣстъ изъ выразенія (уравненія) Р имѣемъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt[3]{a^2 b^4} (\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2}) - \sqrt[3]{c^2} (\sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{b^4}) - \sqrt[3]{c^4} (\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2}) \\ &= (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}) \{ \sqrt[3]{c^2} (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}) - \sqrt[3]{a^2 b^2} - \sqrt[3]{c^4} \} \\ &= (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}) \{ \sqrt[3]{c^2} (\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{c^2}) - \sqrt[3]{a^2} (\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{c^2}) \} \\ &= (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}) (\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{c^2}) (\sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{a^2}). \end{aligned}$$

Примѣчаніе. Индусамъ уже были извѣстны методы извлеченія корней — квадратнаго и кубическаго. — *Омаръ Алхайями* (середина XI вѣка) доказалъ точность этихъ методовъ и указалъ приемы для нахожденія корней высшихъ порядковъ. Правила дѣйствія надъ коренными количествами находимъ уже въ арифметикѣ *Алькальи* (+1477).

ГЛАВА XVI.

Степени и корни съ дробными и отрицательными показателями.

Дробные показатели.

218. Происхожденіе степеней съ дробными показателями. — Для извлеченія корня изъ степени надо показатель подкореннаго количества раздѣлить на показатель корня; такимъ образомъ: $\sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}} = a^5$. Но если показатель под-

коренного количества не дѣлится на показателя корня, какъ напр. въ случаѣ $\sqrt[3]{a^2}$, то, примѣняя указанное правило, мы найдемъ выраженіе $a^{\frac{2}{3}}$, не имѣющее смысла степени какъ произведенія множителей, равныхъ основанію a ; въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что нельзя a повторить множителемъ $\frac{2}{3}$ раза. Однако, вполнѣ позволятельно допускать подобныя выраженія, если только подъ ними разумѣть ничто иное какъ новый особый способъ изображать ирраціональныя выраженія. Такимъ образомъ пишутъ: $a^{\frac{2}{3}}$ вмѣсто $\sqrt[3]{a^2}$, $a^{\frac{1}{2}}$ вмѣсто \sqrt{a} , $a^{\frac{5}{7}}$ вмѣсто $\sqrt[7]{a^5}$ и т. д. Вообще, выраженіе a^n есть ничто иное какъ $\sqrt[n]{a^m}$, и называется количествомъ съ дробнымъ показателемъ. Итакъ: количество съ дробнымъ показателемъ есть корень, показатель котораго равенъ знаменателю дробнаго показателя, изъ количества въ степени, равной числителю дробнаго показателя.

Условное обозначеніе ирраціональных выраженій въ видѣ дробныхъ степеней, рѣспространяя правило показателей при извлеченіи корня и на тотъ случай, когда показатель подрадикальнаго количества не дѣлится на показателя корня, т.-е. обобщая это правило, вполнѣ соответствуетъ духу алгебры, стремящейся къ обобщеніямъ.

Разсматривая правила дѣйствій надъ дробными степенями, мы придемъ къ тому важному заключенію, что правила эти остаются тѣми же самыми, какія мы нашли раньше для показателей цѣлыхъ. Обстоятельство это, говоритъ Лакруа въ своей алгебрѣ, «служить однимъ изъ замѣчательнѣйшихъ примѣровъ пользы анаковъ, когда они удачно выбраны. Чѣмъ дальше мы подвигаемся въ алгебрѣ, тѣмъ болѣе узнаемъ безчисленныя выгоды, какія повело за собою введеніе показателей...»

Дробные показатели были введены Ньютономъ.

219. Теорема. *Два дробныхъ степени равны, если показатели ихъ равны;* т.-е. если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$.

Дѣйствительно, по опредѣленію степени съ дробнымъ показателемъ имѣемъ:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ и } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Приводя корни къ общему показателю, найдемъ

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \dots (1) \text{ и } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}} \dots (2);$$

но изъ условія $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ имѣемъ: $mq = np$, слѣд. вторыя части равенствъ (1) и (2) равны, а потому равны и первыя. Итакъ

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

220. Умноженіе. Умножить $a^{\frac{m}{n}}$ на $a^{\frac{p}{q}}$. По опредѣленію дробныхъ степеней имѣемъ

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ и } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p};$$

статья $a^m \times a^n = \sqrt[q]{a^m} \times \sqrt[q]{a^n} = \sqrt[q]{a^{mq}} \times \sqrt[q]{a^{nq}} = \sqrt[q]{a^{mq+nq}}$ (по приведении корней къ общему показателю). Такъ какъ nq , mq и $nq+nq$ — числа цѣлыя и положительныя, то при этомъ правилѣ — умноженія корней и степеней, доказанныя для такихъ показателей, получимъ:

$$\sqrt[q]{a^{mq}} \times \sqrt[q]{a^{nq}} = \sqrt[q]{a^{mq+nq}}.$$

Такъ какъ nq и $mq+nq$ — цѣлыя положительныя числа, то раздѣливъ въ первомъ выраженіи показатель подкореннаго количества на показателя корня, найдемъ:

$$\sqrt[q]{a^{mq+nq}} = a^{\frac{mq+nq}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{nq}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Итакъ:

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \dots (1).$$

Положивъ въ этомъ равенствѣ сперва $n=1$, потомъ $q=1$ (на что имѣемъ право, такъ какъ n и q — цѣлыя положительныя числа) найдемъ, въ первомъ случаѣ:

$$a^m \times a^{\frac{p}{q}} = a^{m + \frac{p}{q}} \dots (2).$$

а во второмъ

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^p = a^{\frac{m}{n} + p} \dots (3).$$

Равенства (1), (2) и (3) показываютъ, что: *будутъ ли оба показателя простые, или одинъ цѣлый, а другой дробный, при умноженіи степеней одного и того же основанія показатели складываются.*

Такъ: 1) $a^3 \times a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{1} + \frac{1}{5}} = a^{\frac{16}{5}}$, 2) $a^3 \times a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{3}{1} + \frac{2}{5}} = a^{\frac{17}{5}}$.

221. Дѣленіе. Раздѣлить $a^{\frac{m}{n}}$ на $a^{\frac{p}{q}}$, полагая, что $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$.

Послѣдовательно имѣемъ:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{\frac{mq}{n}}} : \sqrt[q]{a^{\frac{pq}{q}}} = \sqrt[q]{a^{\frac{mq}{n}}} : \sqrt[q]{a^{pq}} = \sqrt[q]{a^{\frac{mq}{n}} : a^{pq}} = \sqrt[q]{a^{\frac{mq}{n} - pq}}.$$

II. приведеніи обѣихъ частей неравенства $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$ къ общему знаменателю,

получимъ $\frac{mq}{nq} > \frac{pq}{nq}$, откуда: $mq > np$, а слѣдовательно разность $mq - np$ положительна. Въ при цѣлыхъ положительныхъ показателяхъ имѣемъ

$$\sqrt[q]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

Итакъ

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} \dots (1).$$

Положивъ $n=1$, находимъ изъ этого равенства:

$$a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^{m - \frac{p}{q}} \dots (2).$$

Положивъ въ равенствѣ (1) $q = 1$, найдемъ:

$$a^{\frac{n}{m}} : a^p = a^{\frac{m}{n}-p} \dots (3)$$

Равенства (1), (2) и (3) доказываютъ, что правило показателей при дѣленіи, доказанное первоначально для цѣлыхъ показателей, остается справедливымъ и тогда, когда оба или одинъ изъ показателей — числа дробныя.

Примѣръ: $a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{2} - \frac{5}{6}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}}$.

222. Возвышеніе въ степень. Пусть требуется a^n возвысить въ степень порядка $\frac{p}{q}$, т.-е. опредѣлить $(a^n)^{\frac{p}{q}}$. Заменяя каждую изъ степеней съ дробнымъ показателемъ — корнями, получимъ.

$$a^{\frac{n \cdot p}{q}} = (a^n)^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{n}{q}})^p = \sqrt[q]{a^{\frac{n}{q}}}^p = \sqrt[q]{a^{np}}.$$

Такъ какъ показатели nq и mp — числа цѣлыя и положительныя, то $\sqrt[q]{a^{np}} = a^{\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$. Слѣд.

$$(a^{\frac{n}{q}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} \dots (1).$$

Полагая сперва $q = 1$, а затѣмъ $n = 1$, найдемъ:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n} \cdot p} \dots (2); \text{ и } (a^m)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} \dots (3).$$

Отсюда слѣдуетъ, что правило показателей при возвышеніи въ степень, введенное въ § 104 для показателей цѣлыхъ, распространяется и на тѣ случаи, когда одинъ или оба показателя — дробныя.

Примѣръ. $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}} = a^{\frac{5}{8}}$.

223 Возвышеніе въ дробную степень произведенія и дроби.

$$1. (A/B)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\frac{A}{B}}^p = \sqrt[q]{\frac{A^p}{B^p}} = \frac{\sqrt[q]{A^p}}{\sqrt[q]{B^p}} = \frac{A^{\frac{p}{q}}}{B^{\frac{p}{q}}}. \text{ Заключаемъ, что для возвышенія}$$

дроби въ дробную степень нужно отдѣльно возвысить въ данную степень числителя и знаменателя и первый результатъ раздѣлить на второй: то же самое правило, что и для возвышенія дроби въ цѣлую степень.

2. $(A \cdot B)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(AB)^p} = \sqrt[q]{A^p B^p} = \sqrt[q]{A^p} \cdot \sqrt[q]{B^p} = A^{\frac{p}{q}} \cdot B^{\frac{p}{q}}$, слѣд. правило возвышенія произведенія въ дробную степень — такое же какъ и въ цѣлую степень.

224. Извлеченіе корня. Пусть требуется извлечь корень порядка $\frac{p}{q}$ изъ

$a^{\frac{n}{m}}$ т.-е. найти $\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{n}{m}}}$. Распространяя опредѣленіе корня и на этотъ случай,

и выходя под корнем порядка $\frac{p}{q}$ из $a^{\frac{m}{n}}$ разуметь такое количество, которое, будучи возвышено в степень порядка $\frac{p}{q}$, давало бы $a^{\frac{m}{n}}$. Согласно этому определению, назвав искомый корень буквою x , т.-е. положив

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}} = x \dots (1)$$

найдем, что $x^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$, откуда, возвышая обе части в степень $\frac{q}{p}$, получим: $x = a^{\frac{mq}{np}}$, или $x = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$. Подставив в равенство (1) вместо x найденное выражение, получим:

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} \dots (2)$$

Полагая здесь сначала $q = 1$, а потом $n = 1$, имеем:

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} \dots (3); \sqrt[\frac{p}{q}]{a^m} = a^{m \cdot \frac{p}{q}} \dots (4)$$

Таким образом, будут ли показатели — корня и подкоренного количества оба дробные, или один — целый, а другой — дробный, надо для извлечения корня — показатель подкоренного количества разделить на показатель корня.

$$\text{Примеръ. } \sqrt[3]{a^{\frac{5}{7}}} = a^{\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{21}}.$$

225. Корень дробнаго порядка изъ произведенія, дроби и корня съ дробнымъ показателемъ.

$$\begin{aligned} 1. \sqrt[\frac{p}{q}]{A \cdot B} &= \sqrt[\frac{p}{q}]{(AB)^1} = (AB)^{\frac{1}{q} \cdot \frac{p}{p}} (\S 224, 4) = (AB)^{\frac{1}{q}} = A^{\frac{1}{q}} \cdot B^{\frac{1}{q}} (\S 223, 2) \\ &= A^{\frac{1}{q} \cdot \frac{p}{p}} \cdot B^{\frac{1}{q} \cdot \frac{p}{p}} = \sqrt[\frac{p}{q}]{A} \times \sqrt[\frac{p}{q}]{B} (\S 224, 4). \end{aligned}$$

Заключаемъ, что правило извлечения корня дробнаго порядка изъ произведенія такое же точно какъ и корня съ целымъ показателемъ.

$$2. \sqrt[\frac{p}{q}]{\frac{A}{B}} = \sqrt[\frac{p}{q}]{A \cdot B^{-1}} = \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{q} \cdot \frac{p}{p}} = \frac{A^{\frac{1}{q}}}{B^{\frac{1}{q}}} (\S 223, 1) = A^{\frac{1}{q} \cdot \frac{p}{p}} : B^{\frac{1}{q} \cdot \frac{p}{p}} = \frac{\sqrt[\frac{p}{q}]{A}}{\sqrt[\frac{p}{q}]{B}}.$$

$$3. \sqrt[\frac{m}{n}]{\sqrt[\frac{p}{q}]{A^k}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{A^{\frac{k}{q} \cdot \frac{p}{p}}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{A^{\frac{kp}{q}}} = A^{\frac{kp}{q} \cdot \frac{n}{n}} = A^{\frac{kpn}{q}} = A^{k \cdot \frac{mp}{nq}} = \sqrt[\frac{mp}{nq}]{A^k} (\S 224);$$

и въ этомъ случаѣ для извлечения корня изъ корня нужно показатели корней перемножить.

Итакъ, всѣ правила, доказанныя для показателей цѣлыхъ, распространяются и на дробные показатели. Замѣняя радикалы дробными показателями, мы получаемъ возможность совершать преобразованія ирраціональныхъ выраженій по тѣмъ же правиламъ, какія имѣемъ для выраженій рациональныхъ, а это ведетъ къ упрощенію вычисленій и болѣе быстрому полученію результатовъ.

226. Приведимъ примѣры преобразованій выраженій съ дробными показателями.

I. Упростить выраженіе

$$\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вынося въ первыхъ скобкахъ общаго множителя $a^{\frac{4}{3}}$, а во вторыхъ $b^{\frac{4}{3}}$, имѣемъ:

$$\left[a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}};$$

возвышая каждого множителя отдѣльно въ степень $\frac{1}{2}$, находимъ:

$$a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

взявъ общимъ множителемъ $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$, имѣемъ

$$\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right);$$

или, выполнивъ умноженіе:

$$\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

II. Проверить равенство

$$2^{\frac{1}{2}}\left[2a + (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left[a - (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = (a + b)^{\frac{3}{2}} - (a - b)^{\frac{3}{2}}.$$

Для облегченія повѣрки положимъ:

$$x = a + b \quad . \quad . \quad (1) \quad \text{и} \quad y = a - b \quad . \quad . \quad (2).$$

Сложивъ эти равенства, получимъ:

$$2a = x + y, \text{ а отсюда } a = \frac{x + y}{2};$$

перемноживъ (1) со (2), найдемъ

$$a^2 - b^2 = xy, \text{ откуда } (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} = (xy)^{\frac{1}{2}}.$$

Первая часть данного равенства послѣ подстановки приметъ видъ:

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{2}} \cdot [x + y - (xy)^{\frac{1}{2}}] \cdot \left[\frac{x + y - 2(xy)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} - \\ [x + y - (xy)^{\frac{1}{2}}] \cdot [x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} - \\ [x + y + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}] \cdot [x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}] - x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} = \\ (a + b)^{\frac{3}{2}} - (a - b)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

что и требовалось найти.

Отрицательные показатели.

227. Въ § 41 мы нашли, что $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, но та же формула эта установлена была для случая m цѣлаго. Если въ равенствѣ

$$a^m : a^p = a^{m-p},$$

предположимъ въ § 221 при условіи $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, условіе не дѣлать послѣдняго показателя n и q общимъ знаменателемъ, то m и p обратятся въ a^q или въ 1, а самое равенство въ 1: $a^{\frac{1}{q}} = a^{-\frac{1}{q}}$. Итакъ

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}},$$

т.е. степень съ отрицательнымъ дробнымъ показателемъ равна единицѣ, дѣленной на то же основаніе съ положительнымъ показателемъ, равнымъ по абсолютной величинѣ отрицательному. Такимъ образомъ, будетъ ли m — цѣлое или дробное, всегда имѣемъ:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Отрицательные показатели даютъ возможность изображать дробь въ формѣ цѣлаго выраженія (безъ знаменателя). Такъ дробь $\frac{5a^2b^3}{c^5d^7}$ можно написать въ видѣ $5a^2b^3 \cdot \frac{1}{c^5} \cdot \frac{1}{d^7}$; замѣтивъ, что $\frac{1}{c^5} = c^{-5}$ и $\frac{1}{d^7} = d^{-7}$, найдемъ, что

$$\frac{5a^2b^3}{c^5d^7} = 5a^2b^3c^{-5}d^{-7}.$$

Такимъ образомъ, чтобы дробь представить безъ знаменателя, надо всѣ множители знаменателя перенести въ числитель съ отрицательными показателями.

Наоборотъ, всѣ множители числителя можно перенести въ знаменатель, написавъ ихъ съ отрицательными показателями; въ самомъ дѣлѣ, напр.

$$\frac{a^2b}{c^3d^5} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c^3d^5} = \frac{1}{a^{-2}b^{-1}c^3d^5}.$$

Перейдемъ теперь къ изученію дѣйствій надъ количествами съ отрицательными показателями.

228. Умноженіе. 1. Пусть требуется помножить a^p на a^{-q} ; замѣтивъ, что $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$, получимъ:

$$a^p \cdot a^{-q} = a^p \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{a^p}{a^q};$$

такъ какъ p и q —числа положительные, то, будучь ли они цѣлыя или дробныя, нужно при раздѣленіи a^p на a^q вычесть q изъ p ; слѣд.

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = a^{p+(-q)}, \text{ слѣдовательно}$$

$$a^p \cdot a^{-q} = a^{p+(-q)},$$

т.-е. *показатель произведенія равенъ алгебраической суммѣ показателей множимаго и множителя.*

2. Пусть оба показателя—отрицательны; найдемъ:

$$a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p+(-q)} = a^{-p} \cdot a^{-q};$$

то же самое заключеніе, что и въ предыдущемъ случаѣ.

229. Дѣленіе. 1. Пусть будетъ одинъ изъ показателей — положительный, а другой — отрицательный.

$$a^{-p} : a^{-q} = \frac{1}{a^p} : \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^{-q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p+(-q)} = a^{-p} \cdot a^{-q},$$

т.-е. изъ показателя дѣлимаго вычитается показатель дѣлителя.

$$2. a^{-p} : a^{-q} = \frac{1}{a^p} : \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p} \cdot a^q = a^{q-p} = a^{-p+q} = a^{-p+(-(-q))}; \text{ то же заключеніе.}$$

230. Возвышеніе въ степень. 1. $(a^{-m})^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{(a^m)^m}$ по правилу возвышенія дроби въ положительную степень; далѣе: $\frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{m \cdot n}} = a^{-m \cdot n} = a^{-m \cdot n}.$

$$2. (a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{m \cdot n}} = a^{-m \cdot n} = a^{-m \cdot n}.$$

$$3. (a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{m \cdot n}}} = a^{m \cdot n} = a^{-m \cdot (-n)}.$$

Всѣ три результата приводятъ къ общему заключенію: при возвышеніи степени въ новую степень показатели перемножаются, будутъ ли они цѣлыя или дробныя, положительныя или отрицательныя.

231. Возвышеніе въ отрицательную степень произведенія и дроби.

$$1 \quad A \cdot B^{-m} = \frac{1}{(AB)^m} = \frac{1}{A^m \cdot B^m} = \frac{1}{A^m} \cdot \frac{1}{B^m} = A^{-m} \cdot B^{-m}.$$

Следовательно, что для возвышенія въ отрицательную степень (цѣлую или дробную) произведенія нужно отдѣльно возвысить въ эту степень каждого множителя и результаты перемножить.

$$\frac{1}{B^m} = \frac{1}{A^{-m}} \cdot \frac{1}{B^m} = \frac{A^{-m}}{B^{-m}}, \text{ по перенесеніи } A^{-m} \text{ въ числителя, в}$$

знаменателя. Заключение: для возвышенія дроби въ отрицательную степень нужно возвысить въ эту степень отдѣльно числителя и знаменателя, и первый результатъ раздѣлить на второй.

232 Извлеченіе корня. I. Пусть требуется извлечь корень положительнаго показателя съ отрицательнымъ показателемъ: $\sqrt[m]{a^{-p}}$, гдѣ m и p — цѣлыя или дробныя числа. Имѣемъ:

$$\sqrt[m]{a^{-p}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^p}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^p}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{m}}} = a^{-\frac{p}{m}} = a^{\frac{-p}{m}}, \text{ т.-е. показатель подкореннаго ко-}$$

нителя нужно раздѣлить на показатель корня

2. Рассмотрим теперь извлеченіе корня съ отрицательнымъ показателемъ. Имѣемъ корня, данное для цѣлаго положительнаго показателя и распространяемъ его на корень дробнаго порядка, распространяя и на корни отрицательнаго порядка. Такимъ образомъ, корнемъ минусъ m -го порядка изъ A называется количество, которое по возвышеніи въ минусъ m -ую степень даетъ A ; согласно этому опредѣленію:

$$\text{если } \sqrt[m]{A} = B, \text{ то } B^{-m} = A.$$

Докажемъ, что

$$\sqrt[m]{A} = \frac{1}{\sqrt[m]{A^{-1}}}$$

т.-е. что корень съ отрицательнымъ показателемъ равенъ единицѣ, раздѣленной на корень съ тѣмъ же по величинѣ, но положительнымъ показателемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\sqrt[m]{A} = x$; по опредѣленію корня найдемъ: $x^{-m} = A$, или $\frac{1}{x^m} = A$, откуда $x^m = \frac{1}{A}$, а извлекая изъ обѣихъ частей корень m -го (положительнаго) порядка, получимъ:

$$x = \sqrt[m]{\frac{1}{A}} = \frac{1}{\sqrt[m]{A}}, \text{ и требуемое доказано.}$$

Пусть теперь требуется извлечь корень $(-m)$ -ой степени изъ a^p , гдѣ p — положительное; въ силу только что доказаннаго предложенія имѣемъ:

$$\sqrt[m]{a^p} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^{-p}}} = \frac{1}{a^{\frac{-p}{m}}} = a^{\frac{p}{m}}, \text{ т.-е. и въ этомъ случаѣ показатель под-}$$

кореннаго количества надо раздѣлить на показатель корня.

Пусть, наконецъ, оба показателя отрицательны; найдемъ, что

$$\sqrt[m]{a^{-p}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^p}}; \text{ но } \sqrt[m]{a^{-p}} = a^{-\frac{p}{m}} \text{ (§ 232,1); следовательно}$$

$$\sqrt[m]{a^{-p}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{m}}} = a^{-\frac{p}{m}}; \text{ прежнее заключеніе.}$$

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ, при извлеченіи корня нужно показатель подрадикальнаго количества дѣлить на показатель корня, будутъ ли оба показателя — цѣлые или дробные, положительные или отрицательные.

$$\text{Напр. } \sqrt[3]{a^{-\frac{3}{4}}} = a^{-\frac{3}{4} : 3} = a^{-\frac{1}{4}}.$$

233. Извлеченіе корня отрицательнаго порядка изъ произведенія, дроби и корня съ отрицат. или положит. показателемъ.

$$1. \sqrt[m]{\sqrt[n]{AB}} = \sqrt[m]{\frac{1}{\sqrt[n]{AB}}} = \sqrt[m]{\frac{1}{\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B}}. \text{ Но, по доказанному,}$$

$$\frac{1}{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[-m]{A} \text{ и } \frac{1}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[-m]{B}, \text{ слѣд.}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{AB}} = \sqrt[-m]{A} \times \sqrt[-m]{B},$$

т.-е. для извлеченія корня отрицательнаго порядка изъ произведенія нужно извлечь его отдѣльно изъ cadaго производителя и результаты перемножить.

$$2. \sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \sqrt[m]{\frac{A^1}{B^1}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{A^{\frac{1}{m}}}{B^{\frac{1}{m}}} = \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}$$

(по §§ 231,2 и 232,2). Итакъ

$$\sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}},$$

т.-е. для извлеченія корня отрицательнаго порядка изъ дроби нужно извлечь его отдѣльно изъ числителя и знаменателя, и первый раздѣлить на второй.

3. Пусть, наконецъ, требуется извлечь корень $(-m)$ -го порядка изъ $\sqrt[p]{A^k}$.
 $\sqrt[-m]{\sqrt[p]{A^k}} = \sqrt[-m]{A^{\frac{k}{p}}} = A^{-\frac{k}{p} : m} = A^{-\frac{k}{mp}} = \sqrt[m]{A^{-\frac{k}{p}}} = \sqrt[p]{A^{\frac{k}{m}}} = (-m) \sqrt[p]{A^{\frac{k}{m}}}, \text{ т.-е. пока-}$

затели корней слѣдуетъ перемножать.

Итакъ, всѣ правила, относящіяся къ вычисленіямъ надъ количествами съ положительными показателями, относятся и къ отрицательнымъ показателямъ.

Отрицательные показатели были введены раньше дробныхъ; въ введеніе приписываютъ Михаилу Стифелю (1509—1567).

ГЛАВА XVII.

Замѣчательныя формы алгебраическихъ выраженій.

Формы. $\frac{0}{m}, \frac{m}{0}, \frac{m}{\infty}, \frac{\infty}{m}, \frac{0}{0}, 0 \times \infty, \infty \cdot \infty - \infty$. — Раскрытіе неопредѣленностей.

234. Въ силу общности алгебраическихъ формулъ онѣ могутъ представлять замѣчательныя формы при частныхъ предположеніяхъ относительно количествъ, входящихъ въ составъ ихъ. Займемся изученіемъ этихъ особыхъ, замѣчательныхъ формъ.

I. Форма: $\frac{0}{m}$.

235. Численная величина алгебраическаго выраженія равна нулю, если оно является въ видѣ частнаго отъ раздѣленія нуля на конечное количество отличное отъ нуля. Такимъ образомъ, если m есть конечное количество, отличное отъ нуля, то

$$\frac{0}{m} = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію частнаго, оно есть такое количество, которое, по умноженіи на дѣлителя, даетъ дѣлимое; но только нуль, умноженный на количество отличное отъ нуля, можетъ дать въ произведеніи нуль.

Примѣръ. — Дробь

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 5}$$

при $x = 2$ обращается въ нуль; въ самомъ дѣлѣ, подставляя вмѣсто x число 2, находимъ $\frac{0}{9}$, т.-е. 0.

II. Форма: $\frac{m}{0}$.

236. Численная величина алгебраическаго выраженія равна безконечности, если оно является въ видѣ частнаго отъ раздѣленія числа отличнаго отъ нуля на нуль.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ дробь $\frac{m}{x}$, которой числитель m есть нѣкоторое конечное число отличное отъ нуля, станемъ уменьшать ея знаменателя, неограниченно приближая его къ нулю: дробь будетъ безпредѣльно возрастать.

$\frac{1}{1} = 1$ Такъ, дѣля 1 послѣдовательно на 1, на $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$
 $\frac{1}{10} = 10$ Будемъ въ частномъ получать: 1, 10, 100, 1000, ..., т.-е. числа
 $\frac{1}{100} = 100$ возрастающія, такъ что когда численная величина знаменателя
 $\frac{1}{1000} = 1000$ будетъ меньше всякой величины, т.-е. 0, то численная величина

и т. д. дроби будетъ больше всякой величины, т.-е. будетъ безконечно-велика.

Такъ какъ безконечность не можетъ быть выражена никакимъ числомъ, то для письменнаго изображенія ея необходимъ особый знакъ; такимъ знакомъ служить ∞ . Итакъ

$$\frac{m}{0} = \infty,$$

если m отлично отъ нуля.

Знакъ ∞ предложенъ Валлисомъ въ XVII столѣтїи.

Примѣчаніе. Иногда говорятъ, что $\frac{m}{0}$ есть символъ *невозможности*; это нужно понимать такъ, что невозможно найти никакого *конечнаго* числа, которое, будучи помножено на нуль, давало бы m . И въ самомъ дѣлѣ, всякое конечное число, помноженное на 0, даетъ нуль.

Примѣръ. Дробь

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x - 4}$$

обращается въ ∞ , если положить $x = 4$; въ самомъ дѣлѣ, тогда получимъ $\frac{17}{0}$ или ∞ .

Когда числитель и знаменатель дроби имѣютъ одинаковые знаки, то при постепенномъ уменьшеніи численной величины знаменателя до нуля дробь будетъ оставаться положительною, и потому она стремится къ *положительной безконечности*. Если же числитель и знаменатель имѣютъ разные знаки, то по мѣрѣ приближенія знаменателя къ нулю дробь стремится къ *отрицательной безконечности*. Положительная безконечность изображается знакомъ $+\infty$, отрицательная — знакомъ $-\infty$. Такъ, если въ дроби $\frac{x-2}{x-3}$, x , будучи больше 3, приближается къ 3, то $x - 3$ будетъ оставаться величиною положительною; а потому, когда x , въ концѣ своего измѣненія, обратится въ 3, дробь обратится въ $+\infty$. Если же x , будучи меньше 3, приближается къ 3, то разность $x - 3$ все время будетъ оставаться отрицательною; а потому, когда x достигнетъ своего предѣла 3, дробь обратится въ $-\infty$. Но дробь $\frac{x^2 + 2}{(x-1)^2}$ будетъ ли x приближаться къ 1 уменьшаясь, или увеличиваясь, въ обоихъ случаяхъ при $x = 1$ обращается въ $+\infty$, потому что и въ томъ и въ другомъ случаѣ ея числитель и знаменатель остаются положительными.

$$\text{III. Формы: } \frac{\infty}{m} \text{ и } \frac{m}{\infty}.$$

237. Частное отъ раздѣленія безконечности на конечное количество—есть безконечность; т.-е.

$$\frac{\infty}{m} = \infty,$$

если m конечно.

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію частнаго,—это послѣднее, будучи умножено на конечное количество m , должно дать безконечность; но никакое конечное количество, умноженное на конечное m , не можетъ дать безконечности; поэтому частное—безконечно велико.

238. Частное от раздѣленія конечнаго количества на безконечно-большое равно нулю; т.-е.

$$\frac{m}{\infty} = 0,$$

если m конечно.

Въ самомъ дѣлѣ, если дѣлимое конечно, то при неограниченномъ возрастаніи дѣлителя частное неограниченно приближается къ нулю, сл. при безконечно-большомъ дѣлителѣ численная величина частнаго будетъ нуль.

239. Чистное отъ раздѣленія нуля на безконечность есть ноль, а частное отъ раздѣленія безконечности на нуль есть безконечность; т.-е.

$$\frac{0}{\infty} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\infty}{0} = \infty.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{0}{\infty}$ есть 0 по двойной причинѣ: съ одной стороны потому, что числитель = 0 (§ 235), съ другой потому, что знаменатель равенъ безконечности (§ 238). — Подобнымъ же образомъ убѣдимся и въ томъ, что $\frac{\infty}{0} = \infty$.

240. ТЕОРЕМА. Численная величина ивлана по буквѣ x полинома съ конечными коэффициентами, — конечна при x конечномъ, и безконечно-велика при x безконечномъ.

Пусть имѣемъ полиномъ

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

цѣлый относительно x , съ конечными коэффициентами a, b, c, d, e , причѣмъ a отличенъ отъ нуля; понятно, что при всякомъ конечномъ значеніи x каждый членъ полинома конеченъ, а алгебраическая сумма конечнаго числа конечныхъ слагаемыхъ конечна.

Пусть теперь x будетъ безконечно-велико: вынеся x^4 за скобки, дадимъ полиному видъ

$$x^4 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + \frac{e}{x^4} \right);$$

такъ какъ $x \rightarrow \infty$ каждый изъ членовъ въ скобкахъ, содержащихъ x въ знаменателѣ, стремится въ 0 (§ 238), такъ что въ скобкахъ останется a ; поэтому произведеніе т.-е. данный полиномъ, обращается въ $a \times \infty$, т.-е. представляетъ произведеніе конечнаго числа a , отличнаго отъ нуля, на безконечность; а такое произведеніе, очевидно, есть безконечность. Очевидно, значитъ этой безконечности не слѣдуетъ давать такой, какой имѣетъ членъ ax^4 — высшій членъ полинома.

IV. Форма: $\frac{0}{0}$.

241. Выраженіе $\frac{0}{0}$, разсматриваемое само-по-себѣ, означаетъ какое угодно число. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлять 0 на 0 значитъ найти такое число, которое, будучи умножено на 0, давало бы 0; но всякое конечное число имѣетъ это свойство (такъ: $5 \times 0 = 0$, $-2 \times 0 = 0$ и т. д.), слѣд. $\frac{0}{0}$ означаетъ не одно какое-либо число въ частности, но какія угодно числа. Поэтому $\frac{0}{0}$ называють символомъ неопредѣленности.

Изъ этого слѣдуетъ, что если два количества A и B равны третьему C , то нельзя еще заключить, что $A = B$, не убѣдившись предварительно, что C не есть $\frac{0}{0}$.

242. ТЕОРЕМА. Когда алгебраическая дробь, которой числитель и знаменатель суть цѣлые рациональные относительно x полиномы, принимаетъ при некоторомъ частномъ значенн x неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$, — эта неопредѣленность — только кажущаяся, на самомъ же дѣлѣ дробь имѣетъ совершенно опредѣленную величину.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дробь $\frac{A}{B}$, которой числитель и знаменатель обращаются въ ноль при $x = a$; это доказываетъ, что и A и B дѣлятся на $x - a$ (§ 60). Пусть частное отъ раздѣленія A на $x - a$ будетъ A' ; въ такомъ случаѣ

$$A = (x - a)A';$$

цѣлый относительно x полиномъ A' можетъ также обращаться въ ноль при $x = a$; тогда онъ будетъ имѣть видъ

$$A' = (x - a)A'',$$

в слѣд.

$$A = (x - a)^2 A''.$$

A'' , въ свою очередь, также можетъ обратиться въ ноль при $x = a$ и т. д.

Такимъ образомъ можно написать:

$$A = (x - a)^m \cdot P,$$

гдѣ P есть цѣлый относительно x полиномъ, не обращающійся въ ноль при $x = a$; онъ можетъ быть и нулевой степени, т.-е. вовсе не содержать буквы x .

Такимъ же образомъ можемъ написать:

$$B = (x - a)^p \cdot Q,$$

гдѣ Q — цѣлый относительно x полиномъ, который можетъ быть и нулевой степени, не обращающійся въ ноль при $x = a$. Данная дробь имѣетъ, такимъ образомъ, видъ:

$$\frac{(x - a)^m \cdot P}{(x - a)^p \cdot Q}.$$

Изслѣдуемъ всевозможные случаи, полагая послѣдовательно:

$$m > p, \quad m = p, \quad m < p.$$

Первый случай. $m > p$. Положимъ $x = a$, найдемъ, что дробь обращается въ $\frac{0}{0}$. Но сокративъ ее на $(x - a)^p$, дадимъ ей видъ

$$\frac{(x - a)^{m-p} \cdot P}{Q},$$

гдѣ $m - p$ — положительно; положивъ $x = a$, найдемъ, что $(x - a)^{m-p} = 0$, а P и Q — отличны отъ нуля; поэтому, истинная величина дроби при $x = a$ есть ноль.

Примеръ. Дробь

$$\frac{(x-3)^4(x+1)}{(x-3)^2(x+2)},$$

при $x = 3$ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$; но, сокративъ ее на $(x-3)^2$, найдемъ

$$\frac{(x-3)^2(x+1)}{(x+2)},$$

и, положивъ $x = 3$, найдемъ

$$\frac{0 \times 4}{5} \text{ или } 0.$$

Второй случай. $m = p$. Положивъ $x = a$, найдемъ, что дробь обращается въ $\frac{0}{0}$, а сокративъ ее на $(x-a)^m = (x-a)^p$, получимъ

$$\frac{A}{B} = \frac{P}{Q},$$

а такъ P и Q не обращаются при $x = a$ въ ноль, то $\frac{A}{B}$ представляетъ некоторое определенное число.

Примеръ. Дробь

$$\frac{x-1}{(x-1)^2(x-2)},$$

при $x = 1$ обращается въ $\frac{0}{0}$; но, сокративъ ее на $(x-1)^2$, она обращается въ

$$\frac{x+2}{x+3}.$$

Положивъ въ этой дроби $x = 1$, найдемъ вполне определенное число $\frac{3}{4}$.

Третий случай. $m < p$. Положивъ $x = a$, найдемъ $\frac{0}{0}$; но если предварительно сократимъ дробь на $(x-a)^m$, то найдемъ

$$\frac{A}{B} = \frac{P}{(x-a)^{p-m}Q};$$

такъ какъ $p - m$ — положительно, то при $x = a$ знаменатель обратится въ ноль; а какъ числитель отличенъ отъ нуля, то дробь обратится въ ∞ .

Примеръ. Дробь

$$\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)^2(x-3)}$$

при $x = -1$ обращается въ $\frac{0}{0}$; но, по сокращеніи на $(x+1)^2$, принимаетъ видъ

$$\frac{x-2}{x-3};$$

положивъ $x = -1$, найдемъ $\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$. Такимъ образомъ, истинное значение дроби при $x = -1$ есть безконечность.

243. Первый способ опредѣленія истиннаго значенія неопредѣленности
вида $\frac{0}{0}$.

Изъ предыдущаго § слѣдуетъ, что для опредѣленія истиннаго значенія неопредѣленности, или, какъ говорятъ, для *раскрытія неопредѣленности*, надо въ числитель и знаменатель дроби выдѣлить общаго множителя, обращающагося при сдѣланномъ частномъ предположеніи въ нуль, сократить дробь на этого множителя и потомъ ввести сказанное предположеніе.

Примѣръ I. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{a^2 - 3a + 2}{a - a - 6}$$

при $a = 2$.

Замѣняя a числомъ 2, получаемъ $\frac{0}{0}$, т.-е. неопредѣленность; тѣмъ не менѣе, мы утверждаемъ, что при $a = 2$ данная дробь имѣетъ совершенно опредѣленную величину. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ уже, что если числитель и знаменатель обращаются при $a = 2$ въ нуль, то они дѣлятся на $a - 2$, откуда находимъ, что дробь можно представить въ видѣ

$$\frac{(a-2)(a-1)}{(a-2)(a+3)},$$

сокративъ на $a - 2$, находимъ

$$\frac{a-1}{a+3},$$

положивъ здѣсь $a = 2$, найдемъ, что истинная величина дроби равна

$$\frac{2-1}{2+3} \text{ или } \frac{1}{5}.$$

Примѣчаніе. О данномъ предметѣ нельзя составить себѣ вполнѣ яснаго представленія, не обращаясь къ теоремамъ о предѣлахъ. Здѣсь мы имѣемъ двѣ переменныя величины:

$$\frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 - a - 6} \quad \text{и} \quad \frac{a-1}{a+3} \cdot \frac{a-2}{a-2},$$

которыя, если a приближать къ 2, будутъ при всякомъ значеніи a оставаться равными. Но мы знаемъ, что въ такомъ случаѣ, въ силу теоремы III, § 184, и предѣлы этихъ переменныхъ, при $a = 2$, будутъ равны: такъ что

$$\lim \left(\frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 - a - 6} \right) = \lim \left(\frac{a-1}{a+3} \cdot \frac{a-2}{a-2} \right) \text{ при } a = 2 \dots (1).$$

Но, по теоремѣ XI, § 190,

$$\lim \left(\frac{a-1}{a+3} \cdot \frac{a-2}{a-2} \right) = \lim \left(\frac{a-1}{a+3} \right) \cdot \lim \left(\frac{a-2}{a-2} \right), \text{ при } a = 2.$$

Но $\lim \left(\frac{a-1}{a+3} \right)$, при $a = 2$, равенъ $\frac{1}{5}$. Что касается $\lim \left(\frac{a-2}{a-2} \right)$, то, по теор. XI, § 192, этотъ предѣлъ $= 1$. Подставляя въ (1), имѣемъ

$\lim \left(\frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 + a - 6} \right)_{a \rightarrow 2} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$, т.-е. что истинное значение данной дроби, при $a = 2$, есть $\frac{1}{5}$.

Примѣръ II. Найти истинное значение дроби

$$\frac{x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 24x - 9}{x^2 - x^2 - 21x + 45}$$

при $x = 3$.

Подставляя 3 вмѣсто x , замѣчаемъ, что оба члена дроби обращаются въ нуль: слѣд. они дѣлятся на $x - 3$. Совершивъ дѣленія, найдемъ въ частныхъ: $x^2 - x^2 - 7x + 3$ и $x^2 + 2x - 15$, такъ что дробь можно представить въ видѣ

$$\frac{(x-3)(x^2-x^2-7x+3)}{(x-3)(x^2+2x-15)}$$

или, по сокращеніи на $x - 3$:

$$\frac{x^2 - x^2 - 7x + 3}{x^2 + 2x - 15}$$

Для нахождения истиннаго значенія нужно теперь положить $x = 3$. Слѣдуетъ это замѣтить, что и вся дробь также обращается въ $\frac{0}{0}$; это значитъ, что и числитель дѣлится на $x - 3$, такъ что дробь можно представить въ видѣ

$$\frac{x^2 - x^2 - 7x + 3}{x^2 + 2x - 15} \text{ или, по сокращеніи, } \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 15}$$

Положивъ $x = 3$, находимъ $\frac{14}{8}$ или $\frac{7}{4}$; это и есть истинное значеніе предложенной дроби при $x = 3$.

Примѣръ III. Найти величину дроби $\frac{a^m - b^m}{a^p - b^p}$ при $a = b$.

При $a = b$ оба члена дроби дѣлаются нулями; слѣд. они дѣлятся на $a - b$; по сокращеніи на $a - b$ дробь принимаетъ видъ

$$\frac{a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}}{a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + \dots + b^{p-1}}$$

положивъ $a = b$, находимъ $\frac{ma^{m-1}}{pa^{p-1}}$ или $\frac{m}{p} \cdot a^{m-p}$; это и есть истинное значеніе данной дроби при $a = b$.

244. Второй способъ нахождения истиннаго значенія неопредѣленности $\frac{0}{0}$.

Пусть дробь $\frac{A}{B}$ принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$ при $x = a$. Положивъ $x = a + h$, подставимъ въ данную дробь $a + h$ вмѣсто x ; получимъ дробь $\frac{A'}{B'}$; сдѣлавъ въ ней приведеніе, найдемъ, что числитель и знаменатель ея будутъ содержать общимъ множителемъ h . Въ самомъ дѣлѣ, данная дробь принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$ при $x = a$, сл. оба члена ея содержатъ общій множитель $x - a$, т.-е. h (ибо изъ равенства $x = a + h$, слѣдуетъ $x - a = h$). Сокра-

щаемъ дробь $\frac{A'}{B'}$ на h , и если по сокращенію количество h еще будетъ находиться въ дробѣ, нужно положить $h = 0$: полученный результатъ и будетъ представлять истинную величину данной дроби при $x = a$, ибо изъ равенства $x = a + h$ слѣдуетъ, что положить $h = 0$ то же самое, что въ данной дроби положить $x = a$.

Способъ этотъ принадлежитъ Рунѣ (Roune).

Примѣръ. Найти истинную величину дроби

$$\frac{x^3 - x^2 - x - 1}{x^4 - x^3 - 3x^2 - 5x - 2}$$

при $x = 1$.

Положивъ $x = 1$, найдемъ, что дробь принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$. Подставляемъ въ нее вмѣсто x binomъ $1 + h$; находимъ

$$\frac{(1 + h)^3 - (1 + h)^2 - (1 + h) - 1}{(1 + h)^4 - (1 + h)^3 - 3(1 + h)^2 + 5(1 + h) - 2} = \frac{2h^2}{3h^3} = \frac{h^2}{h^3}$$

Сокративъ на h^2 , получимъ $\frac{2}{3h}$, а положивъ здѣсь $h = 0$, найдемъ $\frac{2}{0}$ или ∞ . Итакъ, истинное значеніе данной дроби при $x = 1$ есть ∞ .

V. Форма: $0 \times \infty$.

245. Если въ равенствѣ $A \times \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$ положить: $A = 0$ и $B = 0$, то получится $0 \times \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$, или $0 \times \infty = \frac{0}{0}$. Итакъ, символъ $0 \times \infty$, разматриваемый самъ по себѣ, означаетъ неопредѣленность.

Эта неопредѣленность можетъ быть только кажущаяся: ею можетъ маскироваться совершенно опредѣленная величина. Напримеръ:

$$x^4 \times \frac{3}{x^4} = 3x; \text{ при } x = 0 \text{ получаемъ: } 0 \times \infty = 0.$$

$$x^4 \times \frac{3}{x^4} = 3; \text{ при } x = 0 \text{ получаемъ: } 0 \times \infty = 3.$$

$$x^4 \times \frac{3}{x^4} = \frac{3}{x}; \text{ при } x = 0 \text{ получаемъ: } 0 \times \infty = \infty.$$

Итакъ, подъ видомъ неопредѣленности $0 \times \infty$ можетъ являться и 0, и конечное число, и безконечность.

246. Изъ сказаннаго вытекаетъ, что если одинъ изъ сомножителей произведенія равенъ нулю, то мы не вправе утверждатьъ, что и произведеніе равно нулю, не убѣдившись предварительно, что ни одинъ изъ остальныхъ сомножителей не есть безконечность.

247. Такимъ образомъ, когда алгебраическое выраженіе принимаетъ видъ $0 \times \infty$, при частномъ значеніи какой-либо буквы, то является вопросъ объ опредѣленіи истинной величины этого выраженія.

Примѣръ. Найти истинную величину выражения

$$(x^2 + 5x + 6) \times \frac{3}{3x - 2}$$

при $x = -2$.

Подставивъ (-2) вмѣсто x , находимъ: $0 \times \infty$. Представивъ данное выраженіе въ видѣ

$$\frac{3(x^2 + 5x + 6)}{x^2 + 3x - 2},$$

приводимъ вопросъ къ раскрытію неопредѣленности $\frac{0}{0}$ при $x = -2$.

Примѣняя приёмъ § 243, находимъ:

$$\frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)} = \frac{3(x+3)}{x-1}$$

Истинное значеніе будетъ:

$$\frac{3(-2+3)}{-2-1}, \text{ или } \frac{3}{-1} = -3$$

VI. Форма: $\frac{\infty}{\infty}$.

248. Если въ равенствѣ $\frac{1}{\frac{A}{1}} = \frac{B}{A}$ положить $A = 0$ и $B = 0$, то получимъ:

$\frac{1}{\frac{0}{1}} = \frac{0}{0}$, или $\frac{1}{0} = \frac{0}{0}$. Следовательно, символъ $\frac{\infty}{\infty}$ разсматриваемый самъ по себѣ, означаетъ неопредѣленность.

Неопредѣленность эта можетъ быть только кажущаяся. Такъ:

- 1) $\frac{2x^5}{x^4} = 2x$; положивъ $x = \infty$, найдемъ: $\frac{\infty}{\infty} = \infty$.
- 2) $\frac{2x^5}{x^5} = 2$; положивъ $x = \infty$, найдемъ въ этомъ случаѣ, что $\frac{\infty}{\infty} = 2$.
- 3) $\frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$; положивъ $x = \infty$, въ этомъ случаѣ найдемъ: $\frac{\infty}{\infty} = 0$.

Итакъ, подъ видомъ неопредѣленности $\frac{\infty}{\infty}$ можетъ скрываться или ∞ , или конечное количество, или нуль. Отсюда задача о раскрытіи неопредѣленности разсматриваемаго вида.

249. Въ § 240 мы видѣли, что величина цѣлаго рациональнаго по буквѣ x полинома равна безконечности при $x = \infty$, если коэффициенты его конечны. Отсюда слѣдуетъ, что алгебраическая дробь, числитель и знаменатель которой суть цѣлые относительно x полиномы, обращается въ $\frac{\infty}{\infty}$ при $x = \infty$. Докажемъ, что истинная величина такой дроби при x безконечномъ равна: нулю,

если степень знаменателя выше степени числителя; безконечности если, наоборотъ, степень знаменателя ниже степени числителя; и частному отъ раздѣленія коэффициентовъ при высшихъ степеняхъ буквы x , если степень знаменателя равна степени числителя.

Первый случай. Найти истинную величину дроби

$$\frac{x^2 - x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 4}$$

при $x = \infty$.

Дробь принимаетъ видъ ∞ ; чтобы раскрыть эту кажущуюся неопредѣленность, раздѣлимъ числ. и знам. на высшую степень x , въ данномъ случаѣ на x^3 . Найдемъ

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}} \quad \text{или} \quad \frac{1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}}.$$

Если положить $x = \infty$, каждый членъ, содержащій x въ знаменателѣ, обратится въ нуль, а дробь въ $\frac{0}{2}$ или въ 0.

Второй случай. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{3x^3 + 2x - 1}{5x^3 - 2x^2 + 3}$$

при $x = \infty$.

Дробь принимаетъ видъ ∞ . Раздѣливъ оба члена ея на высшую степень x , въ данномъ случаѣ на x^3 , найдемъ:

$$3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}, \\ 5 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}.$$

При $x = \infty$ дроби: $\frac{2}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{2}{x}$ и $\frac{3}{x^3}$ обращаются въ нуль, и данная дробь равна $\frac{3}{5}$, т.-е. отношенію коэффициентовъ при высшихъ степеняхъ x .

Третій случай. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{x^3 - x + 1}{-2x^2 + 6}$$

при $x = \infty$.

Раздѣливъ числителя и знаменателя на x^3 , получимъ:

$$1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}, \quad \text{или} \quad \frac{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} \left(-2 + \frac{6}{x} \right)}.$$

При $x = \infty$ числитель обращается въ 1, а знаменатель въ 0 — 2 или въ 0, истинная величина дроби $= -\infty$.

VII. Форма: $\infty - \infty$.

250. Сумма двух безконечностей одного знака, очевидно равна безконечности съ тѣмъ же знакомъ; разность двухъ безконечностей съ противоположными знаками равна безконечности; но разность двухъ безконечностей одного знака и сумма двухъ безконечностей противоположнаго знака суть формы неопредѣленныя.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ равенствѣ $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{B-A}{AB}$, положимъ $A = 0$ и $B = 0$, то найдемъ: $\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$, или $\infty - \infty = \frac{0}{0}$.

Укажемъ, какъ раскрыть кажущуюся неопредѣленность этого вида.

Примѣръ I. Найти истинное значеніе выраженія

$$x^3 - x^2$$

при $x = \pm \infty$.

При $x = +\infty$ данная разность принимаетъ видъ $\infty - \infty$. Вынося x^2 за скобки, мы дадимъ ей видъ: $x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$, что при $x = +\infty$ обращается въ $+\infty$.

При $x = -\infty$ данное выраженіе $= -\infty - \infty = -\infty$.

Примѣръ II. Найти истинное значеніе разности

$$(x+1) - \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

при $x = \pm \infty$.

При $x = +\infty$ данная разность обращается въ $+\infty - \infty$ или въ $-\infty$.

При $x = -\infty$, $x+1$ равняется $-\infty$, равно какъ и $2x^2 - 3x + 1$; сл. мы получаемъ разность двухъ положительныхъ безконечностей — выраженіе неопредѣленное. Чтобы раскрыть эту кажущуюся неопредѣленность, умножимъ и умножимъ данное выраженіе на сумму $x+1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$, и получимъ

$$(x+1 - \sqrt{2x^2 - 3x + 1})(x+1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}) \\ x+1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

или

$$(x+1)^2 - (2x^2 - 3x + 1) \\ x+1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

или

$$-x^2 + 5x \\ x+1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

Раздѣливъ числ. и знам. на x^2 , находимъ

$$-1 + \frac{5}{x} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4} \\ -1 + \frac{5}{x} \\ \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Положивъ здѣсь $x = +\infty$, находимъ $\frac{-1}{0(1+\sqrt{2})}$ или ∞ .

Примѣръ III. Найти истинное значеніе разности

$$x+2-\sqrt{x^2-5x+1}$$

при $x = +\infty$.

При $x = -\infty$ находимъ $-\infty$.

При $x = +\infty$ разность принимаетъ неопредѣленный видъ $\infty - \infty$.

Чтобы раскрыть неопредѣленность, умножимъ и дѣлимъ данное выраженіе на $x+2+\sqrt{x^2-5x+1}$; находимъ:

$$\frac{(x+2)^2 - (x^2 - 5x + 1)}{x+2+\sqrt{x^2-5x+1}}$$

или

$$\frac{9x+3}{x+2+\sqrt{x^2-5x+1}}$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на x , получимъ

$$\frac{9 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

Положивъ $x = +\infty$, находимъ $\frac{9}{1+\sqrt{1}}$ или $\frac{9}{2}$. Итакъ, истинная величина даннаго выраженія, при $x = +\infty$, равна $\frac{9}{2}$.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

УРАВНЕНІЯ И НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

ГЛАВА XVШ.

Уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Опредѣленіе: равенство, тождество, уравненіе. — Уравненія эквивалентныя. — Преобразованія уравненій въ другое ему эквивалентное. Рѣшеніе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. — Примеры.

Опредѣленія.

251. Соединеніе двухъ равныхъ количествъ знакомъ $=$ (знакъ равенства) называется *равенствомъ*. Такъ $7 = 5 + 2$ есть равенство; общій видъ равенства есть

$$A = B.$$

Количество A , находящееся влѣво отъ знака равенства, наз. *первою частью*, количество же B , стоящее вправо отъ этого знака, *второю частью* равенства. Равенства бываютъ двоякаго рода: *тождества* и *уравненія*.

Всякое *очевидное равенство* называютъ *тождествомъ*.

Такъ, равенства

$$5 = 5; \quad 10 = 7 + 2 + 1; \quad (a + b)^2 = (a + b)^2$$

суть *тождества*.

Тождествомъ называютъ также всякое равенство двухъ буквенныхъ выраженій, вѣрное при всякихъ, какихъ угодно, значеніяхъ вложенныхъ въ него буквъ. Такимъ образомъ, равенства

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b), \\ a^m \times a^n &= a^{m+n}\end{aligned}$$

суть *тождества*.

Нѣтъ ли возьмемъ равенство $2x - 10 = 0$, то легко убѣдимся, что оно будетъ вѣрно не при всякихъ частныхъ значеніяхъ буквы x ; въ самомъ дѣлѣ, чтобы первая часть была нулемъ, нужно чтобы $2x$ равнялось 10, а это воз-

можно только при x равномъ 5, и ни при какомъ другомъ значеніи буквы x . Точно такъ же равенство $x^2 = 16$ возможно не при всякомъ значеніи буквы x , а лишь при двухъ частныхъ значеніяхъ этой буквы, именно: при $x = +4$ и при $x = -4$; въ самомъ дѣлѣ, какъ $(+4)^2 = 16$, такъ и $(-4)^2 = 16$.

Такія равенства, которыя верны не при всѣхъ, а лишь при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ буквъ, называются *уравненіями*.

Тѣ буквы, которымъ нужно дать особые значенія для того, чтобы существовало равенство между обѣими частями ур—нія, иначе говоря, тѣ буквы, при частныхъ значеніяхъ которыхъ уравненіе въ самомъ дѣлѣ обращается въ тождество, называются *неизвѣстными* количествами уравненія, или просто *неизвѣстными*. Прочіе же количества, входящія въ уравненія, наз. *извѣстными*.

Такъ, если мы ищемъ, при какомъ значеніи x равенство

$$a + b = 2x - c$$

будетъ справедливо, т.-е. обратится въ тождество, то x будетъ *неизвѣстнымъ* этого уравненія. Легко видѣть, что ур. это обратится въ тождество, если x -у дать значеніе $\frac{a + b + c}{2}$; въ самомъ дѣлѣ, вторая часть обращается при этомъ въ $2 \times \frac{a + b + c}{2} - c$ или въ $a + b + c - c$, что равно $a + b$; ур—ніе же дѣйствительно дѣлается тождествомъ

$$a + b = a + b.$$

Тѣ частныя значенія неизвѣстныхъ, при которыхъ ур—ніе обращается въ тождество, называются *рѣшеніями* или *корнями* уравненія. Въ вышеприведенныхъ примѣрахъ:

ур—ніе $2x - 10 = 0$ имѣетъ одинъ корень $= 5$;

ур—ніе $x^2 = 16$ имѣетъ два корня: $+4$ и -4 ;

ур—ніе $a + b = 2x - c$ имѣетъ одинъ корень: $\frac{a + b + c}{2}$.

Рѣшить уравненіе значитъ найти его корни, т.-е. тѣ значенія для неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ уравненіе въ тождество.

Принято говорить, что *корень удовлетворяетъ уравненію*; этимъ сокращенно выражаютъ, что уравненіе обращается въ тождество, если замѣнить въ немъ неизвѣстныя корнями.

Для отличія неизвѣстныхъ количествъ ур—нія отъ извѣстныхъ, принято неизвѣстныя обозначать послѣдними буквами азбуки: x, y, z, t, u, v, \dots ; извѣстныя же первыми: $a, b, c, d, \dots, m, n, \dots$.

Такъ, въ уравненіи $a + b = 2x - c$ неизвѣстное есть x , извѣстныя же: a, b и c .

252. Классификація уравненій.—Уравненіе наз. *алгебраическимъ*, если въ немъ надъ неизвѣстными не совершается иныхъ дѣйствій кромѣ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня.

Во всѣхъ другихъ случаяхъ ур. называется *трансцендентнымъ*.

Такъ уравненіе $10^x = 8$ есть трансцендентное; оно называется *показательнымъ*, ибо въ немъ неизвѣстное является показателемъ.

Всѣ алгебраическія уравненія раздѣляются на два класса: на *раціональныя* и *ирраціональныя*.

Алгебраическое ур. называется *раціональнымъ*, если въ немъ *неизвѣстныя не входятъ подъ знакомъ корня*; если же въ уравненіи неизвѣстныя встрѣчаются подъ знакомъ корня, то оно наз. *ирраціональнымъ*.

Такъ, уравненіе

$$\frac{2}{x} + x^2 - 1 = \sqrt{5}$$

есть раціональное, ибо въ немъ неизвѣстное не встрѣчается подъ знакомъ корня.

Уравненіе же

$$\sqrt{5x-1} = 2x-3$$

есть ирраціональное, ибо членъ $\sqrt{5x-1}$ содержитъ неизвѣстное подъ знакомъ корня.

Раціональныя уравненія, въ свою очередь, раздѣляются на *цѣлыя* и *дробныя*.

Цѣлымъ наз. такое раціональное ур., которое не содержитъ неизвѣстное въ знаменателѣ; напр. уравненія

$$x^2 - 5x - 4 = 0, \quad \frac{2}{3}x - 10 = 5x - 1 \quad \text{и} \quad x - x\sqrt{2} = 6$$

суть цѣлыя.

Если же уравненіе содержитъ неизвѣстныя въ знаменателѣ, то оно назыв. *дробнымъ*. Уравненіе

$$\frac{3-5x}{1+x} = 4$$

есть ур. дробное.

Такимъ образомъ обѣ части цѣлаго алгебраическаго уравненія суть *полномыя цѣлыя относительно неизвѣстнаго*.

Степенью цѣлаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ называется высшій показитель при неизвѣстномъ въ этомъ уравненіи. Такъ:

ур—ніе $ax + b = 0$ есть ур—ніе первой степени;

ур—ніе $ax^2 + bx + c = 0$ —второй степени;

ур—ніе $4x^3 - 2ax^2 + 5x - 1 = 0$ —третьей степени.

Если же цѣлое ур. содержитъ нѣсколько неизвѣстныхъ, то степенью его наз. наибольшая сумма показателей при неизвѣстныхъ въ одномъ и томъ же членѣ.

Такъ, ур—ніе

$$ax + by + cz = d$$

есть ур. первой степени съ тремя неизвѣстными (x , y и z).

Ур.

$$4x - 5xy - 9 = 4y - 11x$$

есть ур. второй степени съ двумя неизвѣстными, ибо наибольшая сумма показателей при неизвѣстныхъ равна 2 (въ членѣ $-5xy$).

$$Ур. \quad x^2 y^4 + y^2 + \frac{x y}{7} + \sqrt{c} = 2$$

есть ур. седьмой степени, такъ какъ наибольшая сумма показателей при неизвестныхъ въ одномъ и томъ же членѣ равна 7 (въ первомъ членѣ).

Понятно, что нельзя говорить о степени ур—нія, если оно не есть рациональное цѣлое. Такъ мы не можемъ говорить о степени ур—ній

$$x + \sqrt{x+1} = 0, \quad \frac{x}{x-a} + \frac{x-b}{x+a} = c,$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = c,$$

ибо они содержатъ члены или дроби, или иррациональные относительно неизвестныхъ.

Уравненія раздѣляютъ еще на *численные* и *буквенныя*; численнымъ ур—мъ называютъ такое, коэффициенты котораго суть опредѣленные числа, а буквеннымъ такое, коэффициенты коего суть буквенныя выраженія. Такъ

$$\text{ур—нiе} \quad 3x - y^2 + 5 = 0 \text{ есть численное;}$$

$$\text{ур—нiе} \quad a^2 x - \frac{a+b}{c} x^2 - 2 = d \text{ есть ур. буквенное.}$$

Если два ур—нія имѣютъ одинаковые корни, то они наз. *эквивалентными ур—ми*. Итакъ, уравненія

$$A = B \dots (1) \quad \text{и} \quad A' = B' \dots (2)$$

будутъ эквивалентны, если всякій корень ур—нія (1) удовлетворяетъ (2), и обратно, каждый корень (2) удовлетворяетъ (1).

Такъ напр., ур—нія

$$2x + 1 = 7 \dots (1) \quad \text{и} \quad 2x + 4 = 10 \dots (2)$$

эквивалентны, ибо какъ то, такъ и другое удовлетворяются однимъ и тѣмъ же корнемъ, равнымъ 3.

253. Процессъ рѣшенія ур—нія заключается въ томъ, что отъ даннаго уравненія, путемъ послѣдовательныхъ преобразованій, стараются придти къ такому уравненію, первая часть котораго есть само неизвестное; понятно, что вторая часть такого ур—нія и будетъ искомымъ корнемъ, если послѣднее эквивалентно данному.

Сказанныя преобразованія основаны на слѣдующихъ началахъ.

254. Первое начало. — Придавая къ обѣимъ частямъ уравненія поровну, или отнимая отъ обѣихъ частей равныя количества, получимъ уравненіе эквивалентное данному.

Пусть данное уравненіе будетъ

$$A = B \dots (1)$$

гдѣ А и В суть нѣкоторыя алгебраическія выраженія, содержащія одно или нѣсколько неизвестныхъ. Пусть будетъ, далѣе, М нѣкоторое произвольное ко-

личество, содержащее или не содержащее неизвестныя. Требуется доказать, что уравнение

$$A + M = B + M \dots (2)$$

эквивалентно данному. Это значитъ, нужно доказать, что всякій корень уравнения (1) служитъ также корнемъ и для (2), и обратно—всякій корень уравнения (2) удовлетворяетъ и уравнению (1). Въ самомъ дѣлѣ:

1. Пусть $x = 5$ будетъ корнемъ уравнения (1); это значитъ, что при подстановкѣ числа 5 вмѣсто x въ уравнение (1) количества A и B дѣлаются равными; но такъ какъ M всегда остается равнымъ самому себѣ, то очевидно, что при $x = 5$, и $A + M$ будетъ равно $B + M$, т.-е. подстановка 5 вмѣсто x въ уравнение (2) обращаетъ его въ тождество, а это и значитъ, что 5 есть корень уравнения (2). Такимъ образомъ, мы доказали, что всякій корень уравнения (1) удовлетворяетъ необходимо и уравнению (2).

2. Наоборотъ: пусть $x = a$ будетъ корнемъ уравнения (2), т.-е. что при подстановкѣ количества a вмѣсто x въ уравнение (2), $A + M$ дѣлается равнымъ $B + M$; но какъ M всегда равно самому себѣ, то равенство суммъ $A + M$ и $B + M$ требуетъ равенства выражений A и B . Итакъ, при $x = a$ имѣемъ $A = B$, т.-е. $x = a$ служитъ корнемъ уравнения (1).

Итакъ, доказано, что уравнения (1) и (2) эквиваленты.

Если отъ обоихъ частей уравнения (1) отнять по M , то уравнение $A - M = B - M$ также эквивалентно уравнению $A = B$. Въ самомъ дѣлѣ, отнять M все равно что придать $(-M)$ къ обѣимъ частямъ данного уравнения; но уже доказано, что прираще равныхъ количествъ къ обѣимъ частямъ уравнения приводитъ къ уравнению, эквивалентному данному.

255. Слѣдствіе I.—*Всякій членъ уравнения можно перенести изъ одной части уравнения въ другую, написавъ его въ этой другой части съ обратнымъ знакомъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть данное уравнение будетъ

$$ax + b = cx + d \dots (1)$$

перенесемъ къ обѣимъ частямъ по $-cx$, имѣемъ

$$ax + b - cx = cx + d - cx - d, \text{ или } ax - cx + b = -d \dots (2)$$

причемъ, на основаніи доказаннаго начала, ур. (2) эквивалентно (1)-му. Придавая, затѣмъ, къ обѣимъ частямъ ур. (2) по $+b$, находимъ

$$ax - cx + b + b = -d + b + b, \text{ или } ax - cx = b + d \dots (3),$$

причемъ это ур. эквивалентно (2)-му, а слѣд. и (1)-му.

Сравнивая ур. (3) съ (1), замѣчаемъ, что членъ cx перешелъ въ первую часть съ знакомъ $-$, между тѣмъ какъ во второй части ур. (1) этотъ членъ имѣлъ знакъ $+$, членъ b перешелъ во вторую часть съ знакомъ $+$, между тѣмъ какъ въ первой части уравненія этому члену предшествовалъ знакъ $-$. Отсюда выводится заключеніе: перенося члены изъ одной части уравненія въ другую, слѣдуетъ у переносимыхъ членовъ мѣнять знаки на противоположные.

256. Слѣдствіе II.—*Всякое уравненіе можно привести къ виду*

$$P = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, перенесъ въ члены изъ второй части уравненія въ первую, очевидно, будемъ имѣть во второй части 0.

Напримѣръ, уравненіе

$$4x^2 - 7x + 2 = 3x - 6$$

эквивалентно уравненію

$$4x^2 - 10x + 8 = 0.$$

Если имѣемъ уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, то перенесъ въ первую часть и сдѣлавъ приведеніе, дадимъ такому уравненію видъ

$$ax + b = 0,$$

гдѣ a и b суть выраженія, не содержащія x . Это и есть, слѣд., самый общій видъ уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Точно такъ же уравненіе

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

въ которомъ a , b и c не зависятъ отъ x , есть самый общій видъ уравненія второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Уравненіе

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

представляетъ общій видъ уравненія третьей степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Наконецъ, уравненіе

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0$$

есть общій видъ уравненія m -ой степени съ 1 неизвѣстнымъ.

257. Слѣдствие III. — *Можно перемѣнить знаки у всѣхъ членовъ уравненія на обратные.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть дано уравненіе

$$19 - 7x = 5 - 4x \dots (1)$$

Замѣтимъ прежде всего, что всегда можно переставить части уравненія, т.е. написать вторую часть уравненія влѣво отъ знака равенства и наоборотъ; ибо очевидно, что уравненіе $M = N$, эквивалентно уравненію $N = M$ ¹⁾. Сдѣлавъ это, найдемъ

$$5 - 4x = 19 - 7x.$$

Затѣмъ перенесемъ члены второй части въ первую и наоборотъ; получимъ

$$-19 + 7x = -5 + 4x \dots (2).$$

Сравнивая это уравн. съ (1), замѣчаемъ, что оно отличается отъ (1) знаками при всѣхъ членахъ.

¹⁾ Дѣйствительно, всякое значеніе неизвѣстнаго, дѣлающее M равнымъ N , дѣлаетъ, наоборотъ, и N равнымъ M .

258. Второе начало. *Помноживъ обѣ части уравненія на одно и то же количество, получимъ уравненіе эквивалентное данному, если только взятый множитель не есть ни нуль, ни бесконечность, и не совершитъ измѣненія.*

Пусть дано уравненіе

$$A = B \dots (1),$$

и M — количество, не равное ни 0, ни ∞ и не обращающееся ни въ 0, ни въ ∞ . Требуется доказать, что при такомъ ограниченіи относительно M , уравненіе

$$A \cdot M = B \cdot M \dots (2)$$

эквивалентно уравненію $A = B$, т.-е. что всякій корень перваго удовлетворяетъ второму и наоборотъ.

Для удобства доказательства замѣнимъ уравненія (1) и (2) имъ эквивалентными

$$A - B = 0 \dots (I) \quad \text{и} \quad (A - B) \cdot M = 0 \dots (II)$$

ур. (I) эквивалентно (1)-му и (II) (2)-му, ибо перенесеніе членовъ изъ одной части въ другую приводитъ всегда къ ур—нію эквивалентнымъ данному.

Итакъ, докажемъ, что (I) эквивалентно (II)-му.

1. Пусть $x = \alpha$ будетъ однимъ изъ корней уравненія (I); это значитъ, что при подстановкѣ α вмѣсто x въ ур. (I), это ур. обращается въ тождество, т.-е. $A - B$ — въ нуль. Подставимъ теперь α вмѣсто x въ ур. (II); при этомъ $A - B$, какъ уже знаемъ, обратится въ 0; а произведеніе двухъ множителей: $A - B$ и M , изъ коихъ одинъ равенъ нулю, само равняется 0, если только другой множитель не обращается въ ∞ ; но, по условію, M не есть и не обращается въ ∞ , сл. произведеніе $(A - B) \cdot M$ при $x = \alpha$, дѣйствительно обращается въ 0, а ур. (II) въ тождество $0 = 0$. Значитъ $x = \alpha$ служить корнемъ ур—нія (II).

2. Пусть $x = \beta$ есть одинъ изъ корней ур—нія (II); это значитъ, что при подстановкѣ β вмѣсто x въ ур—ніе (II) произведеніе $(A - B) \cdot M$ дѣлается нулемъ; но чтобы произведеніе двухъ множителей было $= 0$, необходимо, чтобы одинъ изъ множителей равнялся 0, и какъ M , по условію, не есть 0, то $A - B$ должно обращаться въ нуль. Итакъ, при подстановкѣ β вмѣсто x , выраженіе $A - B$ обращается въ 0, а сл. $x = \beta$ служить корнемъ и (I) уравненія.

Итакъ, мы доказали, что при сдѣланномъ ограниченіи относительно M , всякій корень I-го уравненія служитъ корнемъ и втораго, и наоборотъ; а слѣд. ур—нія (I) и (II) эквивалентны, и одно изъ нихъ можетъ быть замѣнено другимъ.

259. Можно раздѣлить обѣ части ур—нія на одно и то же количество M , если бы оно не было $=$ ни нулю, ни бесконечности; полученное ур. будетъ эквивалентно данному. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить на M — все равно что помножить на $\frac{1}{M}$; но если M не есть 0 или ∞ , то $\frac{1}{M}$ не есть ни ∞ , ни 0; а такое умноженіе, по доказанному, приводитъ къ эквивалентному съ даннымъ уравненію.

260. Положеніе. На этомъ началѣ основано уничтоженіе дробей въ

уравненія, когда знаменатели этихъ дробей не содержать неизвѣстныхъ. Пусть, напр., требуется освободить отъ дробей уравненіе

$$\frac{7x}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{5x}{12} \dots (1).$$

Для этого нужно помножить обѣ части ур—нія, или, что то же, всѣ члены ур—нія на наименьшее кратное знаменателей, и затѣмъ въ каждойъ членѣ сократить общихъ множителей числителя и знаменателя; такъ какъ каждый знаменатель входитъ множителемъ въ составъ наименьшаго кратнаго, то очевидно, что указаннымъ сокращеніемъ всѣ дробные члены будутъ приведены къ цѣлому виду.

Наименьшее кратное знаменателей ур—нія (1) есть $2^3 \cdot 3 = 24$; умножаемъ всѣ члены на 24; имѣемъ

$$\frac{7x \times 24}{8} - \frac{3 \times 24}{4} = \frac{24}{6} + \frac{5x \times 24}{12},$$

или, сокращая первую дробь на 8, вторую на 4, третью на 6 и четвертую на 12, выводимъ

$$7x \times 3 - 3 \times 6 = 4 + 5x \times 2,$$

или, наконецъ

$$21x - 18 = 4 + 10x \dots (2).$$

Это ур. (2), по доказанному, эквивалентно (1)-му, ибо множитель въ данномъ случаѣ не содержалъ неизвѣстнаго, поэтому онъ не могъ измѣнять своей величины, а слѣдовательно и не могъ обратиться ни въ 0, ни въ ∞ ; это была конечная величина 24.

Возьмемъ еще прифрзъ: освободить отъ дробей уравненіе

$$\frac{x}{b} + \frac{a-b}{a} = \frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b}$$

Наименьшее кратное знаменателей $ab(a-b)(a+b)$; умноживъ на него всѣ члены уравненія, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{(x+a)ab(a-b)(a+b)}{b} + \frac{(x-b)ab(a-b)(a+b)}{a} &= \frac{xab(a-b)(a+b)}{a-b} + \frac{xab(a-b)(a+b)}{a+b} \\ &= \frac{xab(a-b)(a+b)}{a+b} \end{aligned}$$

Сокративъ дроби, по порядку, на b , a , $a-b$ и $a+b$, получимъ:

$$(x+a)a(a^2-b^2) + (x-b)b(a^2-b^2) = xab(a+b) + xab(a-b).$$

Такъ какъ множитель въ данномъ случаѣ $ab(a^2-b^2)$, т.-е. количеству, не зависящему отъ неизвѣстнаго, то послѣднее ур. эквивалентно данному.

261. Случай, когда множитель равенъ безконечности, нулю или же содержитъ неизвѣстное.

При доказательствѣ предыдущей теоремы мы сдѣлали ограниченіе относительно величины множителя M , разумѣя подъ M количество определенное, не равное ни 0, ни ∞ , и не зависящее отъ неизвѣстнаго. При такомъ ограниченіи

уравнение, полученное по умноженіи на M , всегда эквивалентно данному. Рассмотрим теперь случаи: $M = \infty$, $M = 0$. M содержитъ неизвѣстное.

Случай: $M = \infty$. — Въ этомъ случаѣ уже нельзя утверждать, что всякій корень ур—нія (I) удовлетворяетъ и II-му, потому что, хотя $A = B$ и равно 0, но $(A - B) \cdot M$, принимая теперь видъ $0 \times \infty$, не necessarily равно нулю. Но всякое рѣшеніе ур—нія (II) необходимо будетъ удовлетворять и I-му; въ самомъ дѣлѣ, $(A - B) \cdot M$ должно быть нулемъ, но какъ $M = \infty$, то необходимо, чтобы было $A - B = 0$.

Случай: $M = 0$. — Въ этомъ случаѣ всякій корень ур—нія (I) необходимо удовлетворяетъ II-му, такъ какъ при $A - B = 0$, первая часть ур—нія (II) обращается въ 0×0 . Но не всякій корень II-го ур. будетъ необходимо удовлетворять и I-му, потому что $(A - B) \cdot 0$ равно 0, хотя бы $A - B$ и не было нулемъ.

Случай, когда M зависитъ отъ неизвѣстнаго. — Если множитель M есть выраженіе, содержащее неизвѣстное, то при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ послѣдняго оно можетъ обращаться или въ 0, или въ ∞ ; напримѣръ, если $M = x + 2$, то при $x = -2$, M дѣлается нулемъ; если $M = \frac{1}{x-1}$, то при $x = 1$, M обращается въ ∞ . Разсужденія, служившія намъ при доказательствѣ теоремы, опять становятся неприменимыми, и мы не въ правѣ утверждать, что по умноженіи будемъ имѣть уравненіе эквивалентное данному. Вопросъ этотъ требуетъ, поэтому, особаго изслѣдованія, которое, въ видахъ ясности, подраздѣлимъ на три случая.

I **Выраженія $A - B$ и M цѣлыя относительно неизвѣстнаго.** — Кроме тѣхъ значеній x , обращающихъ M въ нуль, пусть не обращаютъ въ нуль $A - B$. Доказать, что ур—нія

$$A - B = 0 \dots (1) \quad \text{и} \quad M(A - B) = 0 \dots (2)$$

не эквивалентны одно другому.

Здѣсь прежде всего необходимо замѣтить, что ур. $P = 0$, гдѣ P — цѣлый относительно x многочленъ съ конечными коэффициентами, не можетъ имѣть безконечнаго корня, ибо цѣлый отн. x многочленъ съ конечными коэффициентами обращается при $x = \infty$ въ ∞ , а не въ нуль, какъ требуетъ ур. $P = 0$. Слѣдоват., уравненіе (1) имѣетъ конечные корни; въ частности, нѣкоторые изъ нихъ могутъ быть нулями. Переходимъ къ доказательству теоремы.

Всякій корень ур—нія (1), обращая $A - B$ въ нуль, дѣлаетъ нулемъ множителя $A - B$ въ ур—нія (2); выраженіе же M , какъ цѣлое относительно x , при корняхъ ур—нія (1), какъ конечныхъ количествъ, не можетъ обратиться въ ∞ , а будетъ конечнымъ количествомъ. Поэтому, произведеніе $M(A - B)$ обратится въ нуль, а ур. (2) въ тождество $0 = 0$.

Итакъ, всякій корень ур—нія (1) удовлетворяетъ и ур—нію (2).

Но корни ур—нія (2) не necessarily удовлетворяютъ и ур—нію (1). Въ самомъ дѣлѣ, кромѣ значеній x , обращающихъ $A - B$ въ нуль, ур—ніе (2) удовлетворяется еще такими значеніями x , при которыхъ M обращается въ нуль, т. е. эти значенія, какъ неравныя ∞ , не могутъ обратить $A - B$ въ ∞ . И, значенія x , обращающія въ нуль выраженіе M , по условію, не обращаютъ въ нуль количество $A - B$. Значитъ, этотъ второй родъ корней ур—нія (2) не удовлетворяетъ первому уравненію, такъ что ур—віе (2) имѣетъ большее число корней нежели (1), и слѣдовательно, ему не эквивалентно.

Заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ умноженіе ур—нія на множитель, зависящій отъ неизвѣстнаго, приводитъ къ уравненію, имѣющему лишніе корни сравнительно съ даннымъ, при чемъ эти *лишніе корни суть тѣ значенія неизвѣстнаго, при которыхъ множитель М обращается въ нуль.*

Примѣръ. — Пусть дано ур—ніе

$$2x - 4 = 3x - 6,$$

корень котораго есть $x = 2$. Умноживъ обѣ части на $x - 1$, найдемъ новое уравненіе

$$(2x - 4)(x - 1) = (3x - 6)(x - 1).$$

Значеніе $x = 2$, удовлетворяющее первому, удовлетворитъ и второму ур—нію, ибо обращаетъ обѣ его части въ 0. Но легко видѣть, что второе ур—ніе обращается въ тождество и при $x = 1$, слѣд. имѣетъ еще корень $x = 1$, не удовлетворяющій первому. Заключаемъ, что второе ур—віе не эквивалентно первому.

II. $A - B$ — выраженіе цѣлое относительно неизвѣстнаго, M — дробное. — Въ этомъ случаѣ уравненія

$$A - B = 0 \dots (1) \quad \text{и} \quad M(A - B) = 0 \dots (2)$$

не необходимо эквивалентны: ур—ніе (2) можетъ не удовлетворяться *нѣкоторыми корнями ур—нія (1).*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x = a$ будетъ одинъ изъ корней ур—нія (1). Обращая, при подготовкѣ въ (2), множителя $A - B$ въ нуль, корень этотъ можетъ обратить M въ ∞ ; тогда первая часть ур—нія (2) приметъ видъ $\infty \times 0$, но это выраженіе можетъ и не быть нулемъ. Такимъ образомъ, умноженіе ур—нія можетъ въ разсматриваемомъ случаѣ повести къ *потерѣ нѣкоторыхъ корней; эти теряемые корни суть тѣ значенія неизвѣстнаго, которыя обращаютъ множителя въ безконечность.*

Примѣръ I. — Пусть данное ур. будетъ

$$(x - 1)(x + 2) = 0 \dots (1).$$

Корни его, какъ легко видѣть, суть: $x' = 1$ и $x'' = -2$. Помноживъ ур—ніе на $\frac{1}{x-1}$, получимъ

$$\frac{1}{x-1} \cdot (x - 1)(x + 2) = 0 \dots (2).$$

Подставивъ въ это ур—ніе 1 вмѣсто x , замѣчаемъ, что оно принимаетъ видъ

$$\infty \times 0 = 0.$$

Если теперь истинное значеніе неопредѣленности $\infty \times 0$, при $x = 1$, будетъ 0, то $x = 1$ будетъ служить корнемъ ур—нія (2); въ противномъ случаѣ, ур. (2) не имѣетъ корня равнаго 1.

Для раскрытія неопредѣленности $\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$ сокращаемъ дробь на $x-1$,

и затѣмъ въ полученномъ выраженіи $x + 2$ полагаемъ $x = 1$: въ результатѣ получимъ 3. Значитъ ур. (2), при $x = 1$, беретъ видъ

$$3 = 0,$$

и потому $x = 1$ не есть его корень.

Но $x = -2$ служитъ корнемъ и ур—нія (2). Плякъ, вследствие умноженія на M дробное, ур—ніе потеряло одинъ изъ корней, равный тому значенію неизвестнаго, при которомъ множитель обращается въ ∞ .

Примѣръ II. — Пусть данное ур—ніе будетъ

$$x^2 + 12 = 7x,$$

имѣющее корни $x' = 3$ и $x'' = 4$.

Умноживъ обѣ части на $\frac{1}{x-3}$, находимъ

$$\frac{x^2 + 12}{x-3} - \frac{7x}{x-3} \text{ или } \frac{x^2 - 7x + 12}{x-3} = 0, \text{ или } \frac{1}{x-3} \cdot (x-3)(x-4) = 0.$$

Это ур—ніе удовлетворяется значеніемъ $x = 4$. Но подставивъ $x = 3$, находимъ $\infty \times 0 = 0$; и какъ истинное значение неопредѣленности $\infty \times 0$, при $x = 3$, есть 1, то второе ур. не имѣетъ корня $= 3$. Здѣсь опять отъ умноженія на $\frac{1}{x-3}$ ур—ніе потеряло корень 3, т.-е. равный тому значенію неизвестнаго, которое обращаетъ множителя въ ∞ .

III $A - B$ — выражение дробное относительно неизвѣстнаго, M — цѣлое.

Мы видѣли, что когда въ слѣдствіи M цѣлаго было и $A - B$ — цѣлое относительно x , то ур—ніе $M(A - B) = 0$ имѣло больше корней чѣмъ ур—ніе $A - B = 0$, и этими лишними корнями были тѣ значенія неизвѣстнаго, при которыхъ M обращалось въ нуль. Но если, при цѣломъ M , $A - B$ будетъ дробное, то уже нельзя утверждать, чтобы ур—ніе $M(A - B) = 0$ удовлетворялось и всѣми корнями ур—нія $M = 0$; ибо можетъ случиться, что нѣкоторые изъ корней ур—нія $M = 0$ обратятъ $A - B$ въ ∞ , и тогда произведеніе $M(A - B)$ не необходимо будетъ нулемъ, но можетъ быть и отличнымъ отъ нуля. Это значитъ, что умноженіе на M , въ данномъ случаѣ, можетъ и не ввести постороннихъ рѣшеній; иначе говоря, можетъ получиться ур. эквивалентное данному.

262. Случай дробнаго ур—нія и цѣлаго множителя особенно важенъ, ибо онъ встрѣчается при освобожденіи ур—нія отъ дробей: поэтому мы должны рассмотреть съ особеннымъ вниманіемъ всѣ представляемыя имъ обстоятельства.

Примемъ, для большаго удобства, предположимъ, что всѣ члены перенесены въ первую часть, приведены къ общему знаменателю и соединены въ одну дробь $\frac{P}{Q}$, гдѣ P и Q — цѣлые относительно x полиномы. Ур. приметъ видъ

$$\frac{P}{Q} = 0;$$

оно всегда м. б. приведено къ этому виду.

Рѣшить это уравненіе — значитъ найти для неизвѣстнаго такіа значенія, при которыхъ дробь $\frac{P}{Q}$ обратилась бы въ нуль; но дробь можетъ обратиться въ нуль только при слѣдующихъ обстоятельствахъ:

1 Если числитель обращается въ нуль, а знаменатель при этомъ остается отличнымъ отъ нуля.

2. Если знаменатель обращается въ безконечность, а числитель не дѣлается безконечностью.

3 Если числитель и знаменатели обращаются: оба въ нуль, или же оба въ ∞ , и истинная величина полученныхъ неопредѣленныхъ формъ равна 0.

Разберемъ эти обстоятельства.

1. Во-первыхъ, числитель обращается въ нуль при значеніяхъ x , равныхъ корнямъ ур—нія $P = 0$. Поэтому, приравнявъ числителя нулю, опредѣляемъ всѣ корни уравненія $P = 0$. Затѣмъ, каждый изъ найденныхъ корней подставляемъ въ знаменателя Q : всѣ корни ур—нія $P = 0$, не обращающіе знаменателя Q въ нуль, обращаютъ въ нуль дробь $\frac{P}{Q}$, поэтому удовлетворяютъ данному уравненію $\frac{P}{Q} = 0$; если же при какомъ-либо корнѣ $x = \alpha$ ур—нія $P = 0$ и знаменатель Q обратится въ 0, такъ что дробь $\frac{P}{Q}$ приметъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, нужно будетъ найти истинное значеніе этой неопредѣленности; если это истинное значеніе будетъ нуль, то $x = \alpha$ удовлетворяетъ данному ур—нію; если же истинная величина неопредѣленности, при $x = \alpha$, будетъ отлична отъ нуля, корень α слѣдуетъ отбросить.

2. Во-вторыхъ, такъ какъ знаменатель Q есть полиномъ цѣлый по буквѣ x , то онъ можетъ обратиться въ ∞ только при $x = \infty$; но при этомъ и числитель, какъ цѣлый полиномъ относительно x , также обратится въ ∞ , дробь же $\frac{P}{Q}$ приметъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$; истинная величина этой неопредѣленной формы будетъ нулемъ только тогда, когда степень знаменателя выше степени числителя. Въ этомъ, и только въ этомъ случаѣ, ур. $\frac{P}{Q} = 0$ будетъ имѣть безконечный корень.

Это изслѣдованіе приводитъ къ слѣдующему заключенію: для рѣшенія ур—нія, содержащаго неизвѣстное въ знаменателяхъ дробей, собираемъ всѣ члены въ первую часть, приводимъ ихъ къ общему знаменателю и соединяемъ въ одну дробь; приравнявъ числителя этой дроби нулю, рѣшаемъ уравненіе $P = 0$. Если окажется, что ни одинъ изъ корней этого ур. не обращаетъ знаменателя Q въ нуль, то заключаемъ, что ур. $P = 0$ эквивалентно данному, если оставить въ сторонѣ безконечные корни.

Если же окажется, что какой-либо изъ корней ур—нія $P = 0$ обращаетъ и знаменателя Q въ нуль, то истинная величина дроби $\frac{P}{Q}$ при этомъ частномъ значеніи x покажетъ, слѣдуетъ ли его удержатъ или отбросить.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ въ поясненіе этого правила.

Примѣръ I. Рѣшить уравненіе

$$\frac{(x-1)^2(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2} = 0 \dots (1).$$

Приравнявъ числителя нулю, рѣшаемъ уравненіе:

$$(x-1)^2(x+2)(x-3) = 0 \dots (2)$$

Произведение $(x-1)^2(x-2)(x-3)$ обращается въ 0 при $x=1$, при $x=2$ и при $x=3$. Слѣд. (2) имѣть три корня.

$$x' = 1; \quad x'' = -2; \quad x''' = 3.$$

Подставляем каждый изъ нихъ, поочередно, въ знаменатели. При $x=1$ знаменатель обращается въ 0, а вся первая часть въ $\frac{0}{0}$: но сокративъ дробь на $x-1$, и положивъ затѣмъ $x=1$, находимъ, что истинная величина первой части ур—нія (1) есть 0. Заключаемъ, что $x'=1$ есть одинъ изъ корней ур—нія (1).

При $x=-2$, знаменатель снова обращается въ 0, а первая часть ур—нія (1) въ $\frac{0}{0}$: но истинная величина этой неопредѣленности, при $x=-2$, есть ∞ , слѣд. корень $x''=-2$ не удовлетворяетъ данному ур—нію.

Наконецъ, корень $x'''=3$, обращая числителя въ 0, знаменателя — дѣлаетъ конечнымъ, а потому удовлетворяетъ ур—нію (1).

Замѣчая, наконецъ, что степени знаменателя ур (1) выше степени числителя (числитель 4-й степени относительно x , а знаменатель 6-я), заключаемъ, что данное ур. имѣетъ еще безконечныя корни.

Итакъ, данное ур. имѣетъ три корня:

$$1, 3 \text{ и } \infty.$$

Примѣръ II. Рѣшить уравненіе

$$1 + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 6.$$

Собравъ все члены въ 1-ую часть и соединивъ ихъ въ одну дробь, найдемъ уравненіе

$$\frac{x^2 - 7x - 6}{1-x} = 0;$$

т.е. разложивъ числитель на множители и умноживъ обѣ части на $1-x$, получимъ

$$\frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)} = 0$$

Приравнявъ числитель нулю, находимъ уравненіе $(x-1)(x-6) = 0$, которое имѣетъ, какъ легко видѣть, два корня: $x'=1$ и $x''=6$. Изъ нихъ второй, какъ обращающій знаменателя въ конечную величину 5, удовлетворяетъ и данному уравненію. Первый же, т.-е. 1, обращаетъ дробь $\frac{(x-1)(x-6)}{x-1}$ въ $\frac{0}{0}$: истинная величина этой неопредѣленности, при $x=1$, есть не 0, а 5, сл. корень $x=1$ не удовлетворяетъ предложенному уравненію.

Наконецъ, данное ур. не имѣетъ безконечнаго корня, ибо степень числителя дроби $\frac{x^2 - 7x - 6}{x-1}$ выше степени ея знаменателя.

Итакъ, данное ур. имѣетъ одинъ корень: $x=6$.

Рѣшеніе уравненій 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

263. Доказанныхъ началъ совершенно достаточно для рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Механизмъ рѣшенія укажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Примѣръ I. Рѣшить уравненіе

$$\frac{7}{6}x - \frac{x}{4} + \frac{5x}{3} = \dots (1).$$

Освобождаемъ уравненіе отъ дробей, умножая обѣ части его на общаго знаменателя 12; получимъ

$$\frac{7 \times 12}{6} - \frac{x \times 12}{4} - 4 \times 12 = \frac{5x \times 12}{3}.$$

или, по сокращеніи,

$$14 - 3x = 48 - 20x \dots (2).$$

Перенесемъ, затѣмъ, неизвѣстные члены въ первую часть, а извѣстные во вторую, найдемъ ур.

$$20x - 3x = 48 - 14;$$

сдѣлавши приведеніе въ той и другой части,

$$17x = 34; \dots (3);$$

наконецъ, раздѣливши обѣ части на коэффициентъ 17 при неизвѣстномъ, имѣемъ:

$$x = \frac{34}{17} \text{ или } x = 2 \dots (4).$$

Уравненія (1), (2), (3) и (4) все эквивалентны между собою: въ самомъ дѣлѣ, каждое изъ нихъ мы выводимъ изъ предыдущаго или умноженіемъ, или дѣленіемъ обѣихъ частей на одно и то же число, или перенесеніемъ членовъ изъ одной части въ другую; а все эти преобразованія не измѣняютъ корней уравненія. Но уравненіе (4), очевидно, можетъ быть удовлетворено лишь целымъ числомъ x равною 2; слѣд. 2 служитъ и корнемъ уравненія (1), эквивалентнаго (4).

Изъ предыдущаго выводимъ слѣдующее:

Общее правило. Для рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ нужно:

1. Освободить уравненіе отъ дробей, если таковыя имѣются;
2. Перенести все члены, содержащіе неизвѣстное, въ одну часть, а все извѣстные члены въ другую;
3. Сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, т.-е. все члены, содержащіе неизвѣстное, соединить въ одинъ членъ, а также и члены извѣстные;
4. Раздѣлить обѣ части полученнаго так. обр. уравненія на коэффициентъ при неизвѣстномъ; частное и будетъ корнемъ предложеннаго уравненія.

Примѣръ II. Рѣшить уравненіе

$$\frac{x+1}{2} + \frac{1}{3}(x+2) = 16 - \frac{1}{4}(x+3).$$

Умноживъ обѣ части на 12—общаго знаменателя дробей, получимъ

$$6(x+1) + 4(x+2) = 192 - 3(x+3);$$

раскрывъ скобки, пайдёмъ

$$6x + 6 + 4x + 8 = 192 - 3x - 9;$$

сдѣлавъ приведеніе въ каждой части уравненія, получимъ болѣе простое уравненіе

$$10x + 14 = 183 - 3x;$$

по перенесеніи членовъ, имѣемъ

$$10x + 3x = 183 - 14,$$

по приведеніи:

$$13x = 169.$$

Отсюда, раздѣливъ обѣ части на 13, имѣемъ

$$x = 13.$$

Повѣрка. Подставимъ вмѣсто x въ данное уравненіе 13, получимъ

$$\frac{13+1}{2} + \frac{1}{3}(13+2) = 16 - \frac{1}{4}(13+3), \text{ или } 7 + 5 = 16 - 4, \text{ или } 12 = 12.$$

Слѣд. найденное рѣшеніе въ самомъ дѣлѣ удовлетворяетъ данному уравненію.

Примѣръ III. Рѣшить уравненіе

$$5x - 9 - \frac{4x}{3} = 7x - 19$$

Освободивъ отъ дробей, получимъ

$$15x - 27 - 4x = 21x - 57;$$

по перенесеніи членовъ имѣемъ:

$$15x - 4x - 21x = 27 - 57;$$

по приведеніи:

$$-10x = -30.$$

Умноживъ обѣ части на -1 , найдемъ

$$10x = 30;$$

откуда

$$x = 3.$$

Повѣрка не представляетъ никакого затрудненія.

Примѣръ IV. Рѣшить уравненіе

$$\frac{6x+7}{15} - \frac{2x-2}{7x-6} = \frac{2x+1}{5} \dots (1).$$

Умножаемъ обѣ части на $15(7x-6)$ и рѣшаемъ полученное уравненіе: если найденный корень не обращаетъ въ нуль знаменателя, то онъ удовлетворяетъ данному уравненію. Но знаменатель $15(7x-6)$ обращается въ нуль при $x = \frac{6}{7}$; сл. если корень освобожденнаго отъ дробей уравненія будетъ отличенъ отъ $\frac{6}{7}$, онъ удовлетворяетъ предложенному уравненію.

Освобожденное отъ дробей уравненіе есть

$$(6x-7)(7x-6) - (2x-2)15 - 3(2x+1)(7x-6)$$

или, собирая всѣ члены въ первую часть и въ двухъ нѣтъ нѣтъ вывода за скобки $7x-6$, находимъ

$$(7x-6) \cdot 4 - 30(x-1) = 0, \text{ или}$$

$$28x - 24 - 30x + 30 = 0, \text{ или}$$

$$-2x = -6, \text{ откуда}$$

$$x = 3.$$

Итакъ, данному уравненію удовлетворяетъ значеніе x , равное 3, въ чемъ не трудно убѣдиться повѣркою.

Примѣръ V. Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{x}{x^2+5x+6} - 4 = \frac{9+4x}{x+3} \dots (1).$$

Для нахождения общаго знаменателя, разлагаемъ на множители знаменатели первой части уравненія; находимъ:

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2);$$

$$x^2+4x+3 = (x+1)(x+3);$$

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3);$$

общій знаменатель $= (x+1)(x+2)(x+3)$.

Умноживъ обѣ части на общаго знаменателя и сдѣлавъ надлежащія сокращенія въ дробныхъ членахъ, имѣемъ:

$$x+3 - 2x(x+2) + x^2+x = 4(x+1)(x+2)(x+3) - (9+4x)(x+1)(x+2),$$

или

$$3x^2+6x+3 = 4x^3+24x^2+44x+24 - 4x^3-21x^2-35x-18,$$

или, по приведенія во второй части и по отнятіи отъ обѣихъ частей по $3x^2$, имѣемъ:

$$6x+3 = 9x+6 \dots (2).$$

Это уравнение не необходимо эквивалентно данному, такъ какъ оно получено умноженіемъ даннаго на выраженіе $(x-1)(x+2)(x+3)$, содержащее неизвѣстное. Но если корень (2) не обращаетъ въ нуль общаго знаменателя, то онъ удовлетворяетъ и ур-нію (1); общій же знаменатель обращается въ 0 при значеніяхъ x , равныхъ 1, — 2 и 3; поэтому, если корень ур-нія (2) не равенъ ни одному изъ этихъ чиселъ, то онъ необходимо удовлетворяетъ данному ур-нію; если же равенъ одному изъ этихъ чиселъ, то необходимо дальнейшее изслѣдованіе.

Рѣшая ур. (2) имѣемъ:

$$6x - 9x = 6 - 3$$

или

$$-3x = 3,$$

откуда

$$x = -1.$$

Перенеся всѣ члены даннаго ур-нія въ первую часть и соединивъ ихъ въ одну дробь, имѣемъ

$$\frac{-3x-3}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{3(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0.$$

Первая часть, при $x = -1$, обращается въ 0; но, сокративъ на $x-1$, и положивъ затѣмъ $x = -1$, найдемъ

$$-\frac{3}{2}, \text{ что не } = 0,$$

след. — 1 не есть корень даннаго ур-нія. Но какъ степень знаменателя дроби $\frac{-3(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ выше степени числителя, то данное ур. имѣетъ корень $= \infty$.

Примѣръ VI. Рѣшить уравненіе

$$\frac{2x+7b}{2a+b} = 1 + \frac{x+a}{2a-b}.$$

Умноживъ обѣ части на общаго знаменателя $(2a+b)(2a-b)$, найдемъ

$$(2x+7b)(2a-b) = (2a+b)(2a-b) + (x+a)(2a+b),$$

или, выполнивъ указанныя дѣйствія,

$$4ax + 14ab - 2bx - 7b^2 = 4a^2 - b^2 + 2ax + 2a^2 + bx + ab,$$

а по перенесеніи членовъ,

$$4ax - 2bx - 2ax - bx = 4a^2 - b^2 + 2a^2 + ab - 14ab - 7b^2, \quad \text{или}$$

$$(2a-3b)x = 6a^2 - 13ab + 6b^2, \quad \text{откуда}$$

$$x = \frac{6a^2 - 13ab + 6b^2}{2a - 3b}.$$

Совершивъ дѣленіе, найдемъ окончательно

$$x = 3a - 2b.$$

Если значенія, данныя буквамъ a и b , обращаютъ одного изъ знаменателей въ нуль, тогда мы уже не имѣли бы права умножать ур. на произведение $(2a + b)(2a - b)$, какъ равное 0; но въ этомъ случаѣ само ур., содержа дробь съ знаменателемъ равнымъ 0, не имѣло бы никакого смысла.

Примѣръ VII. Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{x-6a} + \frac{2}{x+3a} + \frac{3}{x-2a} - \frac{6}{x-a} = 0 \dots (1).$$

Приводя къ общему знаменателю, имѣемъ:

$$(x+3a)(x-2a)(x-a) + 2(x-6a)(x-2a)(x-a) + 3(x-6a)(x+3a)(x-a) - 6(x-6a)(x+3a)(x-2a) = 0.$$

Числитель ч. б. упрощенъ: вынося въ первыхъ двухъ членахъ общій множитель $(x-2a)(x-a)$, а въ двухъ послѣднихъ $3(x-6a)(x+3a)$, найдемъ

$$\begin{aligned} & (x-2a)(x-a)[x-3a+2x-12a] + 3(x-6a)(x+3a)[x-a-2x+4a] - \\ & (x-2a)(x-a)(3x-9a) - 3(x-6a)(x+3a)(-x+3a) = \\ & 3(x-2a)(x-a)(x-3a) - 3(x-6a)(x+3a)(x-3a) = \\ & 3(x-3a)[(x-2a)(x-a) - (x-6a)(x+3a)] = 3(x-3a) \times 20a^2. \end{aligned}$$

Уравненіе принимаетъ, поэтому, видъ

$$\frac{30a^2(x-3a)}{(x-6a)(x-3a)(x-2a)(x-a)} = 0 \dots (2).$$

Числитель обращается въ 0 только при $x = 3a$; и какъ это значеніе x не обращаетъ въ нуль знаменателя, то оно уд.—тъ и ур.—ню (1). Кроме того, данное ур. имѣетъ еще безконечный корень, ибо степень знаменателя выше степени числителя. Итакъ, ур. имѣетъ два корня

$$x' = 3a, \text{ и } x'' = \infty.$$

Проѣрка. Подставляя $3a$ вмѣсто x въ данное ур., находимъ

$$\frac{1}{3a} + \frac{2}{6a} + \frac{3}{a} - \frac{6}{2a} = 0, \text{ или } -\frac{1}{3a} + \frac{1}{3a} + \frac{3}{a} - \frac{3}{a} = 0,$$

что вѣрно.

Подставивъ ∞ вмѣсто x , замѣчаемъ, что каждый членъ первой части обращается въ 0, сл. ур. также обращается въ тождество $0 = 0$.

Задачи, приводящія къ уравненіямъ 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

264. Рѣшеніе задачъ средствами алгебры состоятъ изъ четырехъ частей:

1) *составленія уравненій или неравенствъ* изъ условий, связывающихъ данныя величины съ неизвѣстными;

2) *решения* полученных *уравнений* или *исравнензъ*;

3) *ислѣдованія задачи*, т.-е. а) опредѣленія условій, которыми должны удовлетворяться данныя (предполагая, что они изображены буквами), для того чтобы задача была возможна; б) опредѣленія числа рѣшеній въ случаяхъ возможности задачи, и с) разсмотрѣнія всякихъ представляемыхъ ею особенностей.

4) *ислѣдки* найденныхъ *рѣшеній*, служащей удостовѣреніемъ въ правильности рѣшенія задачи.

Въ этой главѣ мы займемся рѣшеніемъ только такихъ задачъ, которыя сводятся къ уравненіямъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; а изслѣдованію рѣшеній займемся въ отдѣльной главѣ, не касаясь пока этого вопроса.

Что касается составленія уравненій изъ условій задачи, то на этотъ счетъ никакихъ общихъ правилъ; все, что можно сказать по этому предмету, сводится къ слѣдующему: назвавъ неизвѣстное (мы ограничиваемся здѣсь случаемъ одного неизвѣстнаго) буквою x , обозначаютъ при помощи этой буквы и данныхъ задачи всѣ дѣйствія, какія должно бы было произвести надъ ними для достиженія рѣшенія, предполагая, что неизвѣстное найдено; такимъ образомъ получаютъ выраженія, которые, по условію задачи, должны быть равны: соединивъ ихъ знакомъ равенства, и получивъ искомое уравненіе.

Укажемъ примѣненіе этого правила на нѣсколькихъ вопросахъ.

265. Первая задача. *Часовая и минутная стрѣлка находятся вмѣстѣ, показывая полдень. Въ какомъ часу произойдетъ слѣдующая ихъ встрѣча?*

Составленіе уравненія. Циферблатъ часовъ раздѣленъ на 60 равныхъ частей, каждую изъ которыхъ большая стрѣлка проходитъ въ минуту времени, и пусть отъ полудня до встрѣчи стрѣлокъ малая стрѣлка прошла x такихъ дѣленій. Минутная стрѣлка, чтобы догнать часовую, должна обойти весь циферблатъ, т.-е. пройти 60 дѣленій, да еще x дѣленій, пройденныхъ часовой, всего $60 + x$ дѣленій. Но въ то время какъ часовая проходитъ 5 дѣленій (отъ XII до I), минутная стрѣлка проходитъ 60 такихъ дѣленій, сл. въ 12 разъ большее число ихъ. Изъ этого слѣдуетъ, что въ одно и то же время путь, пройденный минутною стрѣлкою, въ 12 разъ больше пути, пройденнаго часовой, т.-е. $60 + x$ въ 12 разъ больше x .

Итакъ, пишемъ уравненіе

$$60 + x = 12x.$$

Рѣшеніе уравненія. Перенесъ x во вторую часть, находимъ

$$60 = 11x;$$

откуда

$$x = \frac{60}{11} = 5 \frac{5}{11}.$$

Слѣд., до встрѣчи стрѣлокъ часовая должна пройти $5 \frac{5}{11}$ минутн. дѣленій, т.-е. встрѣча произойдетъ въ 1 ч. $5 \frac{5}{11}$ мин.

Проверка. Пространство, пройденное минутною стрѣлкою, должно быть въ 12 разъ больше разстоянія, пройденнаго часовой; и въ самомъ дѣлѣ

$$65 \frac{5}{11} : 5 \frac{5}{11} = \frac{720}{11} : \frac{60}{11} = 12.$$

266. Вторая задача. Въ трехзначномъ числѣ цифра десятковъ вдвое больше цифръ сотенъ, цифра же единицъ второе больше цифръ сотенъ; если къ искомому числу прибавить 396, найдемъ число обращенное, т.-е. составленное тѣми же цифрами какъ и искомое, но написанными въ обратномъ порядкѣ. Определить неизвѣстное число?

Составленіе уравненія. Пусть цифра сотенъ искомага числа будетъ x ; тогда цифра десятковъ выразится черезъ $2x$, а цифра единицъ формулою $3x$. Все число единицъ въ искомомъ числѣ будетъ

$$100x + 20x + 3x.$$

Число единицъ въ обращенномъ числѣ будетъ

$$300x + 20x + x.$$

Придавъ къ первому 396, найдемъ число обращенное; слѣдов.

$$100x + 20x + 3x + 396 = 300x + 20x + x.$$

Рѣшеніе уравненія. Отнявъ отъ обѣихъ частей по $20x$, собравъ неизвѣстныя члены въ одну часть и сдѣлавъ приведеніе, получимъ

$$396 = 198x,$$

откуда

$$x = \frac{396}{198} = 2.$$

Итакъ, число сотенъ искомага числа равно 2; слѣд. число десятковъ = 4, а число единицъ 6. Поэтому искомое число есть 246.

Проверка. Придавъ къ найденному числу 396, должны получить обращенное число, т.-е. 642; и действительно

$$246 + 396 = 642.$$

267. Третья задача. Два капитала составляютъ въ совокупности 167280 руб. Первый, помѣщенный на 4%, принесъ бы въ 3 м. прибыль вдвое большую той, какую можетъ принести второй капиталъ, помѣщенный на 5%, въ 7 мѣсяцевъ. Определить оба капитала?

Составленіе уравненія. Пусть первый капиталъ — x ; тогда второй будетъ = 167280 — x руб. Каждая сотня перваго капитала, принося въ 1 годъ 4 руб. прибыли, дастъ въ 1 мѣсяць $\frac{4}{12}$, въ 3 мѣсяца $\frac{4}{12} \cdot 3$ или 1 руб.; слѣд. каждый рубль перваго капитала принесетъ $\frac{1}{100}$ руб. прибыли, а x рублей $x \cdot \frac{1}{100}$.

Такимъ же точно образомъ найдемъ, что капиталъ 167280 — x р., при 5%, дастъ въ 7 мѣсяцевъ

$$\frac{(167280 - x) \times 5 \times 7}{100 \times 12} \quad \text{или} \quad \frac{(167280 - x) \times 35}{100 \times 12} \quad \text{р. прибыли.}$$

По условию, первая прибыль вдвое больше второй, слѣд.

$$\frac{r}{100} = \frac{(167280 - x) \times 35 \times 2}{100 \times 12}$$

Рѣшеніе уравненія. Освободивъ это ур. отъ дробей, имѣемъ

$$\begin{aligned} 12x &= 167280 \times 70 - 70x, \\ 12x + 70x &= 167280 \times 70, \\ 82x &= 167280 \times 70, \\ x &= \frac{167280 \times 70}{82} = 142800 \text{ р.} \end{aligned}$$

Итакъ: капиталъ, помѣщенный на 4%, 142800 р.; капиталъ, помѣщенный на 5%, 167280 - 142800 = 24480 р.

Проѣрка. Прибыль, приносимая первымъ капиталомъ, равна $\frac{142800 \times 35 \times 2}{12 \times 100}$

1428 р.; вторымъ $-\frac{24480 \times 35 \times 2}{12 \times 100} = 714$. Дѣйствительно, 1428 больше 714 въ 2 раза.

268. Четвертая задача. Лисица, преслѣдуемая собакою, находитъ впередъ постѣпей на 60 своихъ скачковъ, и дѣлаетъ 9 скачковъ въ то время, въ какое собака дѣлаетъ только 6; но 3 скачка собаки равны 7 скачкамъ лисицы. Сколько скачковъ должна сдѣлать собака, чтобы догнать лисицу?

Когда въ задачѣ рѣчь идетъ о разстояніяхъ, полезно изображать ихъ линіями: зная путь, мы яснѣе представимъ себѣ зависимость между величинами и скорѣе съумѣемъ составить ур—ніе.

Предложенная задача представляетъ примѣръ этого рода.

Составленіе уравненія. Пусть N (см. черт. 3) означаетъ мѣсто, въ которомъ находится собака; O — мѣсто, въ которомъ въ тотъ же самый моментъ находится лисица; M — точка, въ которой собака настигаетъ лисицу. Пусть, значитъ, собака должна сдѣлать x скачковъ, чтобы догнать лисицу, т. е. чтобы пробѣжать разстояніе NM.

Выразимъ черезъ x число скачковъ, которое должна сдѣлать лисица на разстояніи OM. Въ то время какъ собака дѣлаетъ 6 скачковъ, лисица дѣлаетъ 9, сл. пока собака дѣлаетъ 1 скачекъ, лисица дѣлаетъ $\frac{9}{6}$ или $\frac{3}{2}$ скачка; значитъ, въ то время какъ собака дѣлаетъ x скачковъ отъ N до M, лисица дѣлаетъ x разъ $\frac{3}{2}$ или $\frac{3x}{2}$ скачковъ отъ O до M.

Итакъ, на одномъ и томъ же разстояніи NM, собака дѣлаетъ x скачковъ, а лисица $60 + \frac{3x}{2}$ (60 скачковъ на разстояніи отъ N до O).

Положимъ скачекъ лисицы за единицу мѣры: тогда разстояніе NM, выраженное въ этихъ единицахъ, будетъ $1 \times 60 + \frac{3x}{2}$ или $60 + \frac{3x}{2}$ принятыхъ скачковъ.

С другой стороны, 3 скачка собаки равны 7 скачкамъ лисицы, сл. 1 скачекъ собаки $= \frac{7}{3}$ скачка лисицы; а потому x скачковъ собаки $= \frac{7x}{3}$ принятыхъ

единицамъ: это другая формула, выражающая разстояніе NM въ тѣхъ же единицахъ, какъ и формула $60 + \frac{3x}{2}$.

Приравнивая одну формулу другой, имѣемъ ур—ніе

$$\frac{7x}{3} = 60 + \frac{3x}{2}.$$

Рѣшеніе уравненія. Освобождая ур. отъ дробей умноженіемъ обѣихъ частей на 6, получаемъ

$$14x = 360 + 9x,$$

$$5x = 360,$$

$$x = \frac{360}{5} = 72.$$

Итакъ, собака сдѣлала 72 скачка, чтобы догнать лисицу

Повѣрка не представляетъ затрудненій.

269. Пятая задача. Два поезда выходятъ одновременно со станцій А и В и идутъ на встрѣчу другъ другу: первый все разстояніе АВ можетъ пройти въ 4 ч. 20 м.; второй на прохожденіе того же пути употребляетъ 3 ч. 30 м. Разстояніе отъ А до В равно 211 верстамъ. На какомъ разстояніи отъ А оба поезда встрѣтятся, полагая, что каждый движется все время съ одинаковою скоростью?

Составленіе уравненія. Пусть будетъ x искомое разстояніе, т.-е. числ. верстъ отъ А до мѣста встрѣчи; разстояніе отъ мѣста встрѣчи до В равно, поэтому, $211 - x$. Такъ какъ оба поезда выходятъ со станцій одновременно, то до встрѣчи они находятся въ дорогѣ *одинаковое время*; выразивъ эти времена и приравнявъ полученные выраженія, и найдемъ искомое уравненіе.

Первый поездъ въ 4 ч. 20 м. или въ 260 м. можетъ пройти 211 верстъ, сл. чтобы пройти одну версту, времени нужно $\frac{260}{211}$ мин., а для прохожденія x верстъ $\frac{260x}{211}$ мин. Такимъ же разсужденіемъ убѣдимся, что второму поезду для прохожденія $211 - x$ верстъ потребуется $\frac{210(211 - x)}{211}$ мин. Сл. ур—ніе есть

$$\frac{260x}{211} = \frac{210(211 - x)}{211}.$$

Рѣшеніе уравненія. Освобождая отъ дробей, имѣемъ

$$260x = 210(211 - x);$$

выполняя умноженіе и перенося члены:

$$260x + 210x = 44310;$$

$$470x = 44310;$$

$$x = \frac{44310}{470} = 94\frac{13}{47} \text{ версты.}$$

Итак, встреча произойдет въ разстояніи $94\frac{13}{47}$ версты отъ А.

Проверить рѣшеніе нетрудно.

270. Шестая задача. Раздѣлить 5600 р. между пятью лицами такъ, чтобы 2-е имѣло вдвое больше 1-го и еще 200 р.; 3-е втрое больше 1-го безъ 400 руб.; 4-е полусумму частей 2-го и 3-го и еще 150 р.; 5-е четверть суммы остальныхъ четырехъ и еще 475 руб.

Поставленіе уравненій. Пусть будетъ x часть перваго; часть второго выразимъ формулою $2x + 200$;— 3-го $3x - 400$.

Четвертый получить $\frac{2x + 200 + 3x - 400}{2} + 150$ или $\frac{5x + 100}{2}$.

Сумма частей четырехъ первыхъ лицъ =

$$x + 2x + 200 + 3x - 400 + \frac{5x + 100}{2}, \text{ или } 6x - 200 + \frac{5x + 100}{2},$$

$$\text{или } \frac{17x - 300}{2}.$$

Пятый получить $\frac{17x - 300}{8} + 475$, т.-е. $\frac{17x + 3500}{8}$.

По условію задачи части всѣхъ пяти лицъ въ совокупности составляютъ 5600 р.; отсюда уравненіе

$$\frac{17x - 300}{2} + \frac{17x + 3500}{8} = 5600,$$

Рѣшеніе уравненія. Освобождая уравненіе отъ дробей, находимъ

$$68x - 1200 + 17x + 3500 = 44800;$$

$$85x = 44800 + 1200 - 3500,$$

$$85x = 42500,$$

$$x = \frac{42500}{85} = 500.$$

Итакъ: часть 1-го = 500 р.; часть 2-го = 1200; 3-го = 1100; 4-го = 1300; 5-го = 1500 р.

Проверка. Дѣйствительно, сумма $500 + 1200 + 1100 + 1300 + 1500 = 5600$.

Примѣчаніе. Задача эта приведена какъ примѣръ, указывающій, насколько можно сокращать и приводить въ простѣйшій видъ сложный результатъ, прежде чѣмъ переходить къ слѣдующему.

Въ примѣрахъ съ буквенными данными.

271 Седьмая задача. Число a раздѣлить на m частей, которая бы раздѣлилась бы между собою какъ $m : n$.

Поставленіе уравненія. Пусть первая часть = x ; тогда вторую можно выразить при помощи x изъ пропорціи

$$x : \text{второй части} = m : n,$$

откуда

$$\text{вторая часть} = \frac{nx}{m}$$

Отсюда уравнение

$$x + \frac{nx}{m} = a.$$

Решение уравнения. Умножив обе части на m , найдем

$$mx + nx = am;$$

$$(m + n)x = am;$$

$$x = \frac{am}{m + n}.$$

$$\text{Вторая часть} = \frac{n}{m}x = \frac{n}{m} \cdot \frac{ma}{m + n} = \frac{na}{m + n}.$$

Проверка. Обе части должны въ суммѣ составлять a .

И действительно

$$\frac{ma}{m + n} + \frac{na}{m + n} = \frac{ma + na}{m + n} = \frac{(m + n)a}{m + n} = a.$$

272. Восьмая задача. Никто долженъ уплатить своему заимодавцу нѣсколько суммъ въ различные сроки, а именно: s руб. черезъ m мѣсяцевъ, s' руб. черезъ m' мѣ., s'' руб. по истеченіи m'' мѣсяцевъ, наконецъ s''' руб. черезъ m''' мѣсяцевъ. Заимодавецъ желаетъ получить всю сумму $s + s' + s'' + s'''$ разомъ. Черезъ сколько мѣсяцевъ должна быть произведена та уплата, чтобы ни та ни другая сторона не понесла убытка?

Составленіе уравненія. Допустимъ, что каждыя сто руб. приносятъ заимодавцу $p\%$ въ мѣсяцъ; тогда прибыль, которую заимодавецъ получилъ бы съ перваго капитала при уплатѣ его черезъ m мѣсяцевъ, составляетъ $\frac{spm}{100}$ р.; прибыль, доставляемая вторымъ капиталомъ, при уплатѣ его черезъ m' мѣсяцевъ, равна $\frac{s'pm'}{100}$; третьимъ — $\frac{s''pm''}{100}$; и четвертымъ $\frac{s'''pm'''}{100}$; слѣдов. общая прибыль, которую долженъ получить заимодавецъ, составляетъ $\frac{spm}{100} + \frac{s'pm'}{100} + \frac{s''pm''}{100} + \frac{s'''pm'''}{100}$ р.

Время, по истеченіи котораго вся сумма $s + s' + s'' + s'''$ должна быть уплачена разомъ, должно быть таково, чтобы вся сумма давала прибыль равную вышеозначенной. Пусть это время x мѣсяцамъ; прибыль, доставляемая капиталомъ $s + s' + s'' + s'''$ по истеченіи этого времени, составляетъ

$$\frac{(s + s' + s'' + s''')px}{100} \text{ руб.}$$

Поэтому, уравненіе будетъ

$$\frac{(s + s' + s'' + s''')px}{100} = \frac{spm}{100} + \frac{s'pm'}{100} + \frac{s''pm''}{100} + \frac{s'''pm'''}{100}.$$

Рѣшеніе уравненія. Сокращая обѣ части на общаго множителя $\frac{p}{100}$ на

$$(s + s' + s'' + s''')x = sm + s'm' + s''m'' + s'''m''',$$

$$x = \frac{sm + s'm' + s''m'' + s'''m'''}{s + s' + s'' + s'''},$$

Повѣрка не представляет затрудненій.

ГЛАВА XIX

Уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными.

Опредѣленія.—Начала и методы.

273. Определенія. Одного уравненія со многими неизвѣстными недостаточно для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть два неизвѣстныхъ x и y связаны однимъ уравненіемъ, наприм.

$$4x - 5y = 12.$$

Выражая отсюда x , имѣемъ

$$x = \frac{12 + 5y}{4},$$

откуда видно, что величина x -са зависитъ отъ y , самый же y остается вполне произвольнымъ, такъ что ему можемъ давать какия угодно значенія; такъ, полагивъ

$$y = 0, \text{ находимъ, что } x = \frac{12 + 5 \times 0}{4} = 3.$$

$$y = 1, \quad \text{»} \quad x = \frac{12 + 5 \times 1}{4} = \frac{17}{4};$$

$$y = 2, \quad \text{»} \quad x = \frac{12 + 5 \times 2}{4} = \frac{22}{4}; \text{ и т. д.}$$

Итакъ, одно ур. съ 2 неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, и слѣд. неопредѣленно.

Если уравненіе содержитъ три неизвѣстныхъ, то двумъ изъ нихъ можно дать произвольныя значенія, а третье неизвѣстное получить совершенно опредѣленное. Если же уравн. будетъ имѣть опять безчисленное множество рѣшеній. Вообще, одно уравненіе съ нѣсколькими неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и слѣд. является поэтому неопредѣленнымъ.

Система совместныхъ уравненій. Когда нѣсколько неизвѣстныхъ должны удовлетворять одновременно нѣсколькимъ уравненіямъ, то совокупность ур.—лнн называется *системою совместныхъ уравненій*.

Для того, чтобы систему составлять, очевидно, два уравненія съ двумя неизвѣстными.

Рѣшить систему нѣсколькихъ уравненій со многими неизвѣстными значитъ найти значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія одновременно всѣмъ уравненіямъ. Такъ, система

$$4x - 3y = 8,$$

$$7x + 2y = 43$$

имѣетъ рѣшеніемъ $x = 5$, $y = 4$, потому что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ и то и другое уравненія обращаются въ тождества.

Двѣ системы уравненій называются *эквивалентными*, если они принимаютъ одни и тѣ же рѣшенія.

Начала и методы.

274. Начало первое. Если p , q , p' и q' суть количества конечныя, т.-е. не равныя ни 0, ни ∞ , если притомъ $pq' - p'q$ неравно нулю, то системы

$$\left. \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array} \right\} (1)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} pA + qB = 0 \\ p'A + q'B = 0 \end{array} \right\} (2)$$

эквивалентны.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ:

1) Пусть $x = \alpha$ и $y = \beta$ суть рѣшенія системы (1): это значитъ, что при подстановкѣ въ A и B вмѣсто x количества α и вм. y количества β , A и B обращаются въ нули; но какъ p , q , p' и q' , по условію, конечны, а произведение конечнаго количества на нуль равно 0, то при тѣхъ же значеніяхъ x и y выраженія $pA + qB$ и $p'A + q'B$ обращаются въ нули. Слѣд. $x = \alpha$ и $y = \beta$ удовлетворяютъ системѣ (2).

2) Пусть теперь $x = a$ и $y = b$ будутъ рѣшенія системы (2), т.-е. пусть при этихъ величинахъ x и y выраженія $pA + qB$ и $p'A + q'B$ обращаются въ нули; въ такомъ случаѣ и выраженіе

$$q'(pA + qB) - q(p'A + q'B) \dots (3).$$

въ которомъ q' и q конечны, а $pA + qB$ и $p'A + q'B$ равны нулю, обращается въ нуль; но выраженіе (3) равно

$$(pq' - p'q)A;$$

слѣд. и это послѣднее равно нулю; но по условію $pq' - p'q$ отлично отъ нуля, слѣд. A должно быть равно нулю при $x = a$ и $y = b$. Но тогда и $pA = 0$, а потому ур. $pA + qB = 0$ обращается въ $qB = 0$; а какъ q конечно, то должно быть $B = 0$. Итакъ рѣшенія системы (2) удовлетворяютъ уравненіямъ системы (1).

Мы доказали, что системы (1) и (2) эквивалентны.

На этомъ началѣ основанъ

275. Методъ уравниванія коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ или методъ сложенія и вычитанія.

Пусть имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} 7x + 4y &= 76 \\ 11x - 9y &= 43 \end{aligned} \quad (1).$$

Исключим из этих уравнений неизвестное x ; для этого помножим обе части 1-го ур. на коэффициент 11 при x во втором уравнении, а обе части 2-го ур. на -7 , т.-е. на взятый с обратным знаком коэф. при x в первом ур—нии, и полученные уравнения сложим. Таким обр. получим

$$\begin{aligned} 77x + 44y &= 836 \\ 77x - 63y &= -301 \\ \hline 107y &= 535. \end{aligned}$$

Для исключения y из системы (1), множим обе части первого ур—ния на 9, а обе части второго на 4 и складываем почленно полученные уравнения:

$$\begin{aligned} 63x + 36y &= 684 \\ 44x - 36y &= 172 \\ \hline 107x &= 856. \end{aligned}$$

На основании доказанного начала, система ур—ний

$$107y = 535 \quad \text{и} \quad 107x = 856 \quad . . . (2)$$

эквивалентна данной системе; поэтому решения системы (2) будут удовлетворять и (1). Решая ур—ния (2), находим

$$y = \frac{535}{107} = 5; \quad x = \frac{856}{107} = 8.$$

Нетрудно проверить, что решения

$$x = 8 \quad \text{и} \quad y = 5$$

действительно удовлетворяют данным уравнениям.

Отсюда

Правило. Для наложения одного из неизвестных, напр. x , умножим данные уравнения на такие количества чтобы коэффициенты при одном из неизвестных (y) сделались равными, но имели бы противоположные знаки; зитымъ полученныя новыя ур—ния почленно сложимъ. Такимъ обр. неизвестное y исключится приведеніемъ и получится ур—не съ однимъ неизвестнымъ x , которое уже легко опредѣлить. Подобнымъ же образомъ найдемъ y , исключивши x .

На практикѣ нужно пользоваться всѣми обстоятельствами, ведущими къ упрощенію вычисленій. Пояснимъ это примѣрами.

1. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 5x - 12y &= 17 \\ 3x - 8y &= 71. \end{aligned}$$

Для исключенія y замѣчаемъ, что нѣтъ надобности множить первое ур. на 5, а второе на 12. Въ самомъ дѣлѣ, наимъ кратное чиселъ 12 и 5 есть 24, и для того чтобы коэффициенты при y сдѣлались равными 24, достаточно первое ур. помножить на 2, а второе на 3. Сдѣлавъ это, найдемъ:

$$10x - 24y = 34$$

$$9x + 24y = 213;$$

сложивъ почленно оба ур—нія, найдемъ

$$19x = 247;$$

откуда

$$x = 13.$$

Умноживъ 1-ое ур. на 3, а второе на 5, имѣемъ

$$15x - 36y = 51$$

$$-15x - 40y = -355;$$

сложивъ эти уравненія, получимъ

$$-76y = -304,$$

откуда

$$y = \frac{-304}{-76} = 4.$$

2. Рѣшить уравненія

$$5x + 2y = 40$$

$$11x - 4y = 4.$$

Для исключенія y достаточно первое ур. умножить на 2, а второе оставить безъ переменъ (или, что то же, умножить на 1); найдемъ

$$10x + 4y = 80$$

$$11x - 4y = 4;$$

сложивъ эти уравненія, получимъ

$$21x = 84, \text{ откуда } x = 4.$$

Умноживъ первое ур. на 11, а второе на -5 , находимъ

$$55x + 22y = 440$$

$$-55x + 20y = -20;$$

сложивъ, имѣемъ:

$$42y = 420, \text{ откуда } y = 10.$$

3. Рѣшить ур—нія

$$4x + 9y = 127$$

$$8x - 3y = 23.$$

Умноживъ второе ур. на 3 и сложивъ съ первымъ, найдемъ

$$28x = 196, \text{ откуда } x = 7.$$

Умноживъ первое на — 2 и сложивъ со вторымъ, получимъ

$$-21y = -231, \text{ откуда } y = 11.$$

4. Рѣшить уравненія

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= b. \end{aligned}$$

Рѣшеніе этой системы встрѣчается на каждомъ шагѣ, и весьма просто. Складывая почленно оба ур—нія, получимъ

$$2x = a + b, \text{ откуда } x = \frac{a+b}{2};$$

вычитая изъ перваго второе, имѣемъ:

$$2y = a - b, \text{ откуда } y = \frac{a-b}{2}.$$

5. Рѣшить систему уравненій

$$\begin{aligned} (a+b)x + (a-b)y &= a^2 + 2ab - b^2 \\ (a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y &= a^4 - b^4 - ab(a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Для исключенія y замѣчаемъ, что $a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 - ab + b^2)$, откуда видно, что достаточно первое ур. помножить на $a^2 - ab + b^2$, второе на 1, и изъ перваго вычесть второе.

Сдѣлавъ это, найдемъ

$$\{ (a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a^2 + b^2) \} x = (a^2 + 2ab - b^2)(a^2 - ab + b^2) - \{ a^4 - b^4 + ab(a^2 + b^2) \}$$

или

$$2ab(a+b)x = 2a^2b(a+b),$$

откуда

$$x = a.$$

Для исключенія x , т.-е. для нахождения y , замѣчаемъ, что $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, а слѣд. достаточно, умноживъ первое уравн. на $a^2 - ab + b^2$, а второе на 1, вычесть второе изъ перваго. По упрощеніи, найдемъ

$$y = b.$$

6. Рѣшимъ общія уравненія

$$ax + by = c \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$a'x + b'y = c' \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Для исключенія y умножаемъ 1-е ур. на b' , а второе на $-b$ и складываемъ почленно; так. обр. найдемъ

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

откуда

$$x = \frac{cb - c'b}{ab - a'b}.$$

Для исключения x , съ цѣлю опредѣлить y , умножимъ 1-ое ур. на $-a'$, второе на $+a$; сложивъ почленно оба ур., найдемъ

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c, \dots (4)$$

откуда

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Уравненія (3) и (4) эквивалентны уравненіямъ (1) и (2); въ самомъ дѣлѣ, множителя p, q, p, q имѣютъ здѣсь частныя значенія

$$b', -b, -a', +a;$$

потому эквивалентность обѣихъ системъ имѣетъ мѣсто всякій разъ, когда $ab' - a'b$ не равно нулю. Итакъ: *если $(ab' - a'b)$ отлично отъ нуля, система ур—ній*

$$\left. \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned} \right\}$$

имѣетъ единственное конечное и определенное рѣшеніе:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

276. Начало второе. *Если p и q суть количества конечныя и отличныя отъ нуля, то ур—ние*

$$pA + qB = 0$$

можетъ замѣнить одно изъ ур—ній

$$A = 0, \quad B = 0;$$

то-есть системы

$$\left. \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned} \right\} (1) \quad \equiv \quad \left. \begin{aligned} A &= 0 \\ pA + qB &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

эквивалентны.

Доказательство. Дѣйствительно:

1. Всякое рѣшеніе системы (1), обращая A и B въ нули, обращаетъ pA и qB въ нули, ибо p и q конечны, а слѣд. удовлетворяетъ системѣ (2).

2. Всякое рѣшеніе системы (2), обращая A въ нуль, тѣмъ самымъ удовлетворяетъ первому ур—нію системы (1); но если A обращается въ 0, то и pA равно нулю, а какъ сумма $pA + qB$, которой одно слагаемое равно 0, также обращается въ нуль, то должно и другое слагаемое qB обратиться въ 0; но q конечно, слѣд. B должно равняться 0. А этимъ доказано, что всякое рѣшеніе системы (2), удовлетворяетъ и второму ур—нію системы (1).

Эквивалентность системъ (1) и (2) такимъ образомъ доказана.

На этомъ началѣ основаны методы: *подстановленія, сравненія величинъ неизвѣстныхъ и методъ неопредѣленныхъ множителей или методъ Bezout* (Bezout).

277. Методъ подстановленія. Пусть даны уравненія

$$\begin{cases} ax + by = c & \dots (1) \\ a'x + b'y = c' & \dots (2) \end{cases}$$

Опредѣлимъ изъ ур-нія (1) x , принимая на время y за извѣстное; находимъ

$$x = \frac{c - by}{a} \dots (3)$$

Подставляя эту величину въ ур-ніе (2), находимъ ур.

$$a' \frac{c - by}{a} + b'y = c',$$

которое и рѣшаемъ:

$$\begin{aligned} a'c - a'by + ab'y &= ac' \\ (ab' - a'b)y &= ac' - a'c \dots (4) \end{aligned}$$

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \dots (5)$$

Подставляя эту величину y -ка въ формулу (3), получимъ

$$\begin{aligned} x &= \frac{c - b \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}}{a} \\ &= \frac{cab' - ba'c - bac' + ba'c}{a(ab' - a'b)}, \\ x &= \frac{a(b' - c'b)}{a(ab' - a'b)} = \frac{b - c'b}{ab' - a'b}. \end{aligned}$$

Нужно доказать, что найденныя такимъ образомъ величины x и y удовлетворяютъ предложенной системѣ (1) и (2).

Въ самомъ дѣлѣ, перенесеніемъ ax и by въ другую часть замѣняемъ ур. (1) эквивалентнымъ ему ур-емъ

$$-ax + (c - by) = 0$$

и слѣд. вмѣсто системы (1) и (2) можемъ взять ей эквивалентную:

$$\begin{aligned} -ax + (c - by) &= 0 \dots (1') \\ a'x + b'y &= c' \dots (2). \end{aligned}$$

Помножая обѣ части ур-нія (1') на $\frac{a'}{a}$, а (2) на -1 и складывая почленно, имѣемъ

$$\frac{a'}{a} [-ax + (c - by)] - a'x + b'y = -c';$$

или

$$a' \left(\frac{c - by}{a} \right) + b'y = c'.$$

А потому, на основаніи начала втораго, можемъ систему (1'), (2), а сл. и данную, замѣнить системою

$$(6). \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a' \left(\frac{c - by}{a} \right) + b'y = c', \end{cases}$$

которая и даетъ искомыя рѣшенія.

Ур—вія (6) позволяютъ формулировать слѣд. правило: *Выводимъ изъ одного изъ предложенныхъ ур—ній величину одного изъ неизвѣстныхъ, принимая другое за извѣстное, и подставляемъ эту величину во второе уравненіе. Изъ полученнаго так. обр. уравненія определяемъ то неизвѣстное, которое въ немъ содержится; а внеся найденное неизвѣстное въ первое ур., получимъ изъ него величину и втораго неизвѣстнаго.*

Нужно, впрочемъ, замѣтить, что (4) можно замѣнить ур—мъ (5) лишь тогда, когда $ab' - a'b \geq 0$.

Приводимъ примѣры.

1. Рѣшить систему уравненій

$$3x - 5y = 2$$

$$4x + 2y = 7.$$

Рѣшая первое ур—ніе относительно x , при чемъ y принимаемъ на время за извѣстное, находимъ:

$$x = \frac{2 + 5y}{3}; \quad . . . (1)$$

Подставляя эту величину x во второе уравненіе, имѣемъ:

$$4 \cdot \frac{2 + 5y}{3} + 2y = 7 . . . (2).$$

Такимъ образомъ получаемъ систему уравненій (1) и (2), которая, по доказанному, эквивалентна данной. Рѣшая ур. (2), находимъ

$$y = \frac{1}{2};$$

подставляя $\frac{1}{2}$ вмѣсто y въ ур. (1), получаемъ

$$x = \frac{3}{2}.$$

2. Рѣшить систему уравненій

$$(a^2 - b^2)(5x + 3y) = 2ab(4a - b) . . . (1)$$

$$a^2y - \frac{ab^2c}{b} + (a + b + c)bx - b^2y + ab(a + 2b) . . . (2).$$

Выводимъ изъ перваго ур—нія x , принимая на время y за извѣстное; находимъ

$$x = \frac{2ab(4a - b) - 3(a^2 - b^2)y}{5(a^2 - b^2)}.$$

Подставляя это выражение x въ уравненіе (2), имѣемъ:

$$a^2y - \frac{ab^2c}{a-b} = (a+b+c)b \cdot \frac{[2ab(4a-b) - 3(a^2-b^2)y]}{5a^2-b^2} - b^2y + ab(a+2b).$$

Освобождаемъ это уравненіе отъ дробей, помножая обѣ его части на $5(a^2-b^2)$; найдемъ

$$5a^2(a^2-b^2)y - 5ab^2c(a-b) = 2ab^2(a+b+c)(4a-b) - 3(a^2-b^2)(a+b+c)by - 5a^2b^2y + 5ab(a+2b)(a^2-b^2).$$

Переносимъ неизвѣстныя въ первую часть, а извѣстные члены во вторую и выносимъ за скобки, найдемъ

$$5a^2(a^2-b^2) - 3(a^2-b^2)(a+b+c)b - 5(a^2-b^2)b^2 \mid \cdot y = 5ab(a+2b)(a^2-b^2) + 5ab^2c(a-b) - 2ab^2(a+b+c)(4a-b),$$

гдѣ

$$a^2-b^2 \mid [5a^2-5b^2-3ab-3bc]y = ab(5a^2+2a^2b+11ab^2+3abc-8b^3-3b^2c)$$

откуда

$$y = \frac{ab}{a-b}.$$

Внося эту величину y въ формулу для x , найдемъ

$$x = \frac{ab}{a-b}.$$

278. Методъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ. Пусть требуется рѣшить уравненія

$$ax + by = c \quad . \quad . \quad (1)$$

$$a'x + b'y = c' \quad . \quad . \quad (2).$$

Выражая изъ каждаго уравненія одно неизвѣстное черезъ другое, напр. x черезъ y , найдемъ:

$$x = \frac{c-by}{a} \quad . \quad . \quad (3) \quad \text{и} \quad x = \frac{c'-b'y}{a'} \quad . \quad . \quad (4)$$

Вставивъ въ (4) на мѣсто x его величину изъ (3), находимъ уравненіе

$$\frac{c-by}{a} = \frac{c'-b'y}{a'} \quad . \quad . \quad (5)$$

Соединимъ съ (3) и составимъ систему, эквивалентную данной. Рѣшая (5), найдемъ y ; а подставивъ величину y въ (3), опредѣлимъ x .

Итакъ, надо доказать, что система уравненій (3) и (5) эквивалентна системѣ (1) и (2). Въ самомъ дѣлѣ, перенесемъ by и $b'y$ во вторыя части данныхъ уравненій, найдемъ имъ эквивалентныя:

$$ax = c - by \quad . \quad . \quad (1')$$

$$a'x = c' - b'y \quad . \quad . \quad (2').$$

Помноживъ (1') на $\frac{1}{a}$, и (2') на $-\frac{1}{a'}$, и сложивъ, получимъ

$$0 = \frac{c-by}{a} - \frac{c'-b'y}{a'} \dots (6).$$

а это ур. вмѣстѣ съ (1'), на основаніи начала второго, можетъ замѣнить систему (1') и (2'), а слѣдовательно данную. Умноживъ обѣ части ур—нія (1') на $\frac{1}{a}$, получимъ

$$x = \frac{c-by}{a};$$

а перенеся $-\frac{c'-b'y}{a'}$ изъ второй части ур—нія (6) въ первую, находимъ

$$\frac{c'-b'y}{a'} = \frac{c-by}{a}.$$

ур—нія, эквивалентныя ур—чъ (1') и (6). Такимъ образомъ данная система эквивалентна системѣ

$$x = \frac{c-by}{a} \text{ и } \frac{c-by}{a} = \frac{c'-b'y}{a'};$$

требуемое доказано.

Примѣненіе этого метода, согласно началу II, требуетъ, чтобы a и a' были количества конечныя, отличныя отъ нуля; а рѣшеніе ур—нія (5) требуетъ кромѣ того, чтобы $ab' - a'b$ было отлично отъ нуля.

Изъ сказаннаго выводимъ третій приемъ рѣшенія:

Выводимъ изъ обоихъ данныхъ ур—ній величину одною и того же неизвестнаго, напр. x и полученныя выраженія сравниваемъ; такимъ образомъ получаемъ одно ур. съ однимъ неизвестнымъ y , которое и определяемъ. Внеся найденную для y величину въ одну изъ формулъ для x , находимъ и это неизвестное.

Примѣръ. Рѣшить систему

$$x + \frac{1}{2}(3x - y - 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(y - 1).$$

$$\frac{1}{5}(4x + 3y) = \frac{7y}{10} + 2$$

Освобождаемъ ур—нія отъ дробей, и для этого умножимъ обѣ части перваго на 4, а второго на 10. Находимъ:

$$4x + 2(3x - y - 1) = 1 + 3(y - 1).$$

$$2(4x + 3y) = 7y + 20.$$

По перенесеніи членовъ и по упрощеніи, имѣемъ

$$10x - 5y = 0, \text{ или } 2x - y = 0,$$

$$8x - y = 20.$$

Опредѣляя изъ каждаго уравненія y , получаемъ:

$$y = 2x \quad \text{и} \quad y = 8x - 20.$$

Сравнивая оба выраженія для y , находимъ

$$2x = 8x - 20, \quad \text{или} \quad -6x = -20; \quad \text{откуда}$$

$$x = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Вставляя найденное для x число въ формулу $y = 2x$, найдемъ

$$y = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

279. Методъ Безу. Этотъ методъ по существу одинаковъ съ методомъ уравниванія коэффициентовъ или сложения и вычитанія. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ. Помноживъ одно изъ данныхъ уравненій на произвольнаго множителя, събавляютъ къ нему или вычитаютъ изъ него другое, и получаютъ такимъ образомъ уравненіе, содержащее оба неизвѣстныхъ и произвольный множитель. Произвольнаго пользуются для исключенія одного изъ неизвѣстныхъ, и тѣмъ, для полученія одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Приложимъ этотъ методъ къ системѣ

$$6x + 7y = 46 \quad . \quad . \quad (1)$$

$$5x + 3y = 27 \quad . \quad . \quad (2).$$

Помножимъ первое уравн. на произвольнаго множителя m и изъ полученнаго уравненія вычтемъ второе (или, что тоже, прибавимъ (2), помноженное на -1); получимъ

$$6mx - 5x + 7my - 3y = 46m - 27, \quad \text{или}$$

$$(6m - 5)x + (7m - 3)y = 46m - 27.$$

Это уравн. въ соединеніи съ однимъ изъ данныхъ, напр. съ (2), составляетъ, въ силу начала втораго, систему, эквивалентную данной. Такимъ образомъ вопросъ приводится къ рѣшенію уравненія

$$(6m - 5)x + (7m - 3)y = 46m - 27 \quad . \quad . \quad (3)$$

$$5x + 3y = 27 \quad . \quad . \quad (4).$$

Произвольнаго количества m воспользуемся для исключенія одного изъ неизвѣстныхъ, напр. y . Для этого опредѣлимъ m подъ условіемъ, чтобы коэффиціентъ при y обратился въ нуль, т.е. чтобы

$$7m - 3 = 0 \quad . \quad . \quad (5).$$

Но значеніе m , обращающее $7m - 3$ въ нуль, есть корень уравненія (5); его найдемъ, рѣшивъ это уравн.:

$$m = \frac{3}{7}.$$

Подставивъ въ уравненіе (3) $\frac{3}{7}$ вмѣсто m , получимъ ур. съ однимъ неизвѣстнымъ x , именно:

$$(6 \cdot \frac{3}{7} - 5)x = 46 \cdot \frac{3}{7} - 27, \text{ откуда } x = 3.$$

Подставляя найденную для x величину въ ур. (4), найдемъ

$$5 \cdot 3 + 3y = 27, \text{ откуда } y = 4.$$

Приложимъ способъ Безу къ рѣшенію системы двухъ уравненій въ общемъ видѣ:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c'. \end{aligned}$$

Умножимъ первое уравненіе на произвольнаго множителя m и вычитаемъ изъ него второе уравненіе; найдемъ

$$(am - a')x + (bm - b')y = cm - c'.$$

Для исключенія y положимъ $bm - b' = 0$, откуда $m = \frac{b'}{b}$.

Вставимъ это значеніе m въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$\frac{ab'}{b} - a'x = \frac{cb'}{b} - c';$$

умноживъ обѣ части на b , находимъ:

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b, \text{ откуда } x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}.$$

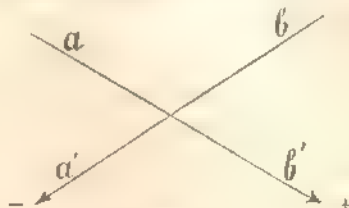
Для исключенія x , положимъ $am - a' = 0$, откуда $m = \frac{a'}{a}$; вставивъ эту величину m въ то же самое ур., имѣемъ:

$$\left(\frac{ba'}{a} - b'\right)y = \frac{ca'}{a} - c';$$

умноживъ обѣ части на $-a$, получимъ:

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c, \text{ откуда } y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Полученныя формулы для x и y имѣютъ одинаковаго знаменателя, который легко получить, не рѣшая уравненій, слѣдующимъ искусственнымъ приемомъ: выписываемъ коэффициенты при неизвѣстныхъ изъ перваго уравненія, и подъ ними пишемъ коэффициенты втораго уравненія:



Черт. 14.

затѣмъ перемножаемъ эти коэффициенты на-крестъ, какъ указываютъ стрѣлки, причемъ въ произведеніи, взятомъ слѣва на право, не измѣняемъ знака (это ука-

знаменателя —), а въ произведеніи справа на лѣво перемѣняемъ знакъ на противоположный (это указано знакомъ минусъ). Такимъ образомъ составится вы-

$$ab - a'b,$$

и тѣмъ самымъ общий знаменатель корней. Изъ знаменателя легко составить числитель для этого нужно только въ знаменателѣ коэффициенты опредѣляющаго уравненія замѣнить извѣстными членами изъ соответствующихъ уравненій; тѣмъ же самымъ составленія числителя неизвѣстнаго x нужно вмѣсто a и a' подставить c и c' , а для составленія числителя y , надо въ знаменателѣ буквы b и b' замѣнить соответственно буквами c и c' . Это правило составленія знаменателя и числителя и извѣстно подъ именемъ *правила Крамера* (1704—1752).

Такъ, если имѣемъ уравненія

$$7x + 5y = 60$$

$$13x - 11y = 10,$$

то знаменатель рѣшенія найдемъ, составивъ табличку,



Черт. 15.

изъ которой имѣемъ: $7 \cdot (-11) - 5 \times 13$.

Подставивъ въ это выраженіе вмѣсто 7 и 13 соответственно 60 и 10, и вмѣсто 5 и -11 числа 60 и 10, найдемъ числители: для x : $60 \cdot (-11) - 5 \times 10$, а для y : $7 \cdot 10 - 60 \times 13$. Итакъ:

$$x = \frac{60 \cdot (-11) - 5 \cdot 10}{7 \cdot (-11) - 5 \cdot 13} = \frac{-660 - 50}{-77 - 65} = \frac{-710}{-142} = 5.$$

$$y = \frac{7 \cdot 10 - 60 \cdot 13}{7 \cdot (-11) - 5 \cdot 13} = \frac{70 - 780}{-77 - 65} = \frac{-710}{-142} = 5.$$

280. Всѣ четыре метода рѣшенія уравненій имѣютъ одну и ту же цѣль: изъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными *исключить* одно изъ неизвѣстныхъ и получить такимъ образомъ одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, поэтому всѣ четыре метода суть *методы исключенія*.

Изъ всѣхъ четырехъ способовъ исключенія — *способъ уравниванія коэффициентовъ* самый удобный и всего чаще употребляемый; онъ ведетъ къ болѣе пространнымъ вычислениямъ; но неудобенъ, когда коэффициенты при неизвѣстныхъ выражаются большими числами или десятичными дробями. Въ последнемъ случаѣ удобнее примѣнять *способъ подстановки*; этотъ же способъ удобопримѣнимъ и тогда, когда коэффициентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ равенъ единицѣ, такъ какъ въ этомъ случаѣ выраженіе неизвѣстнаго черезъ другое не имѣетъ знаменателя. Способъ сравненія неизвѣстныхъ имѣетъ то неудобство, что, какъ и предыдущій способъ, вводитъ въ уравненія дроби; но при большемъ числѣ неизвѣстныхъ имѣетъ то преимущество, что дѣлаетъ рѣшеніе уравненій однообразнымъ. Наконецъ, способъ Безу имѣетъ скорѣе теоретическое, нежели практическое, значеніе.

ГЛАВА XX.

Рѣшеніе системы трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

Опредѣленія. — Начала и методы.

281. Определенія. Всякое ур. первой степени съ тремя неизвѣстными можно привести къ виду

$$ax + by + cz = d,$$

гдѣ a, b, c и d суть некоторыя числа количества. Если x, y и z должны удовлетворять только одному уравненію, то очевидно, что такое ур. будетъ неопредѣленно, потому что двумъ неизвѣстнымъ можно давать совершенно произвольныя значенія. Тоже самое будетъ и въ томъ случаѣ, когда три неизвѣстныя должны удовлетворять двумъ уравненіямъ. Такъ, система

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{aligned}$$

не опредѣлена, потому что одному изъ неизвѣстныхъ можно давать произвольныя значенія: тогда система послужитъ для опредѣленія остальныхъ двухъ неизвѣстныхъ.

Но если неизвѣстныя должны удовлетворять тремъ уравненіямъ

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \end{aligned}$$

то существуетъ, вообще, одна система рѣшеній, удовлетворяющихъ этимъ ур—мъ.

Двѣ системы называются эквивалентными, если онѣ удовлетворяются одними и тѣми же рѣшеніями.

282. Начало 1. Система трехъ уравненій

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \dots (1)$$

эквивалентна системѣ

$$A = 0, \quad pA + qB = 0, \quad p'A + q'C = 0 \dots (2)$$

если количества p, q, p', q' конечны и отличны отъ нуля.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія системѣ уравненій (1), обращаютъ каждое изъ выраженій A, B и C въ нуль, стало быть эти значенія обратятъ въ нуль и произведенія $pA, qB, p'A$ и $q'C$, ибо p, q, p' и q' конечны; слѣдовательно, величины неизвѣстныхъ, удовлетворяющія системѣ (1), удовлетворяютъ и системѣ (2).

2) Значенія неизвѣстныхъ x, y, z , удовлетворяющія уравненіямъ (2), обращая въ нуль выраженіе A , обратятъ въ нуль и pA и $p'A$, такъ какъ p и p' конечны; но эти значенія обращаютъ въ нуль суммы $pA + qB$ и $p'A + q'C$, слѣд. они обращаютъ въ нуль и qB и $q'C$; но q и q' отличны отъ нуля, слѣд. B и C обращаются въ нули при сказанныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ. Итакъ, корни системы (2) удовлетворяютъ уравненіямъ системы (1).

Примечание. Можно выбрать p, p', q и q' такъ, чтобы уравненія

$$pA + qB = 0 \quad \text{и} \quad p'A + q'C = 0$$

содержали только два изъ трехъ неизвѣстныхъ; т.-е. можно исключить одно изъ трехъ неизвѣстныхъ изъ одного изъ данныхъ уравненій и каждую изъ двухъ остальныхъ.

На этомъ началѣ основаны способы исключения: чрезъ уравниваніе коэффициентовъ, чрезъ подстановленіе и чрезъ сравненіе величинъ неизвѣстныхъ.

283. Способъ уравниванія коэффициентовъ. Пусть требуется рѣшить уравненія

$$3x - 2y + 5z = 13 \quad . \quad . \quad (1)$$

$$5x + 4y - 3z = 25 \quad . \quad . \quad (2)$$

$$11x - 6y - 8z = 24 \quad . \quad . \quad (3)$$

Сначала исключимъ изъ этихъ уравненій y .

Для исключенія y изъ (1) и (2), множимъ первое на 2 и складываемъ со вторымъ, умноженнымъ на -1 ; получимъ:

$$11x + 7z = 51 \quad . \quad . \quad (4).$$

Изъ этихъ же образцовъ, для исключенія y изъ (1) и (3), множимъ (1) на 3 и складываемъ; находимъ:

$$2x - 23z = -15 \quad . \quad . \quad (5).$$

Изъ этой системы изъ трехъ уравненій (1), (4) и (5) эквивалентна двѣмъ, а именно уравненіямъ (4) и (5) содержатъ только два неизвѣстныхъ x и z ; такъ и выражаемъ изъ нихъ эти неизвѣстныя. Для этого множимъ (4) на 2, (5) на -11 и складываемъ; получаемъ

$$267z = 267,$$

откуда

$$z = 1.$$

Подставивъ вмѣсто z найденную величину въ ур. (5), имѣемъ

$$2x - 23 = -15, \quad \text{откуда} \quad 2x = 23 - 15 = 8,$$

и слѣд.

$$x = 4.$$

Подставивъ въ ур. (1) найденныя для x и z величины, имѣемъ

$$12 - 2y + 5 = 13,$$

откуда

$$y = 2.$$

Итакъ, искомыя рѣшенія суть:

$$x = 4; \quad y = 2; \quad z = 1.$$

Легко убѣдиться прямою подстановкою ихъ въ уравненія, что они дѣйствительно удовлетворяютъ даннымъ уравненіямъ.

284. Способъ подстановленія. Пусть требуется рѣшить уравненія

$$ax + by + cz = d \quad . \quad . \quad (1)$$

$$a'x + b'y + c'z = d' \quad . \quad . \quad (2)$$

$$a''x + b''y + c''z = d'' \quad . \quad . \quad (3).$$

Принимая на-время y и z за извѣстныя, рѣшаемъ ур. (1) относительно x :

$$x = \frac{d - by - cz}{a} \quad . \quad . \quad (4).$$

Подставивъ вмѣсто x это выраженіе въ уравненія (2) и (3), получаемъ:

$$\frac{a'(d - by - cz)}{a} + b'y + c'z = d' \quad . \quad . \quad (5)$$

$$a''(d - by - cz) + b''y + c''z = d'' \quad . \quad . \quad (6),$$

Рѣшаемъ уравненія (5) и (6) относительно y и z . Освободивъ ихъ отъ дробей и отъ скобокъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} a'd - a'by - a'cz + ab'y + ac'z &= ad' \\ a''d - a''by - a''cz + ab''y + ac''z &= ad'', \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (ab' - a'b)y + (ac' - a'c)z &= ad' - a'd \\ (ab'' - a''b)y + (ac'' - a''c)z &= ad'' - a''d. \end{aligned}$$

Примѣняя формулы § 275, 6, имѣемъ:

$$\begin{aligned} y &= \frac{(ad' - a'd)(ac'' - a''c) - (ad'' - a''d)(ac' - a'c)}{(ab' - a'b)(ac'' - a''c) - (ab'' - a''b)(ac' - a'c)} \\ z &= \frac{(ab' - a'b)(ad' - a'd) - (ab'' - a''b)(ad'' - a''d)}{(ab' - a'b)(ac'' - a''c) - (ab'' - a''b)(ac' - a'c)}. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки въ знаменателяхъ и въ обѣихъ числителяхъ, получаемъ для знаменателя выраженіе:

$$a^2b'c'' - aa'bc'' - aa''b'c + a'a''bc - a^2b''c' + aa''bc' + aa'h'c - a'a''bc;$$

по приведеніи и по вынесеніи за скобки общаго множителя a , этотъ множитель принимаетъ видъ

$$a(ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' - a'b''c) \quad . \quad . \quad (7).$$

Для числителя формулы y находимъ

$$a^2c''d' - aa'c''d - aa'cd' - a'a''cd - a^2c'd' + aa''c'd + aa'cd' - a'a''cd,$$

или, вынося за скобки a :

$$a(ac''d' - a'c''d - a''cd' - ac'd'' + a''c'd + a'cd') \quad . \quad . \quad (8).$$

Опредѣляя изъ каждого ур-нія z , причемъ x и y на-время считаемъ извѣстными, найдемъ

$$z = \frac{35 - 5x + 2y}{3} \quad . \quad . \quad (4)$$

$$z = \frac{-67 + 8x + 7y}{5} \quad . \quad . \quad (5)$$

$$z = \frac{58 - 9x + 3y}{2} \quad . \quad . \quad (6).$$

Приравнявая первое выраженіе z поочередно — второму и третьему, получимъ:

$$\frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{-67 + 8x + 7y}{5} \quad (7), \quad \frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{58 - 9x + 3y}{2} \quad (8)$$

уравненія съ двумя неизвѣстными x и y .

Докажемъ, что система уравненій: (4), (7) и (8) эквивалентна данной. Съ этою цѣлью перенесемъ въ данныхъ уравненіяхъ все члены, за исключеніемъ содержащихъ z , во вторую часть; такимъ образомъ найдемъ:

$$\begin{aligned} 3z &= 35 - 5x + 2y \\ -5z &= -67 + 8x - 7y \\ 2z &= 58 - 9x + 3y. \end{aligned}$$

Умножая первое изъ этихъ ур-ній на $\frac{1}{3}$, второе на $\frac{1}{5}$, и третье на $\frac{1}{2}$, и сложивъ первое сначала со вторымъ, а потомъ съ третьимъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} 0 &= z \frac{35 - 5x + 2y}{3} + \frac{-67 + 8x - 7y}{5} \\ 0 &= \frac{35 - 5x + 2y}{3} - \frac{58 - 9x + 3y}{2} \end{aligned}$$

или, по перенесеніи:

$$\frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{-67 + 8x - 7y}{5} \quad \blacksquare \quad \frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{58 - 9x + 3y}{2}.$$

Эти два ур-нія, взявъ съ (4), на осн. начала I, составляютъ систему, эквивалентную данной. Освобождая ур-нія (7) и (8) отъ дробей, перенеся извѣстные члены въ одну часть, а неизвѣстные въ другую, и сдѣлавъ приведеніе, дадимъ имъ видъ

$$-49x - 11y = -376; \quad 17x - 5y = 104.$$

Рѣшивъ эти ур-нія, найдемъ: $x = 7$, а $y = 3$. Подставивъ эти числа въ ур. (4), найдемъ: $z = 2$.

287. Начало II. Система уравненій

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

эквивалентная система

$$A = 0$$

$$B = 0$$

$$mA + nB + pC = 0 \dots (2)$$

где m , n и p — количества конечныя, отличныя от нуля.

В самом дѣлѣ: 1) Всякое рѣшеніе системы (1), обращая въ ноль выраженія A , B и C , обращаетъ въ нуль и выраженія mA , nB и pC , такъ какъ множители m , n и p конечны; слѣд. рѣшеніе первой системы удовлетворяетъ второй.

2) Обратнo: всякое рѣшеніе второй системы, обращая A и B въ нули, удовлетворяетъ первымъ двумъ уравненіямъ системы (1). Затѣмъ, при $A = 0$ и $B = 0$, произведенія mA и nB также обращаются въ нули, потому что m и n конечны, но какъ разсматриваемое рѣшеніе обращаетъ въ нуль выраженіе $mA + nB + pC$, котораго два первые члена — нули; то и pC должно обращаться въ ноль; но p конечно, поэтому C должно обращаться въ ноль; т. е. рѣшеніе системы (2) удовлетворяетъ и третьему уравненію системы (1).

На этомъ началѣ основанъ способъ Безу.

288 Способъ Безу Способъ этотъ состоитъ въ употребленіи множителей, которые затѣмъ опредѣляютъ подѣ условіемъ исключенія двухъ какихъ-нибудь трехъ неизвѣстныхъ. Приложимъ этотъ способъ къ общей системѣ:

$$ax + by + cz = d \dots (1)$$

$$a'x + b'y + c's = d' \dots (2)$$

$$a''x + b''y + c''z = d'' \dots (3).$$

Помноживъ ур. (1) на произвольный множитель λ , ур. (2) на μ , а третье на $+1$, сложимъ ихъ почленно; получимъ ур.

$$(\lambda a + \mu a' + a'')x + (\lambda b + \mu b' + b'')y + (\lambda c + \mu c' + c'')z = \lambda d + \mu d' + d'' \dots (4).$$

Что ур., въ силу начала II § 287, можетъ сдѣлать въ данной системѣ одно изъ трехъ уравненій.

Располагаемъ произвольными множителями λ и μ такъ, чтобы исключить изъ ур. (4) неизвѣстныя y и z . Для этого, очевидно, надо, чтобы коэффициенты при y и z обращались въ нули, т. е. надо положить:

$$\left. \begin{aligned} \lambda b + \mu b' + b'' &= 0 \\ \lambda c + \mu c' + c'' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} \lambda b + \mu b' &= -b'' \\ \lambda c + \mu c' &= -c'' \end{aligned} \right\} (5).$$

Значенія λ и μ , удовлетворяющія ур. (5) найдемъ, рѣшивъ эти уравненія относительно λ и μ ; применяя правило § 279, получимъ:

$$\lambda = \frac{b'c'' - c'b''}{bc' - cb'}, \quad \mu = \frac{cb'' - bc''}{bc' - cb'}.$$

Подставляя эти значенія λ и μ въ ур. (4), мы исключимъ эти самыя y и z , и получимъ ур.—іе съ однимъ неизвѣстнымъ x :

$$\left(\frac{b'c'' - c'b''}{bc' - cb'} a + \frac{cb'' - bc''}{bc' - cb'} a' + a'' \right) x = \frac{b'c''}{bc'} d + \frac{c'b''}{cb'} d' + d'' + d''.$$

откуда

$$x = \frac{(b'e'' - e'b'')d' + (cb'' - ba'')d'' + (bc' - cb')d''}{(b'e'' - e'b'')a + (cb'' - ba'')a' + (bc' - cb')a''}$$

или, по раскрытіи скобок:

$$x = \frac{db'e'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'e' + bc'd' - cb'd''}{ab'e'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'e' + bc'a' - cb'a''}.$$

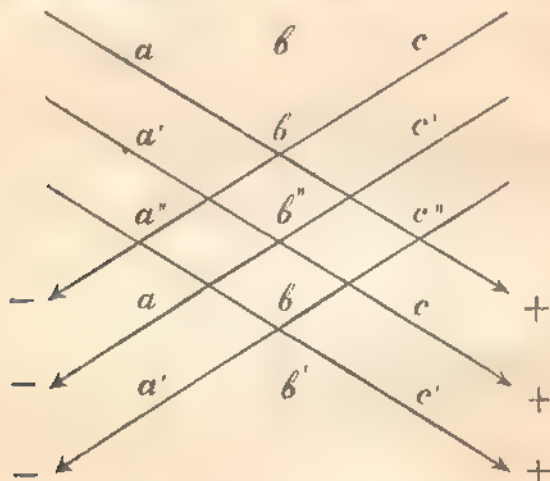
Приравнявая въ ур—ніи (4) коэффициенты при x и z нулю, найдемъ y ; а опредѣливъ для λ и μ такія значенія, при которыхъ обращаются въ нуль коэффициенты при x и y , найдемъ z :

$$y = \frac{ad'e'' - ac'd'' + ca'd'' - da'e' + dc'a' - cd'a''}{ab'e'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'e' + bc'a' - cb'a''}$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd' + bd'a' - db'a''}{ab'e'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'e' + bc'a' - cb'a''}.$$

289. Разсмотрѣніе общихъ формулъ предыдущаго параграфа приводитъ къ слѣдующему правилу механическаго рѣшенія трехъ ур—ній съ 3 неизвѣстными (такъ называемое правило *Sarrus*).

Для составленія общаго знаменателя неизвѣстныхъ, выписываютъ коэффициенты при неизвѣстныхъ изъ всѣхъ трехъ уравненій, и подъ ними еще разъ коэффициенты изъ двухъ первыхъ ур—ній; такимъ образомъ получается табличка:



Черт. 16.

Затѣмъ перемножаютъ выписанныя буквы наклонно: сначала слѣва направо, не измѣняя знаковъ этихъ произведеній (что указывается знакомъ $-$), а потомъ справа на лѣво, перемѣнивъ при каждомъ произведеніи знакъ (что указывается знакомъ $+$). Такимъ образомъ получается общій знаменатель исконыхъ рѣшеній:

$$ab'e'' + a'b''c + a''bc' - cb'a'' - c'b'a - c''ba'.$$

Для полученія числителей пользуются правиломъ Крамера: 1) для полученія числителя неизвѣстнаго x нужно въ знаменатель вѣсто коэффициентовъ этого

неизвестнаго т.е. вмѣсто $a, a' a''$ подставить известные члены изъ соответствующихъ уравнiй, т.е. $d, d' и d''$; 2) неизвестнаго y —вмѣсто его коэффициентовъ: $b, b' и b''$ подставить $d, d' и d''$; 3) наконецъ, неизвестнаго z вмѣсто $c, c' и c''$ подставить $d, d' и d''$.

Примѣръ. Примѣнимъ этотъ механическій приемъ къ рѣшенiю системы:

$$\begin{aligned} 4x + 5y + z &= 6 \\ 7x + 11y + 2z &= 9 \\ x + y + 3z &= 12. \end{aligned}$$

Общiй знаменатель D составляемъ указаннымъ способомъ при помощи таблички:

	4	-5	1
	7	-11	2
	1	1	3
-	4	-5	1
-	7	-11	2
-			

Черт. 17.

найдемъ:

$$\begin{aligned} D &= 4 \cdot (-11) \cdot 3 + 7 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) \cdot 2 - 1 \cdot (-11) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-5) \cdot 7 \\ &= -132 + 7 - 10 + 11 - 8 + 105 = -27. \end{aligned}$$

Назвавъ числители неизвестныхъ x, y и z , соответственно буквами N_x, N_y и N_z , найдемъ:

$$\begin{aligned} N_x &= 6 \cdot (-11) \cdot 3 + 9 \cdot 1 \cdot 1 + 12 \cdot (-5) \cdot 2 - 12 \cdot (-11) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 6 - 3 \cdot (-5) \cdot 9 \\ &= -198 + 9 - 120 + 132 - 12 + 135 = -54. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_y &= 4 \cdot (9) \cdot 3 - 7 \cdot 12 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \cdot 2 - 1 \cdot 9 \cdot 1 - 2 \cdot 12 \cdot 4 - 3 \cdot 6 \cdot 7 \\ &= 108 + 84 + 12 - 9 - 96 - 126 = -27. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_z &= 4 \cdot (-11) \cdot 12 - 7 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-5) \cdot 9 - 1 \cdot (-11) \cdot 6 - 9 \cdot 1 \cdot 4 - 12 \cdot (-5) \cdot 7 \\ &= 528 + 42 - 45 + 66 - 36 + 420 = 81. \end{aligned}$$

Итакъ:

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{-54}{-27} = 2; \quad y = \frac{N_y}{D} = \frac{-27}{-27} = 1; \quad z = \frac{N_z}{D} = \frac{81}{-27} = -3.$$

Продолжая такимъ же образомъ, достигнемъ наконецъ того, что данная система будетъ замѣнена новою, ей эквивалентною системою

$$A=0, B_1=0, C_2=0, D_3=0, \dots, H_{p-2}=0, K_{p-2}=0, L_{p-1}=0,$$

въ которой уравненіе $L_{p-1}=0$ содержитъ только одно неизвѣстное, $K_{p-2}=0$ содержитъ это же самое неизвѣстное и еще одно, $H_{p-3}=0$ содержитъ эти два неизвѣстныхъ и новос, и т. д., наконецъ ур. $A=0$ содержитъ всѣ неизвѣстныя.

Рѣшивъ ур. $L_{p-1}=0$, опредѣлимъ то неизвѣстное, которое въ немъ содержится. Внеся его величину въ ур. $K_{p-2}=0$, найдемъ изъ него еще одно неизвѣстное. Внеся величины этихъ двухъ неизвѣстныхъ въ ур. $H_{p-3}=0$, найдемъ третье неизвѣстное, и т. д. Всѣ неизвѣстныя будутъ послѣдовательно найдены.

Примѣръ. Рѣшить уравненія

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad 3x - 4y + 3z + 3v - 6u = 11 \\ 2) \quad 3x - 5y + 2z - 4u = 11 \\ 3) \quad 10y - 3z - 2v + 3u = 2 \\ 4) \quad -2x + 5z + 2v + 4u = 8 \\ 5) \quad 4x - 2y - 3v + 6u = 6 \end{array} \right\} \text{ I.}$$

Исключаемъ изъ данныхъ уравненій неизвѣстное x ; для этого комбинируемъ ур. (1) съ каждымъ изъ остальныхъ, за исключеніемъ (3), которое уже не содержитъ x . Вычтя (2) изъ (1), находимъ:

$$y + z + 3v - 2u = 0.$$

Помноживъ (1) на 2, а (4) на 3, и сложивъ ихъ, имѣемъ

$$-8y + 21z + 12v - 31u.$$

Наконецъ, умноживъ (1) на 4, а (5) на -3 , и сложивъ, получимъ:

$$-10y + 12z - 42u + 21v = 26.$$

Такимъ образомъ, на основаніи общаго начала, замѣняемъ данную систему ей эквивалентною:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad 3x - 4y + 3z + 3v - 6u = 11 \\ 2) \quad y + z + 3v - 2u = 0 \\ 3) \quad -8y + 21z + 12v = 31 \\ 4) \quad -10y + 12z + 21v - 42u = 26 \\ 5) \quad 10y - 3z - 2v + 3u = 2 \end{array} \right\} \text{ II.}$$

Исключаемъ теперь y изъ (2) уравненія системы II и каждого за нимъ слѣдующаго: для этого умножимъ ур. (2) на 8 и складываемъ съ (3); затѣмъ умножимъ (2) на 10 и складываемъ съ (4); наконецъ, помножимъ (2) на 10, вы-

читаемъ изъ него (5). Такимъ образомъ найдемъ систему III, эквивалентную II а слѣдовательно и предложенной:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x - 4y + 3z + 3v - 6u & = & 11 \\ y + z + 3v - 2u & = & 0 \\ 29z + 36v - 16u & = & 31 \\ 22z + 51v - 62u & = & 26 \\ 13z + 32v - 23u & = & -2 \end{array} \right\} \text{ III.}$$

Исключая z изъ трехъ послѣднихъ уравненій, найдемъ:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x - 4y + 3z + 3v - 6u & = & 11 \\ y + z + 3v - 2u & = & 0 \\ 13z + 32v - 23u & = & -2 \\ -460v + 459u & = & 461 \\ 41v + 300u & = & -382 \end{array} \right\} \text{ IV.}$$

систему, эквивалентную данной.

Исключая наконецъ u изъ послѣднихъ двухъ уравненій системы IV, находимъ эквивалентную ей систему:

$$\left. \begin{array}{rcl} 1) & 3x - 4y + 3z + 3v & - 6u = 11 \\ 2) & y + z + 3v & - 2u = 0 \\ 3) & 13z + 32v & - 23u = -2 \\ 4) & -41v & + 300u = -382 \\ 5) & 156819v & = -313638 \end{array} \right\} \text{ V.}$$

Послѣднее ур. этой системы прямо даетъ: $v = -2$. Подставляя вмѣсто v число -2 въ ур. (4), находимъ: $u = 1$. Подставляя найденныя для u и v величины въ ур. (3), находимъ: $z = 3$. Наконецъ, изъ второго и перваго ур. получаемъ: $y = 1$ и $x = 2$.

Методъ Безу, измѣненный Жергонномъ.

292. Начало. Если $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ суть количества конечныя и отличныя отъ нуля, то уравненіе

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \dots + L = 0$$

можетъ замѣнить одно изъ n уравненій системы

$$A=0, B=0, C=0, \dots, L=0,$$

т.-е. системы

$$\left. \begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \\ \vdots \\ L=0 \end{array} \right\} \text{ I и } \left. \begin{array}{rcl} \alpha A + \beta B + \gamma C + \dots + L & = & 0 \\ & & B=0 \\ & & C=0 \\ & & \vdots \\ & & L=0 \end{array} \right\} \text{ II}$$

эквивалентны.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) всякое рѣшеніе системы I удовлетворяетъ уравненіямъ системы II, такъ какъ В, С, . . . , L, а также и сумма $\alpha A + \beta B + \dots + \lambda L$ обращаются въ нуль; 2) обратно, всякое рѣшеніе системы II, обращая въ нуль выраженія В, С, . . . , L, удовлетворяетъ въ всѣхъ уравненіяхъ системы I, кромѣ ур—нія А = 0: а обращая въ нуль, вѣдѣтъ съ выраженіями В, С, . . . , L, также и выраженіе $\alpha A + \beta B + \gamma C + \dots + \lambda L$, приводитъ первое ур. системы II къ виду $\alpha A = 0$, откуда и А = 0, ибо α отлично отъ нуля.

293. Примѣняя это начало, Безу употребляютъ столько неопредѣленныхъ множителей, сколько неизвѣстныхъ безъ одного: такъ, обр. для рѣшенія n уравненій съ n неизвѣстными онъ бралъ $n - 1$ множитель (такъ, въ случаѣ двухъ ур—ній вводилъ 1 множитель, въ случаѣ трехъ ур—ній — 2 множителя и т. д.). Жергоннъ вводитъ столько множителей, сколько неизвѣстныхъ. При этомъ, вычисленія остаются такіа же какъ и у Безу; но, приравнивая нулю $n - 1$ коэффиціентъ, получаемъ $n - 1$ ур—ній, которыя служатъ для опредѣленія уже не самихъ множителей, а *отношеній* $n - 1$ множителей къ какому-либо одному изъ нихъ.

Въ этомъ Жергонновомъ варіантѣ способа Безу вычисленія симметричны; кромѣ того, пользуясь этимъ методомъ, легко избѣгаемъ такихъ случаевъ, когда способъ Безу оказывается непримѣнимымъ. Вотъ примѣры.

Примѣръ I. Рѣшить систему

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 9 \\ 4x + 6y - 3z &= 14 \\ 5x - 2y + 2z &= 12. \end{aligned}$$

Попробуемъ сперва примѣнить методъ Безу. Помноживъ 1-е ур. на λ , 2-е на μ , сложимъ ихъ съ 3-мъ; получимъ

$$(2\lambda + 4\mu + 5)z + (3\lambda + 6\mu - 2)y - (\lambda + 3\mu - 2)x = 9\lambda + 14\mu + 12.$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при x и y , имѣемъ

$$(1) 2\lambda + 4\mu + 5 = 0, (2) 3\lambda + 6\mu - 2 = 0, \text{ и } (3) z = \frac{9\lambda + 14\mu + 12}{-\lambda - 3\mu + 2}.$$

Для опредѣленія λ и μ , рѣшаемъ ур—нія (1) и (2), и для этого уравняемъ коэф—ты при λ ; такъ, обр. найдемъ

$$6\lambda + 12\mu = -15 \quad \text{и} \quad 6\lambda + 12\mu = 4,$$

а это система несовѣстная, ибо первыя части равны, а вторыя различны. И однако, данныя ур—нія представляютъ систему совѣстныхъ уравненій.

Примѣнимъ теперь способъ Жергонна, умноживъ и 3-е ур—ніе на ν ; найдемъ:

$$(3) 2\lambda + 4\mu + 5\nu = 0, (4) 3\lambda + 6\mu - 2\nu = 0 \quad \text{и} \quad (5) z = \frac{9\lambda + 14\mu - 12\nu}{-\lambda - 3\mu + 2\nu}.$$

Изъ ур—ній (3) и (4) найдемъ отношенія $\frac{\mu}{\lambda}$ и $\frac{\nu}{\lambda}$; имѣемъ

$$4\frac{\mu}{\lambda} + 5\frac{\nu}{\lambda} = -2, 6\frac{\mu}{\lambda} - 2\frac{\nu}{\lambda} = 3, \text{ откуда } \frac{\mu}{\lambda} = -\frac{1}{2} \text{ и } \frac{\nu}{\lambda} = 0,$$

и слѣдовательно

$$z = \frac{9 + 14\frac{y}{\lambda} - 12\frac{y}{\lambda}}{-1 - 3\frac{y}{\lambda} + 2\frac{y}{\lambda}} = \frac{9 - 7}{-1 + \frac{3}{2}} = 4.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ: $x = 2$, $y = 3$.

Здѣсь, какъ легко видѣть, способъ Жергонна сводится къ перестановкѣ множителей Безу въ другія строки; но какъ вначалѣ нельзя предвидѣть невозможности, которая обнаруживается вычисленіями лишь впоследствии, то понятно, что пользование варіантомъ Жергонна имѣетъ преимущества. Въ самомъ дѣлѣ, легче переимѣнить множителя, по отношенію къ которому ищемъ отношенія другихъ множителей, нежели, слѣдуя методу Безу, начинать съизнова всѣ вычисления.

Примѣръ II. Рѣшить систему уравненій:

$$x + 2y + 3z + 4u = 27 \quad (1)$$

$$3x + 5y + 7z + u = 48 \quad (2)$$

$$5x + 8y + 10z - 2u = 65 \quad (3)$$

$$7x + 6y + 5z + 4u = 53 \quad (4).$$

Помноживъ первое ур. на m , второе на n , третье на p , четвертое на q и сложивъ ихъ, найдемъ:

$$(m + 3n + 5p + 7q)x + (2m + 5n + 8p - 6q)y + (3m + 7n + 10p + 5q)z + (4m + n - 2p + 4q)u = 27m + 48n + 65p + 53q. \quad (5).$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при x , y и z , находямъ первую вспомо- гательную систему уравненій:

$$\begin{aligned} m + 3n + 5p + 7q &= 0 \\ (6) \quad 2m + 5n + 8p + 6q &= 0 \\ 3m + 7n + 10p + 5q &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{и } (7) \quad u = \frac{27m + 48n + 65p + 53q}{4m + n - 2p + 4q}.$$

Опредѣлимъ отношенія m , p и q къ n . Система (6) дастъ:

$$\frac{m}{n} = -\frac{17}{8}, \quad \frac{p}{n} = 0, \quad \frac{q}{n} = -\frac{1}{8}.$$

Подставивъ эти величины въ уравненіе (7), получимъ: $u = 2$.

Подставивъ найденную для u величину въ первыя три изъ данныхъ уравненій, найдемъ систему уравненій съ тремя неизвѣстными:

$$x + 2y + 3z = 19 \quad (8)$$

$$3x + 5y + 7z = 46 \quad (9)$$

$$5x + 8y + 10z = 69 \quad (10).$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на r , второе на s , третье на t и сложивъ ихъ, имѣемъ:

$$(r + 3s + 5t)x + (2r + 5s + 8t)y + (3r + 7s + 10t)z = 19r + 46s + 69t. \quad (11).$$

Приравнивая нулю коэффициенты при x и y , получаемъ другую вспомога-тельную систему уравненій:

$$(12) \quad \begin{aligned} r + 3s + 5t &= 0 \\ 2r + 5s + 8t &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{и } s = \frac{19r + 46s + 69t}{3r + 7s + 10t} \quad (13).$$

Опредѣляя изъ системы (12) отношенія $\frac{r}{t}$ и $\frac{s}{t}$, находимъ: $\frac{r}{t} = 1$, $\frac{s}{t} = 2$

Подставляя эти значенія $\frac{r}{t}$ и $\frac{s}{t}$ въ формулу для z , находимъ: $z = 4$.

Подставивъ найденную для z величину въ y нія (8) и (9), имѣемъ

$$x + 2y = 7 \quad (14)$$

$$3x + 5y = 18 \quad (15).$$

Умноживъ (14) на u , (15) на v и сложивъ ихъ, имѣемъ

$$(u + 3v)x + (2u + 5v)y = 7u + 18v.$$

Положивъ $u + 3v = 0$, откуда $\frac{u}{v} = -3$, и подставляя это значеніе $\frac{u}{v}$ въ

$$\frac{7 \cdot \frac{u}{v} + 18}{2 \cdot \frac{u}{v} + 5}, \text{ найдемъ: } y = 3.$$

Подставляя 3 вмѣсто y въ уравненіе (14), находимъ: $x = 1$.

294 Случай упрощенія. Изъ предыдущаго видно, что процессъ рѣшенія системы уравненій вообще довольно сложенъ, особенно если число неизвѣстныхъ величинъ велико. Но иногда его можно упростить; случаи для упрощенія представляются тогда, когда не всѣ неизвѣстныя входятъ въ каждое уравненіе, или же когда уравненія представляютъ некоторую симметрію по отношенію къ неизвѣстнымъ.

Если не всѣ уравненія содержатъ всѣ неизвѣстныя, тогда начинаютъ съ исключенія того неизвѣстнаго, которое входитъ въ наименьшее число уравненій, т. е. тѣ уравненія, въ которыя это неизвѣстное не входитъ, можно считать результатами его исключенія.

Примѣръ I. Рѣшить систему уравненій

$$\begin{aligned} 2x &- 5y + 4z = 7 \\ &- y + 6z - 3u = 3 \\ -7x + 4y &= 10 \\ -5x &+ 6z = 20. \end{aligned}$$

Исключая u , которое входитъ только въ первыя два уравненія, получаемъ уравненія

$$6x - 4y + 9z = 33,$$

которое вместе съ уравненіями

$$\begin{array}{rcl} -y + 6x - 3u & = & 3 \\ 7x + 4y & = & 10 \\ -5x & + & 6x & = & 20 \end{array}$$

составляетъ систему, эквивалентную данной.

Исключая во второй системѣ y изъ перваго и третьяго уравненій, получаемъ систему

$$\begin{array}{rcl} -y + 6x - 3u & = & 3 \\ -x & + & 9x & = & 43 \\ -7x + 4y & = & 10 \\ -5x & + & 6x & = & 20 \end{array}$$

эквивалентную второй, а слѣд. и данной.

Исключая въ ней x изъ втораго и четвертаго уравненій, находимъ эквивалентную данной систему:

$$\begin{array}{rcl} -y + 6x - 3u & = & 3 \\ -7x + 4y & = & 10 \\ -x & + & 9x & = & 43 \\ & & 39x & = & 195. \end{array}$$

Изъ послѣдняго уравненія находимъ: $x = 5$. Вставивъ вмѣсто x его величину въ третье уравненіе, найдемъ: $x = 2$; затѣмъ изъ втораго ур. получимъ: $y = 6$; наконецъ, изъ перваго: $u = 7$.

Примѣръ II. Рѣшить систему уравненій

$$\begin{array}{l} x + 2y = 5. \\ y + 3z = 11. \\ z + 4u = 19. \\ u + 5t = 29 \\ t + 6x = 11. \end{array}$$

Выражая изъ пятаго уравненія t черезъ x , имѣемъ: $t = 11 - 6x$. Вставляя вмѣсто t его величину въ четвертое ур., получимъ: $u = 29 - 5(11 - 6x) = -26 + 30x$. Вставляя вмѣсто u полученную величину въ третье ур., найдемъ: $z = 123 - 120x$. Подобнымъ же образомъ, изъ втораго ур. имѣемъ: $y = -358 + 360x$. Вставивъ вмѣсто y найденное выраженіе въ 1-е ур., найдемъ изъ него: $x = 1$. Всѣ остальные неизвѣстныя выражены черезъ x , а потому ихъ легко теперь вычислить. Найдемъ: $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$ и $t = 5$.

Примѣръ III. Рѣшить систему уравненій:

$$\begin{array}{l} x + y + z + u = a \\ y + z + u + t = b \\ z + u + t + x = c \\ u + t + x + y = d \\ t + x + y + z = e. \end{array}$$

Въ этой системѣ неизвѣстныя входятъ симметрично — каждое одинаковое число разъ; это обстоятельство позволяетъ найти сумму всѣхъ неизвѣстныхъ; для этого стоитъ только сложить всѣ уравненія и результатъ раздѣлить на 4. Такимъ образомъ получимъ

$$x + y + z + t + u = \frac{a + b + c + d + e}{4} \quad (1)$$

А такъ въ каждое уравненіе не входитъ по одному только неизвѣстному, то, вычитая изъ уравненія (1) послѣдовательно каждое изъ данныхъ, опредѣлимъ всѣ неизвѣстныя. Получимъ:

$$t = \frac{b + c + d + e - 3a}{4},$$

$$x = \frac{a + c + d + e - 3b}{4},$$

$$y = \frac{a + b + d + e - 3c}{4},$$

$$z = \frac{a + b + c + e - 3d}{4},$$

$$u = \frac{a + b + c + d - 3e}{4}.$$

Итакъ сумма всѣхъ неизвѣстныхъ, съ опредѣленія которой мы начали, представляла *вспомогательное неизвѣстное*, позволявшее скорѣе опредѣлить каждое неизвѣстное въ отдельности. Вотъ еще примѣры употребленія *вспомогательныхъ неизвѣстныхъ*.

Примѣръ IV. Рѣшить систему уравненій

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+y} + \frac{b}{x-y} &= c \\ \frac{d}{x+y} + \frac{e}{x-y} &= f. \end{aligned}$$

Избавляя уравненія отъ дробей, мы нашли бы уравненія, въ которыхъ члены содержали бы вторыя степени неизвѣстныхъ; но легко избѣжать введенія уравненій второй степени, введя вспомогательныя неизвѣстныя, и именно полагая:

$$\frac{1}{x+y} = u, \quad \frac{1}{x-y} = v.$$

Данные уравненія примутъ видъ:

$$au + bv = c, \quad du + ev = f.$$

Рѣшая ихъ, найдемъ:

$$u = \frac{ce - bf}{ae - bd} \quad \text{и} \quad v = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Подставивъ вмѣсто u и v ихъ выраженія черезъ x и y , найдемъ

$$\frac{1}{x+y} = \frac{ce-bf}{ae-bd} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x-y} = \frac{af-cd}{ae-bd},$$

откуда

$$x+y = \frac{ae-bd}{ce-bf} \quad \text{и} \quad x-y = \frac{ae-bd}{af-cd}.$$

Сначала складывая, а потомъ вычитая эти ур-нія, найдемъ:

$$x = \frac{1}{2} \left\{ \frac{ae-bd}{ce-bf} + \frac{ae-bd}{af-cd} \right\} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{2} \left\{ \frac{ae-bd}{ce-bf} - \frac{ae-bd}{af-cd} \right\}.$$

Примѣръ V. Рѣшить систему уравненій

$$\begin{aligned} ax + m(y+z+u) &= \alpha \\ by + m(x+u+x) &= \beta \\ cx + m(u+x+y) &= \gamma \\ du + m(x+y+z) &= \delta. \end{aligned}$$

Введемъ вспомогательное неизвѣстное, положимъ: $x+y+z+u = S$; данныя уравненія примутъ видъ:

$$\begin{aligned} ax + m(S-x) &= \alpha \\ by + m(S-y) &= \beta \\ cx + m(S-x) &= \gamma \\ du + m(S-u) &= \delta. \end{aligned}$$

Выводя изъ перваго ур-нія x , изъ втораго y и т. д., найдемъ:

$$x = \frac{\alpha - mS}{a-m}, \quad y = \frac{\beta - mS}{b-m}, \quad z = \frac{\gamma - mS}{c-m}, \quad u = \frac{\delta - mS}{d-m}. \quad (1).$$

Складывая почленно эти уравненія и замѣчая, что въ первой части получается $x+y+z+u$ или S , найдемъ:

$$S = \frac{\alpha - mS}{a-m} + \frac{\beta - mS}{b-m} + \frac{\gamma - mS}{c-m} + \frac{\delta - mS}{d-m}.$$

Изъ этого уравненія, первой степени относительно S , найдемъ это вспомога-тельное неизвѣстное; зная его, изъ уравненій (1) найдемъ x , y , z и u .

Приведемъ еще примѣры искусственныхъ приѣмовъ, облегчающихъ рѣшеніе уравненій.

Примѣръ VI. Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{xy}{ay+bx} = \frac{1}{c}; \quad \frac{xs}{ax+cs} = \frac{1}{b}; \quad \frac{ys}{bs+cy} = \frac{1}{a}.$$

Обращая дроби, найдемъ:

$$\frac{a}{x+y} = c; \quad \frac{a}{x+z} = b; \quad \frac{b}{y+z} = a.$$

Исключая эти уравнения и обозначая, для краткости, сумму $a + b + c$ через S , находимъ

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = S.$$

Решая отсюда поочередно каждое изъ предыдущихъ уравнений, находимъ:

$$\frac{c}{z} = S - c; \quad \frac{b}{y} = S - b; \quad \frac{a}{x} = S - a;$$

$$x = \frac{a}{S-a}, \quad y = \frac{b}{S-b}, \quad z = \frac{c}{S-c}.$$

Примеръ VII. Решить систему уравнений:

$$x + ay + a^2x + a^3 = 0,$$

$$x + by + b^2x + b^3 = 0,$$

$$x + cy + c^2x + c^3 = 0,$$

и решить эти уравнения способомъ исключенія черезъ сложеніе. Для употребленія слѣдующаго искусственнаго приема, представимъ данное уравненіе въ видѣ

$$X^3 + xX^2 + yX + z = 0$$

въ которомъ X — произвольное количество, а x, y и z — слѣд. члены многочлена $(X - a)(X - b)(X - c)$, причемъ частное равно 1, т. е. X^3 — членъ дѣлителя есть X^3 . Итакъ, имѣемъ тождество:

$$X^3 - xX^2 - yX - z = (X - a)(X - b)(X - c),$$

или, по раскрытіи произведенія:

$$X^3 - xX^2 - yX - z = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + ac + bc)X - abc,$$

т. е. приравнивая коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ X , находимъ:

$$x = -(a + b + c); \quad y = ab + ac + bc; \quad z = -abc.$$

295. О системахъ уравненій, въ которыхъ число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій. Когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, то система имѣетъ, вообще, одно определенное рѣшеніе. Разсмотримъ теперь случаи, когда число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій.

296. Теорема. Система уравненій, которыхъ число меньше числа неизвѣстныхъ, неопредѣленна.

Пусть имѣемъ m уравненій, содержащихъ $m + p$ неизвѣстныхъ. Можно дать произвольныя значенія p неизвѣстныхъ; тогда получится система m уравненій, изъ которой опредѣлятся остальные m неизвѣстныхъ. Слѣд., система имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, что выражаютъ однимъ словомъ, говоря, что система неопредѣленна.

297. ТЕОРЕМА. Система уравнений, число которых больше числа неизвестных, вообще невозможна.

Пусть число уравнений превышает число неизвестных; пусть, напр., имеем $m + p$ уравнений съ m неизвестными. Возьмъ m изъ числа данныхъ уравнений, въ которыхъ входили бы m неизвестныхъ, и рѣшивъ ихъ, опредѣлимъ эти m неизвестныхъ. Если окажется, что найденныя величины удовлетворяютъ и остальнымъ p уравнениямъ, то заключаемъ, что система имѣетъ одно опредѣленное рѣшеніе. Если же окажется, что значенія, найденныя для m неизвестныхъ, не удовлетворяютъ остальнымъ p уравнениямъ, это будетъ значить, что система не имѣетъ рѣшеній; въ такомъ случаѣ говорятъ, что она *невозможна*, или что уравненія *несовмѣстны*.

Примѣръ I. Рѣшить систему трехъ уравненій съ двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5 &= 0 \\ 7x - 3y + 2 &= 0 \\ -x + 7y - 12 &= 0. \end{aligned}$$

Рѣшаемъ послѣднія два уравненія и находимъ, что имъ удовлетворяютъ:
 $x = \frac{11}{23}$ и $y = \frac{41}{23}$. Вставивъ эти величины въ первое уравненіе, замѣчаемъ, что оно обращается въ тождество. Слѣд. система возможна и имѣетъ рѣшеніе:
 $x = \frac{11}{23}$, $y = \frac{41}{23}$.

Примѣръ II. Рѣшить систему

$$\begin{aligned} 6x + 7y &= 46 \\ 5x + 3y &= 27 \\ x + 2y &= 14. \end{aligned}$$

Первыя два уравненія имѣютъ рѣшеніе: $x = 3$, $y = 4$. Но эти значенія не удовлетворяютъ третьему уравненію, слѣд. предложенная система *несовмѣстна*.

Когда число уравнений превышаетъ число неизвестныхъ, и уравненія имѣютъ буквенные коэффициенты, то можно предложить себѣ вопросъ: при какой зависимости между коэффициентами найденныя для m неизвестныхъ величины будутъ удовлетворять и остальнымъ p уравнениямъ? Эти p условій обыкновенно называютъ *условными уравненіями*.

Примѣры: I. $6x + 7y = 46$, $5x + 3y = 27$, $ax + 2y = 14$.

Первыя два уравненія удовлетворяются при $x = 3$ и $y = 4$.

Для того чтобы всѣ три уравненія были совмѣстны, необходимо, чтобы тѣ же значенія x и y удовлетворяли и третьему уравненію, т.е. чтобы существовало тождество

$$3a + 8 = 14, \text{ откуда } a = 2.$$

Итакъ, система совмѣстна при $a = 2$.

II. $ax + by + c = 0$; $a'x + b'y + c' = 0$; $a''x + b''y + c'' = 0$.

Рѣшая первыя два уравненія, найдемъ:

$$x = \frac{bc - cb'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Для того чтобы система была совѣстна, необходимо, чтобы тѣ же рѣшенія обращали въ тождество и третье уравненіе, т.-е. чтобы (по освобожденіи отъ знаменателя)

$$a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - ba') = 0,$$

или

$$ab'c'' - ac'b'' - ca'b'' - ba'c'' - bc'a'' - cb'a'' = 0.$$

Легко видѣть, что первая часть этого условія есть ничто иное какъ знаменатель значений неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ тремъ уравненіямъ съ 3 неизвѣстными въ общемъ видѣ.

III. Пусть даны шесть уравненій съ 3 неизвѣстными:

$$\begin{aligned} x &+ y + z = 9 \\ 3x &- y + 2z = 10 \\ 2x &+ 7y - 3z = 8 \\ ax &- by + cz = 20 \\ ax &+ by + cz = 44 \\ 10ax &+ 3by - cz = 26 \end{aligned}$$

и требуется опредѣлить, при какихъ значеніяхъ коэффициентовъ a , b и c эти шесть уравненій будутъ удовлетворены одними и тѣми же значеніями неизвѣстныхъ.

Рѣшивъ первыя три уравненія, не содержащія a , b и c , найдемъ: $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$. Эти величины должны удовлетворять тремъ послѣднимъ уравненіямъ, т.-е. должны существовать равенства

$$\begin{aligned} a - 3b + 5c &= 20 \\ a + 3b + 5c &= 44 \\ 10a + 9b - 5c &= 26. \end{aligned}$$

Рѣшивъ эти уравненія относительно a , b и c , находимъ, что они удовлетворяются при $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$: при этихъ значеніяхъ коэффициентовъ шесть предложенныхъ уравненій совѣстны.

ГЛАВА XXII.

Составленіе уравненій со многими неизвѣстными.

298 Когда задача требуетъ нахожденія нѣсколькихъ неизвѣстныхъ, то для рѣшенія ея нужно имѣть столько различныхъ условій, сколько есть неизвѣстныхъ. Обозначая каждое неизвѣстное особою буквою, и выражая каждое изъ условій особымъ уравненіемъ, мы получимъ систему опредѣленныхъ уравненій, рѣшивъ которую и найдемъ искомыя неизвѣстныя.

Когда въ подобныхъ задачахъ встрѣчается нѣсколько неизвѣстныхъ, то при составленіи уравненій можно поступать двоякимъ образомъ: или можно приве-ти задачу къ составленію одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, выражая всѣ неизвѣстныя черезъ одно, или къ нѣсколькимъ уравненіямъ, если каждое неизвѣстное обозначить особою буквою. Выражая всѣ неизвѣстныя черезъ одно, мы въ сущности дѣлаемъ въ умѣ исключение нѣсколькихъ неизвѣстныхъ; но этотъ приемъ, сокращая вычисленія, усложняетъ и затрудняетъ составленіе уравненія. Въ виду этого, за исключеніемъ самыхъ простыхъ вопросовъ, слѣдуетъ каждое изъ неизвѣстныхъ обозначать особою буквою и каждое условіе выражать отдѣльнымъ уравненіемъ. Приводимъ примѣры.

Примѣръ 1. Изъ трехъ слитковъ, сплавленныхъ изъ золота, серебра и меди:

первый	содержитъ	50 гр. золота,	60 гр. серебра и	80 гр. меди;
второй	»	30 » »	50 » »	70 » »
третій	»	15 » »	65 » »	90 » »

Но сколько нужно взять отъ каждого слитка, чтобы составить четвертый, который содержалъ бы 79 гр. золота, 118 гр. серебра и 162 гр. меди?

Пусть отъ перваго слитка нужно взять x гр., отъ втораго y , а отъ третьяго z .

Первый слитокъ, согласно первому условію, содержитъ всего 50 + 60 + 80 или 190 гр. На эти 190 граммовъ приходится 50 гр. золота, слѣд. на 1 гр. сплава приходится $\frac{50}{190}$ или $\frac{5}{19}$ грамма золота, а стало быть въ x граммахъ, взятыхъ отъ перваго слитка, содержится $\frac{5}{19}x$ гр. золота. На тѣ же 190 гр. слитка приходится 60 гр. серебра, слѣдов. на 1 гр. слитка приходится $\frac{60}{190}$ или $\frac{6}{19}$ грамма серебра, а въ x граммахъ этого слитка содержится $\frac{6}{19}x$ гр. серебра. Такимъ же точно образомъ убѣдимся, что въ x гр., взятыхъ отъ перваго слитка, меди содержится $\frac{8}{19}x$ граммовъ.

По второму условію, второй слитокъ содержитъ 150 граммовъ, въ томъ числѣ 30 гр. золота, 50 гр. серебра и 70 мѣди. Разсужденія, подобныя вышеприведеннымъ, покажутъ, что въ y граммахъ, взятыхъ отъ этого слитка, содержится

$$\frac{3}{15}y \text{ гр. золота, } \frac{5}{15}y \text{ гр. серебра и } \frac{7}{15}y \text{ гр. мѣди.}$$

Наконецъ, согласно третьему условію, третій слитокъ содержитъ 190 гр., изъ которыхъ: 35 гр. золота, 65 гр. серебра и 90—мѣди; слѣд., въ z граммахъ, взятыхъ отъ этого слитка, содержится

$$\frac{35}{190}z \text{ гр. золота, } \frac{65}{190}z \text{ гр. серебра, } \frac{90}{190}z \text{ гр. мѣди.}$$

Все количество золота, входящаго въ составъ четвертаго слитка, выражается формулою

$$\frac{5}{19}x + \frac{3}{15}y + \frac{35}{190}z \text{ гр.};$$

полное количество серебра—формулу

$$\frac{6}{19}x + \frac{5}{15}y + \frac{65}{190}z \text{ гр.}$$

а количество мѣди равно

$$\frac{8}{19}x + \frac{7}{15}y + \frac{9}{19}z \text{ гр.}$$

Но по условию, четвертый слитокъ долженъ содержать 79 гр. золота, 118 — серебра и 162 мѣди; такимъ образомъ имѣемъ три уравненія:

$$\frac{5}{19}x + \frac{3}{15}y + \frac{35}{190}z = 79,$$

$$\frac{6}{19}x + \frac{5}{15}y + \frac{65}{190}z = 118,$$

$$\frac{8}{19}x + \frac{7}{15}y + \frac{9}{19}z = 162.$$

или, во освобожденіи отъ дробей:

$$50x + 38y + 35z = 15010,$$

$$36x + 38y + 39z = 13452,$$

$$120x + 133y + 135z = 46170.$$

Исключивъ изъ первыхъ двухъ уравненій y , получимъ ур.:

$$7x - 2z = 779,$$

а исключивъ y изъ второго и третьяго:

$$4x + z = 608.$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ

$$x = 133, \quad z = 76 \text{ гр.}$$

Подставивъ эти величины въ первое уравненіе, получимъ:

$$y = 150 \text{ гр.}$$

Примѣръ II. Въ бассейны проведены три трубы:

1-я и 2-я,	будучи открыты вмѣстѣ,	наполняютъ бассейнъ въ 12 час.;
2-я и 3-я,	»	»
3-я и 1-я,	»	»

Во сколько часовъ весь три трубы, открытыя одновременно, наполнять бассейнъ?

Пусть первая труба, будучи открыта одна, наполняет бассейн въ x часовъ; вторая, дѣйствуя также отдельно, наполняет бассейнъ въ y час., а третья въ z часовъ. Въ такомъ случаѣ

1-я труба въ 1 ч. наполнить $\frac{1}{x}$ часть бассейна;

2-я » » » $\frac{1}{y}$ » »

3-я » . » » $\frac{1}{z}$ » »

слѣдовательно, всѣ три трубы, дѣйствуя вмѣстѣ, наполняютъ въ 1 часъ часть бассейна, равную

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z};$$

а потому весь бассейнъ наполнится во столько часовъ, сколько разъ дробь $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ включается въ объемъ цѣлаго бассейна, т.-е. въ 1. Итакъ, время, необходимое для наполненія бассейна тремя трубами, выражается формулою:

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}};$$

это и есть искомое задачи.

Для его опредѣленія мы изъ условій задачи имѣемъ три уравненія

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20},$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{15}.$$

Складывая ихъ, находимъ:

$$2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15}$$

откуда

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$$

а потому

$$1 : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 10.$$

Для наполненія бассейна нужно 10 часовъ, что нетрудно проверить.

Примѣръ III. *Опредѣлить время изобрѣтенія Гуттенбергомъ книгопечатанія на основаніи слѣдующихъ данныхъ: 1) цифра десятиль годовъ, въ который совершилось это событіе, вдвое меньше цифры единицъ; 2) цифра тысячъ равна разности между цифрою сотенъ и циф-*

рою десятковъ. 3) сумма всѣхъ четырехъ цифръ искомаго числа равна 14; 4) если увеличить искомае число на 4905, то получится число обращенное.

Обозначимъ, по порядку, цифры единицъ, десятковъ, сотенъ и тысячъ буквами x , y , z , t . Первые три условія прямо даютъ слѣдующія уравненія:

$$2y = x \dots (1)$$

$$t = s - y \dots (2)$$

$$x + y + s + t = 14 \dots (3)$$

Искомое число изображается формулою: $x + 10y + 100z + 1000t$; обращенное число — формулою $1000x + 100y + 10z + t$. Четвертое условіе выражается уравненіемъ

$$x + 10y + 100z + 1000t + 4905 = 1000x + 100y + 10z + t,$$

или, короче:

$$111x + 10y - 10s - 111t = 545 \dots (4).$$

Вычтя (2) изъ (3), находимъ

$$x + y + s = 14 - s + y,$$

откуда

$$x = 14 - 2s.$$

Въ такомъ случаѣ ур. (1) дастъ

$$2y = x = 14 - 2s,$$

откуда

$$y = 7 - s;$$

а слѣдов.

$$t = s - y = 2s - 7.$$

Подставивъ въ ур. (4) вмѣсто x , y и t ихъ выраженія черезъ s , находимъ:

$$111(14 - 2s) + 10(7 - s) - 10s - 111(2s - 7) = 545,$$

откуда

$$s = 4;$$

а потому: $x = 6$, $y = 3$, $t = 1$. Итакъ, книгопечатаніе изобрѣтено было въ 1436 году.

Примѣръ IV. Два свѣчныхъ завода конкурируютъ другъ съ другомъ. Второй открытъ 40 днями позже перваго, и на немъ работаетъ 70 человекъ по 12 часовъ въ день, между тѣмъ какъ на первомъ только 60 рабочихъ, занятыхъ по 10 часовъ въ день. Черезъ сколько дней оба завода приготовятъ одинаковое число свѣчей, полагая, что каждый рабочий на той и другой фабрикѣ изготовляетъ одинаковое число свѣчей въ часъ?

Пусть искоемое число дней, считая со времени открытія перваго завода, будет x ; пусть, кроме того, каждый рабочий изготовляет въ часъ y свѣчей. 60 рабочихъ перваго завода, работая по 10 часовъ въ день, изготовятъ въ x дней $y \cdot 10 \cdot x \cdot 60$ свѣчей; 70 рабочихъ втораго завода, работая по 12 часовъ въ день, изготовятъ въ $x - 40$ дней $y \cdot 12 \cdot (x - 40) \cdot 70$ свѣчей. По условію, оба числа свѣчей равны, слѣд. получается уравненіе съ двумя неизвѣстными:

$$y \cdot 10 \cdot x \cdot 60 = y \cdot 12 \cdot (x - 40) \cdot 70.$$

Обѣ части уравненія дѣлятся на произведеніе $y \cdot 10 \cdot 12$; это дѣленіе позволительно, такъ какъ y , по смыслу задачи, отлично отъ нуля. Сокративъ, найдемъ

$$5x = 7(x - 40),$$

откуда

$$x = 140.$$

Примѣчаніе. Для составленія уравненія пришлось ввести *вспомогательное неизвѣстное* y , котораго величина остается неопредѣленною.

Приводимъ еще одну задачу, въ которой составленіе уравненій требуетъ введенія двухъ *вспомогательныхъ неизвѣстныхъ*; это — и исторически извѣстная задача Ньютона.

Примѣръ V. Задача Ньютона. *Площади трехъ луговъ равны соответственно: $3\frac{1}{3}$ десятинамъ, 10 и $24\frac{1}{3}$ десятинамъ; причѣмъ на всѣхъ трехъ лугахъ трава имѣетъ одинаковую высоту и растетъ равномерно съ одинаковою быстротою. Первыи лугъ прокормилъ 12 быковъ въ продолженіи четырехъ недѣль, второи — 21 быкъ въ теченіи 9 недѣль. Сколько быковъ можетъ прокормить третій лугъ въ теченіи 18 недѣль?*

Пусть искоемое число быковъ равно x . Для облегченія составленія уравненій пужно ввести *два вспомогательныхъ неизвѣстныхъ*, именно: высоту травы на каждомъ лугу, которую обозначимъ буквою y , и скорость, съ которою трава растетъ, т.-е. количество, на которое увеличивается ея высота въ недѣлю; пусть это неизвѣстное будетъ z .

На первомъ лугу количество травы вначалѣ было $y \times 3\frac{1}{3}$ или $\frac{10}{3} y$, а при ростѣ ея въ 4 недѣли равно $z \times 3\frac{1}{3} \times 4$, или $\frac{40}{3} z$. Полное количество травы, сѣденной 12-ю быками въ 4 недѣли, равно

$$\frac{10}{3} y + \frac{40}{3} z, \quad \text{или} \quad \frac{10(y + 4z)}{3};$$

слѣд. одинъ быкъ въ 1 недѣлю сѣдалъ

$$\frac{10(y + 4z)}{3 \times 4 \times 12}, \quad \text{или} \quad \frac{5(y + 4z)}{72}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что количество травы, сѣденной однимъ быкомъ въ одну недѣлю на второмъ лугу, равно

$$\frac{10(y + 9z)}{9 \times 21}, \quad \text{или} \quad \frac{10(y + 9z)}{189};$$

а на третьемъ, оно равно

$$\frac{24(y+18x)}{18 \times x}, \text{ или } \frac{4(y+18x)}{3x}.$$

Выразивъ, что количество травы, поѣдаемое на каждомъ лугу однимъ быкомъ въ одну недѣлю, одно и то же, получимъ уравненія:

$$\frac{5(y+4x)}{72} = \frac{10(y+9x)}{189},$$

$$\frac{5(y+4x)}{72} = \frac{4(y+18x)}{3x}.$$

Такимъ образомъ получили два уравненія съ тремя неизвѣстными, сл. имѣемъ случай неопредѣленности; но здѣсь неопредѣлены только y и z , между тѣмъ какъ главное неизвѣстное x имѣетъ величину вполне опредѣленную. Въ самомъ дѣлѣ, два полученныхъ уравненія даютъ возможность опредѣлить отношеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ $\frac{y}{z}$ и главное неизвѣстное x . Дѣйствительно, раздѣливъ обѣ части каждаго уравненія на z и положивъ $\frac{y}{z} = u$, найдемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными x и u :

$$\frac{5(u+4)}{72} = \frac{10(u+9)}{189},$$

$$\frac{5(u+4)}{72} = \frac{4(u+18)}{3x},$$

изъ которыхъ и можно опредѣлить эти неизвѣстныя. Изъ перваго ур. найдемъ: $u = 12$; вставивъ вмѣсто u это значеніе во второе, найдемъ: $x = 36$.

Слѣд., третій лугъ могъ прокормить 36 быковъ въ теченіе 18 недѣль.

ГЛАВА XXIII.

Теорія пропорцій.

Пропорція прямая и обратная. — Пропорція геометрическая; пропорция арифметическая. — О пропорциональности величинъ. — Гармоническая пропорція. — Приложенія.

299. Въ этой главѣ мы займемся изученіемъ особаго вида равенствъ, называемыхъ *пропорціями*; изученіе свойствъ этихъ равенствъ важно въ виду многочисленныхъ и разнообразныхъ ихъ примѣненій.

Пропорція арифметическая.

300. Разность двухъ количествъ a и b называется *разностнымъ* или *арифметическимъ* ихъ *отношеніемъ*; писмено оно выражается такъ: $a - b$. Количества a и b называются *членами* отношенія: a — *предыдущимъ*, b — *послѣдующимъ*; числовая величина $a - b$ наз. *разностью* отношенія.

Если два арифметических отношенія $a - b$ и $c - d$ равны, то соединяя ихъ знаками равенства, получимъ равенство

$$a - b = c - d,$$

называемое *разностию*, или *арифметическою пропорціею*.

Пропорція читается такъ: a относится къ b , какъ c къ d . Количества a , b , c и d называются членами пропорціи: a — первымъ, b — вторымъ, c — третьимъ, d — четвертымъ; кроме того, a и d называются *крайними*, b и c — *средними*.

301. Главное свойство арифметической пропорціи. Если въ равенствѣ

$$a - b = c - d$$

перенесемъ d въ первую, а b во вторую часть, то получимъ

$$a + d = b + c,$$

т.е. во всякой арифметической пропорціи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ.

Обратно: взявъ равенство

$$a + d = b + c$$

и перенесъ b въ первую, а d во вторую часть, найдемъ

$$a - b = c - d.$$

т.е. если сумма двухъ количествъ равна суммѣ двухъ другихъ, то эти четыре количества арифметически пропорціональны.

302. Опредѣленіе неизвѣстныхъ членовъ. Перенесъ въ пропорціи

$$a - b = c - d$$

членъ b во вторую часть, найдемъ:

$$a = (b + c) - d \quad . \quad . \quad (1).$$

Опредѣляя изъ той же пропорціи b , находимъ

$$b = (a - d) - c \quad . \quad . \quad (2).$$

Равенство (1) показываетъ, что *крайній членъ арифм. пропорціи равенъ суммѣ среднихъ безъ другою крайняго*; а равенство (2), что *средній членъ равенъ суммѣ крайнихъ безъ другою средняго*.

303. Непрерывная пропорція. Арифметическая середина. Если въ арифметической пропорціи равны оба крайние, или оба средніе члена, то пропорція называется *непрерывною*. Таковы напр. пропорціи: $5 - 3 = 7 - 5$; $2 - 10 = 10 - 18$; вообще

$$a - b = b - c \quad \text{и} \quad p - q = r - p$$

суть пропорціи непрерывныя. Въ первой b , а во второй p называются *арифметическими срединами* двухъ другихъ членовъ.

Примѣняя главное свойство къ одной изъ этихъ пропорцій, напр. къ первой, находимъ:

$$2b = a + c, \text{ откуда } b = \frac{a + c}{2};$$

т.-е. *арифметическая средина между двумя количествами равна ихъ полусуммѣ.*

Обобщая этотъ выводъ, называютъ *арифметическою срединою* нѣсколькихъ количествъ — сумму ихъ, *дѣленную на число ихъ*.

Такимъ образомъ, если имѣемъ n количествъ

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$$

то арифметическая средина ихъ будетъ

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n}{n}.$$

Опредѣленіе арифметическихъ срединъ весьма важно для наблюдательныхъ наукъ. Пусть, напр., опредѣляя углоизмѣрнымъ приборомъ нѣкоторый уголъ въ нѣсколько примѣровъ, нашли: при первомъ измѣреніи $28^{\circ}52'36''$, при двухъ слѣдующихъ $28^{\circ}51'52''$ и при четвертомъ измѣреніи $28^{\circ}51'24''$. Какова величина угла? Такъ какъ всѣ четыре измѣренія не согласуются между собою, то остается одно средство — взять *среднюю величину*.

$$x = \frac{28^{\circ}52'36'' + 28^{\circ}51'52'' \times 2 + 28^{\circ}51'24''}{4} = 28^{\circ}51'56''.$$

Пропорція геометрическая.

304. Частное отъ раздѣленія двухъ количествъ $\frac{a}{b}$ наз. *кратнымъ* или *геометрическимъ отношеніемъ* a къ b ; численная величина отношенія наз. *знаменателемъ* отношенія.

Равенство двухъ геометрическихъ отношеній называется *кратною* или *геометрическою пропорціею*, напр.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \dots (1).$$

305. Главное свойство геометрической пропорціи. *Во всякой геометрической пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, приведя въ вышенаписанной пропорціи дроби къ общему знаменателю и откинувъ его, найдемъ

$$ad = bc \dots (2).$$

Наоборотъ, если произведеніе двухъ количествъ равно произведенію двухъ другихъ количествъ, то такія четыре количества пропорціональны.

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ обѣ части равенства $ad = bc$ на bd , найдемъ:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

306. Опредѣленіе неизвѣстныхъ членовъ. Если обѣ части равенства (2), вытекающаго изъ пропорціи (1), раздѣлимъ на d , то имеемъ:

$$a = \frac{bc}{d} \dots (3).$$

Раздѣливъ же обѣ части (2) на c , находимъ:

$$b = \frac{ad}{c} \dots (4).$$

Равенство (3) показываетъ, что *во всякой геометрической пропорціи крайній членъ равенъ произведенію среднихъ, діленному на другой крайній*; а равенство (4), что *неизвѣстный средний равенъ произведенію крайнихъ, діленному на другой средний*.

Опредѣленіе неизвѣстнаго члена, когда остальные три члена извѣстны, называется *рѣшеніемъ* пропорціи.

307. Непрерывная пропорція. Геометрическая середина. Когда равны оба крайніе, или оба средніе члена, пропорція называется *непрерывною*; напр. $12 : 6 = 24 : 12$, или $2 : 4 = 4 : 8$.

Каждый изъ равныхъ членовъ непрерывной пропорціи наз. *среднимъ геометрическимъ* между двумя другими. Приравнявъ въ непрерывной пропорціи $a : b = b : d$ произведение среднихъ произведенію крайнихъ, получимъ $b^2 = ad$, откуда

$$b = \sqrt{ad};$$

слѣд. *геометрическая середина двухъ количествъ равна квадратному корню изъ ихъ произведенія*.

Но аналогія съ этимъ выводомъ, среднимъ геометрическимъ нѣсколькихъ количествъ называютъ корень порядка, равнаго ихъ числу, изъ ихъ произведенія. Потому, геометрическая середина n количествъ: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ будетъ

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

308. Производныя пропорціи. Если пропорція получается изъ другой пропорціи посредствомъ нѣкоторыхъ преобразованій, то первая называется *производною* отъ второй. Ознакомимся съ различными видами производимыхъ пропорцій.

I. Взявъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \dots (1),$$

приравняемъ въ ней произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ, и раздѣлимъ полученное равенство $ad = bc$ послѣдовательно на: cd , ab и ac ; по сокращенію найдемъ:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \dots (2) \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \dots (3) \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \dots (4).$$

Переставивъ въ каждой изъ этихъ четырехъ пропорцій самыя отношенія, найдемъ еще четыре пропорціи:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{b} \dots (5) \quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \dots (6) \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \dots (7) \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \dots (8).$$

Такимъ образомъ въ каждой пропорціи можно перемѣнять мѣста: среднихъ членовъ, крайнихъ, и такъ и оружіемъ вѣстись. Черезъ это всякую пропорцію можно представить въ восьми различныхъ видахъ.

II. Придавъ къ обѣимъ частямъ равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \dots (1)$ по 1, а потомъ вычти по 1, получимъ по приведеніи каждой части къ общему знаменателю:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots (2) \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots (3).$$

Пропорціи (2) и (3) показываютъ, что: сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему такъ, какъ сумма или разность членовъ втораго отношенія къ своему послѣдующему.

Раздѣливъ почленно каждую изъ пропорцій (2) и (3) на (1), найдемъ:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c+d}{c} \dots (4) \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \dots (5)$$

Сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ предыдущему такъ, какъ сумма или разность членовъ втораго отношенія къ предыдущему тому же отношенія.

Раздѣливъ въ пропорціяхъ (2), (3), (4) и (5) мѣста среднихъ членовъ, найдемъ:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \dots (6), \quad \frac{a}{c-d} = \frac{b}{d} \dots (7), \quad \frac{a}{c+d} = \frac{a}{c} \dots (8) \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} \dots (9)$$

Сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ суммѣ или разности членовъ втораго отношенія такъ, какъ предыдущій къ предыдущему или послѣдующій къ послѣдующему.

Раздѣливъ пропорцію (2) на (3), найдемъ

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \dots (10)$$

Сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ втораго отношенія къ ихъ разности.

Перемѣнивъ въ пропорціи (1) мѣста среднихъ членовъ и приравнявъ къ новой пропорціи $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ преобразованія, указываемыя равенствами (2), (3) и т. д., найдемъ:

$$\frac{a \cdot c}{c} = \frac{b+d}{d} (11), \quad \frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} (12), \quad \frac{a+c}{a} = \frac{b}{b} \frac{d}{d} (13), \quad \frac{a-c}{a} = \frac{b}{b} \frac{d}{d} (14),$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} (15), \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d} (16), \quad \frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} \frac{d}{d} (17), \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} (18).$$

Изъ сравненія же (15) съ (16) имѣемъ

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}, \text{ откуда } \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}.$$

Результаты, выражаемые этими равенствами, нетрудно выразить словесно.

309. Сложныя пропорціи Пропорція, выводимая изъ нѣсколькихъ другихъ пропорцій, называется *сложною*.

1. Посмотримъ, при какихъ условіяхъ возможно почленное сложеніе или вычитаніе двухъ пропорцій. Пусть данныя пропорціи будутъ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'};$$

изслѣдуемъ, при какихъ условіяхъ возможна пропорція

$$\frac{a \pm a'}{b \pm b'} = \frac{c \pm c'}{d \pm d'} \dots (1)$$

гдѣ знакъ $(+)$ относится къ почленному сложению, а $(-)$ къ почленному вычитанію. Преобразуемъ испытуемое равенство, приравнявъ произведеніе крайнихъ членовъ произведенію среднихъ; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$(a \pm a')(d \pm d') = (b \pm b')(c \pm c').$$

Выполняя умноженіе и замѣчая, что верхніе знаки надо брать съ верхними, а нижніе съ нижними, находимъ:

$$ad \pm a'd \pm ad' = a'd' = bc \pm b'c \pm bc' + b'c'.$$

Но изъ данныхъ пропорцій имѣемъ: $ad = bc$ и $a'd' = b'c'$; отнявъ по-ровну изъ обѣихъ частей, найдемъ

$$\pm a'd \pm ad' = \pm b'c \pm bc'.$$

Здѣсь совокупно написаны два равенства: въ одномъ членамъ предшествуетъ знакъ $+$, въ другомъ — всѣмъ членамъ предшествуетъ $(-)$; помноживъ обѣ части втораго на (-1) , увидимъ, что оно ничѣмъ не отличается отъ перваго, такъ что оба равенства приводятся къ одному

$$a'd + ad' = b'c + bc',$$

а это значитъ, что почленное сложеніе и почленное вычитаніе двухъ пропорцій возможны при однихъ и тѣхъ же условіяхъ. Затѣмъ, пользуясь 'данными пропорціями, исключимъ изъ послѣдняго равенства d и d' , чтобы уменьшить этия числа входящихъ въ него буквъ и такимъ образомъ упростить его. Съ этою цѣлью опредѣлимъ изъ данныхъ пропорцій d и d' и въ выраженія подставимъ въ предыдущее равенство; такимъ образомъ найдемъ:

$$\frac{a'bc}{a} + \frac{ab'c'}{a} = b'c + bc',$$

или, освободивъ отъ дробей,

$$a^2bc - a^2b'c' - aa'b'c - aa'bc.$$

Перенеся все члены въ первую часть и вынося за скобки въ 1-ю и 3-ю членахъ $a'c$, а во 2-ю и 4-ю ac' , найдемъ

$$a'c(a'b - ab') - ac'(a'b' - ab) = 0, \text{ или } (a'b - ab')(a'c - ac') = 0. \quad (2).$$

Это равенство замѣняетъ собою испытуемое, а потому при какихъ условіяхъ возможно (2), при такихъ же условіяхъ возможно и (1).

Но равенство (2) требуетъ, чтобы произведение двухъ множителей равнялось нулю; и это возможно только тогда, когда одна изъ нихъ равна нулю, поэтому слѣдуетъ положить

$$\text{или } a'b - ab' = 0, \text{ или } a'c - ac' = 0.$$

Обративъ нѣ въ пропорціи, имѣемъ

$$\frac{a'}{b} = \frac{a}{b'} \quad \text{и} \quad \frac{a'}{c} = \frac{a}{c'}$$

Замѣтимъ, что и изъ равенствъ или вычитаніе двухъ пропорцій возможно только тогда, когда эти пропорціи равны, или первое, или второе изъ этихъ равенствъ. Если же эти пропорціи не равны, то изъ нихъ ни одно изъ равенствъ не слѣдуетъ. Если же эти пропорціи равны, то изъ нихъ слѣдуетъ, что $\frac{a'}{b} = \frac{a}{b'}$ и $\frac{a'}{c} = \frac{a}{c'}$ суть два равенства, изъ которыхъ одно слѣдуетъ изъ другого. Замѣтимъ, что $\frac{a'}{b}$ и $\frac{a}{b'}$ суть знаменатели, а $\frac{a'}{c}$ и $\frac{a}{c'}$ — числители, поэтому изъ этихъ пропорцій слѣдуетъ, что $\frac{a'}{b} = \frac{a}{b'}$ и $\frac{a'}{c} = \frac{a}{c'}$ суть два равенства, изъ которыхъ одно слѣдуетъ изъ другого. Замѣтимъ, что $\frac{a'}{b}$ и $\frac{a}{b'}$ суть знаменатели, а $\frac{a'}{c}$ и $\frac{a}{c'}$ — числители, поэтому изъ этихъ пропорцій слѣдуетъ, что $\frac{a'}{b} = \frac{a}{b'}$ и $\frac{a'}{c} = \frac{a}{c'}$ суть два равенства, изъ которыхъ одно слѣдуетъ изъ другого.

Если же эти пропорціи равны, то, называя общую знаменатель буквою q , имѣемъ

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = q, \text{ откуда } a = bq \text{ и } a' = b'q.$$

Складывая или вычитая эти равенства, находимъ.

$$a \pm a' = (b \pm b')q, \text{ откуда } \frac{a \pm a'}{b \pm b'} = q = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Изъ этого слѣдуетъ, что $\frac{a \pm a'}{b \pm b'}$ (суть зн. отн. сложной пропорціи) знаменатели отъ отношений сложной пропорціи, полученной чрезъ почленное сложение или вычитаніе двухъ пропорцій, имѣющихъ равныя знаменатели, равны знаменателю отн. дан. пропорцій.

Примѣръ I. Такъ изъ пропорцій $\frac{10}{4} = \frac{30}{12}$ и $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$ получаемъ чрезъ почленное сложение: $\frac{15}{6} = \frac{45}{18}$, а чрезъ почленное вычитаніе: $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$ — пропорціи, имѣющія такое же знаменатель отъ отношенія какъ и данныя.

Примѣръ II. Изъ пропорцій $\frac{10}{4} = \frac{30}{12}$ и $\frac{7}{2} = \frac{21}{6}$, получаемъ чрезъ почленное сложене и вычитаніе вѣрныя пропорціи: $\frac{17}{6} = \frac{51}{18}$ и $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$.

II. Можно перемножать почленно какія угодно пропорціи; знаменатель отношенія полученной сложной пропорціи будетъ равенъ произведенію знаменателей отношеній данныхъ пропорцій.

Пусть даны пропорціи

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ которой знаменатель отношенія равенъ } q,$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad q$$

$$\frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad q''$$

Перемножая почленно эти равенства по правилу умноженія дробей, найдемъ

$$\frac{a.a'.a''}{b.b'.b''} = \frac{c.c'.c''}{d.d'.d''}$$

Знаменатель отношенія этой пропорціи равенъ $\frac{aa'a''}{bb'b''} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a''}{b''} = q.q'.q''$, т.-е. произведенію знаменателей отношеній данныхъ пропорцій.

III. Можно пропорцію раздѣлить почленно на другую; знаменатель отношенія сложной пропорціи будетъ равенъ частному отъ раздѣленія знаменателей отношеній данныхъ пропорцій.

Раздѣливъ пропорцію $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ на $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$ по правилу дѣленія дробей найдемъ:

$$\frac{ab}{a'b} = \frac{cd}{c'd'}$$

Раздѣливъ оба члена первой части на $a'b'$, а оба члена второй на $c'd'$, получимъ

$$\frac{a:a'}{b:b'} = \frac{c:c'}{d:d'}$$

Знаменатель отношенія полученной пропорціи равенъ

$$\frac{a:a'}{b:b'} = \frac{ab}{a'b} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'} = \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = q:q',$$

если знаменатели отношеній данныхъ пропорцій обозначить соответственно буквами q и q' .

IV. Если въ двухъ пропорціяхъ предыдущіе члены равны, то изъ послѣдующихъ можно составить пропорцію; если же послѣдующіе равны, то предыдущіе пропорціональны.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ пропорціяхъ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a}{b'} = \frac{c}{d'}$$

перемѣнимъ мѣста среднихъ, то найдемъ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d'}$$

откуда

$$\frac{b}{d} = \frac{b'}{d'} \quad \text{или} \quad \frac{b}{b'} = \frac{d}{d'}$$

Такимъ же образомъ, взявъ двѣ пропорціи съ равными послѣдующими членами

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a'}{b} = \frac{c'}{d}$$

и перемѣстивъ въ нихъ средніе члены, найдемъ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a'}{c'} = \frac{b}{d}$$

откуда

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad \text{или} \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

Если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма всѣхъ предыдущихъ числителей къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ любой изъ числителей къ своему послѣдующему.

Пусть имѣемъ равныя отношенія

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n};$$

если возьмемъ общаго знаменателя этихъ отношеній буквою q , то:

$$\frac{a_1}{b_1} = q; \quad \frac{a_2}{b_2} = q; \quad \frac{a_3}{b_3} = q; \quad \dots \quad \frac{a_n}{b_n} = q.$$

Выражая дѣлимое чрезъ дѣлителя и частное, имѣемъ:

$$a_1 = b_1 q; \quad a_2 = b_2 q; \quad a_3 = b_3 q; \quad \dots \quad a_n = b_n q. \quad (1).$$

Сложивъ почленно эти равенства и во второй части вынеся за скобки q , получимъ:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)q.$$

Раздѣливъ обѣ части на $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ и сокративъ вторую часть на q , получимъ во второй части q , или $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ и т. д.:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} = q = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots$$

что и требовалось доказать.

VI Если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма всѣхъ предыдущихъ, умноженныхъ на какія-либо количества, такъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, умноженныхъ соответственно на тѣ же самыя количества, какъ любой изъ предыдущихъ относится къ своему послѣдующему.

Умноживъ равенства (1) пункта V соответственно на $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, а затѣмъ поступая по предыдущему, найдемъ.

$$\frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + \dots + a_n m_n}{b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + \dots + b_n m_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots$$

VII. Возвысивъ равныя отношенія $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ въ m -ую степень, найдемъ

$$\frac{a_1^m}{b_1^m} = \frac{a_2^m}{b_2^m} = \frac{a_3^m}{b_3^m} = \dots = \frac{a_n^m}{b_n^m},$$

откуда (на осн. V), получаемъ

$$\frac{a_1^m}{b_1^m} = \frac{a_2^m}{b_2^m} = \frac{a_3^m}{b_3^m} = \dots = \frac{a_n^m}{b_n^m} = \frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m}{b_1^m + b_2^m + b_3^m + \dots + b_n^m} = \frac{a_1^m}{b_1^m} = \frac{a_2^m}{b_2^m} = \dots$$

а по извлеченіи корня m -го порядка:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m}{b_1^m + b_2^m + b_3^m + \dots + b_n^m} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots$$

О пропорціональности величинъ.

310 Опредѣленія. I. Когда двѣ величины A и B зависятъ одна отъ другой такъ, что отношеніе двухъ какихъ угодно значеній первой равно отношенію соответствующихъ значеній второй, то такія величины называются прямо пропорціональными или просто пропорціональными.

Согласно этому опредѣленію, если изобразимъ буквами a, a', a'', a''', \dots послѣдовательныя значенія величины A, а буквами b, b', b'', b''', \dots соответствующія значенія величины B, то A и B—прямо пропорціональны, если

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \dots \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots$$

Примѣры. Цѣна провіантѣ пропорціональна ея вѣсу; жалованье рабочаго пропорціонально времени его работы; окружность круга пропорціональна его диаметру; вѣсъ однороднаго тѣла пропорціоналенъ его объему; пространство, проходимое равноѣрно движущимся тѣломъ, пропорціонально времени движенія; и т. п.

II. Когда двѣ величины A и B находятся въ такой зависимости одна отъ другой, что отношеніе двухъ какихъ-либо значеній первой равно обратному отношенію соответствующихъ значеній второй,—такія величины называются обратно пропорціональными.

Согласно этому определению, если буквами a, a', a'', a''', \dots назовемъ нѣкоторые значенія величины A , а буквами b, b', b'', b''', \dots соответствующія значенія величины B , то A и B обратно пропорціональны, если

$$\frac{a}{a'} = \frac{b'}{b}, \quad \frac{a}{a''} = \frac{b''}{b}, \quad \frac{a}{a'''} = \frac{b'''}{b}, \dots \text{ или } a \cdot b = a' \cdot b' = a'' \cdot b'' = a''' \cdot b''' = \dots$$

Примѣры. Время, необходимое для окончанія нѣкоторой работы, вообще обратно пропорціонально числу рабочихъ; скорость равномернаго движенія обратно пропорціональна времени, необходимому для прохожденія опредѣленнаго расстоянія; объемъ газа, при постоянной температурѣ, обратно пропорціоналенъ давлению, подъ которымъ газъ находится; и т. п.

311. Какимъ образомъ доказывается пропорціональность величинъ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ пропорціональность величинъ очевидна, или принимается какъ само собою, напр. пропорціональность капитала и прибыли, платя рабочаго и т. д. въ течение котораго онъ работаетъ. Затѣмъ, пропорціональность нѣкоторыхъ величинъ строго доказывается въ тѣхъ наукахъ, въ которыхъ величины подлежатъ измѣненію, такъ въ геометріи доказывается пропорціональность сторонъ подобныхъ треугольниковъ, пропорціональность окружностей и т. д.; въ физикѣ добавляется пропорціональность плотности газъ и давленія, и т. п.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ пропорціональность величинъ не подлежитъ специально ни какому изъ способовъ доказательства, а является самою собою, и поэтому (иногда) убѣждаются въ ней опытомъ.

Въ настоящемъ случаѣ, когда одна изъ величинъ A принимаетъ значенія $a, 2a, 3a, 4a, \dots$, т. е. въ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013, 1014, 1015, 1016, 1017, 1018, 1019, 1020, 1021, 1022, 1023, 1024, 1025, 1026, 1027, 1028, 1029, 1030, 1031, 1032, 1033, 1034, 1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1040, 1041, 1042, 1043, 1044, 1045, 1046, 1047, 1048, 1049, 1050, 1051, 1052, 1053, 1054, 1055, 1056, 1057, 1058, 1059, 1060, 1061, 1062, 1063, 1064, 1065, 1066, 1067, 1068, 1069, 1070, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1076, 1077, 1078, 1079, 1080, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1087, 1088, 1089, 1090, 1091, 1092, 1093, 1094, 1095, 1096, 1097, 1098, 1099, 1100, 1101, 1102, 1103, 1104, 1105, 1106, 1107, 1108, 1109, 1110, 1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1117, 1118, 1119, 1120, 1121, 1122, 1123, 1124, 1125, 1126, 1127, 1128, 1129, 1130, 1131, 1132, 1133, 1134, 1135, 1136, 1137, 1138, 1139, 1140, 1141, 1142, 1143, 1144, 1145, 1146, 1147, 1148, 1149, 1150, 1151, 1152, 1153, 1154, 1155, 1156, 1157, 1158, 1159, 1160, 1161, 1162, 1163, 1164, 1165, 1166, 1167, 1168, 1169, 1170, 1171, 1172, 1173, 1174, 1175, 1176, 1177, 1178, 1179, 1180, 1181, 1182, 1183, 1184, 1185, 1186, 1187, 1188, 1189, 1190, 1191, 1192, 1193, 1194, 1195, 1196, 1197, 1198, 1199, 1200, 1201, 1202, 1203, 1204, 1205, 1206, 1207, 1208, 1209, 1210, 1211, 1212, 1213, 1214, 1215, 1216, 1217, 1218, 1219, 1220, 1221, 1222, 1223, 1224, 1225, 1226, 1227, 1228, 1229, 1230, 1231, 1232, 1233, 1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1239, 1240, 1241, 1242, 1243, 1244, 1245, 1246, 1247, 1248, 1249, 1250, 1251, 1252, 1253, 1254, 1255, 1256, 1257, 1258, 1259, 1260, 1261, 1262, 1263, 1264, 1265, 1266, 1267, 1268, 1269, 1270, 1271, 1272, 1273, 1274, 1275, 1276, 1277, 1278, 1279, 1280, 1281, 1282, 1283, 1284, 1285, 1286, 1287, 1288, 1289, 1290, 1291, 1292, 1293, 1294, 1295, 1296, 1297, 1298, 1299, 1300, 1301, 1302, 1303, 1304, 1305, 1306, 1307, 1308, 1309, 1310, 1311, 1312, 1313, 1314, 1315, 1316, 1317, 1318, 1319, 1320, 1321, 1322, 1323, 1324, 1325, 1326, 1327, 1328, 1329, 1330, 1331, 1332, 1333, 1334, 1335, 1336, 1337, 1338, 1339, 1340, 1341, 1342, 1343, 1344, 1345, 1346, 1347, 1348, 1349, 1350, 1351, 1352, 1353, 1354, 1355, 1356, 1357, 1358, 1359, 1360, 1361, 1362, 1363, 1364, 1365, 1366, 1367, 1368, 1369, 1370, 1371, 1372, 1373, 1374, 1375, 1376, 1377, 1378, 1379, 1380, 1381, 1382, 1383, 1384, 1385, 1386, 1387, 1388, 1389, 1390, 1391, 1392, 1393, 1394, 1395, 1396, 1397, 1398, 1399, 1400, 1401, 1402, 1403, 1404, 1405, 1406, 1407, 1408, 1409, 1410, 1411, 1412, 1413, 1414, 1415, 1416, 1417, 1418, 1419, 1420, 1421, 1422, 1423, 1424, 1425, 1426, 1427, 1428, 1429, 1430, 1431, 1432, 1433, 1434, 1435, 1436, 1437, 1438, 1439, 1440, 1441, 1442, 1443, 1444, 1445, 1446, 1447, 1448, 1449, 1450, 1451, 1452, 1453, 1454, 1455, 1456, 1457, 1458, 1459, 1460, 1461, 1462, 1463, 1464, 1465, 1466, 1467, 1468, 1469, 1470, 1471, 1472, 1473, 1474, 1475, 1476, 1477, 1478, 1479, 1480, 1481, 1482, 1483, 1484, 1485, 1486, 1487, 1488, 1489, 1490, 1491, 1492, 1493, 1494, 1495, 1496, 1497, 1498, 1499, 1500, 1501, 1502, 1503, 1504, 1505, 1506, 1507, 1508, 1509, 1510, 1511, 1512, 1513, 1514, 1515, 1516, 1517, 1518, 1519, 1520, 1521, 1522, 1523, 1524, 1525, 1526, 1527, 1528, 1529, 1530, 1531, 1532, 1533, 1534, 1535, 1536, 1537, 1538, 1539, 1540, 1541, 1542, 1543, 1544, 1545, 1546, 1547, 1548, 1549, 1550, 1551, 1552, 1553, 1554, 1555, 1556, 1557, 1558, 1559, 1560, 1561, 1562, 1563, 1564, 1565, 1566, 1567, 1568, 1569, 1570, 1571, 1572, 1573, 1574, 1575, 1576, 1577, 1578, 1579, 1580, 1581, 1582, 1583, 1584, 1585, 1586, 1587, 1588, 1589, 1590, 1591, 1592, 1593, 1594, 1595, 1596, 1597, 1598, 1599, 1600, 1601, 1602, 1603, 1604, 1605, 1606, 1607, 1608, 1609, 1610, 1611, 1612, 1613, 1614, 1615, 1616, 1617, 1618, 1619, 1620, 1621, 1622, 1623, 1624, 1625, 1626, 1627, 1628, 1629, 1630, 1631, 1632, 1633, 1634, 1635, 1636, 1637, 1638, 1639, 1640, 1641, 1642, 1643, 1644, 1645, 1646, 1647, 1648, 1649, 1650, 1651, 1652, 1653, 1654, 1655, 1656, 1657, 1658, 1659, 1660, 1661, 1662, 1663, 1664, 1665, 1666, 1667, 1668, 1669, 1670, 1671, 1672, 1673, 1674, 1675, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680, 1681, 1682, 1683, 1684, 1685, 1686, 1687, 1688, 1689, 1690, 1691, 1692, 1693, 1694, 1695, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700, 1701, 1702, 1703, 1704, 1705, 1706, 1707, 1708, 1709, 1710, 1711, 1712, 1713, 1714, 1715, 1716, 1717, 1718, 1719, 1720, 1721, 1722, 1723, 1724, 1725, 1726, 1727, 1728, 1729, 1730, 1731, 1732, 1733, 1734, 1735, 1736, 1737, 1738, 1739, 1740, 1741, 1742, 1743, 1744, 1745, 1746, 1747, 1748, 1749, 1750, 1751, 1752, 1753, 1754, 1755, 1756, 1757, 1758, 1759, 1760, 1761, 1762, 1763, 1764, 1765, 1766, 1767, 1768, 1769, 1770, 1771, 1772, 1773, 1774, 1775, 1776, 1777, 1778, 1779, 1780, 1781, 1782, 1783, 1784, 1785, 1786, 1787, 1788, 1789, 1790, 1791, 1792, 1793, 1794, 1795, 1796, 1797, 1798, 1799, 1800, 1801, 1802, 1803, 1804, 1805, 1806, 1807, 1808, 1809, 1810, 1811, 1812, 1813, 1814, 1815, 1816, 1817, 1818, 1819, 1820, 1821, 1822, 1823, 1824, 1825, 1826, 1827, 1828, 1829, 1830, 1831, 1832, 1833, 1834, 1835, 1836, 1837, 1838, 1839, 1840, 1841, 1842, 1843, 1844, 1845, 1846, 1847, 1848, 1849, 1850, 1851, 1852, 1853, 1854, 1855, 1856, 1857, 1858, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1864, 1865, 1866, 1867, 1868, 1869, 1870, 1871, 1872, 1873, 1874, 1875, 1876, 1877, 1878, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1889, 1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910, 1911, 1912, 1913, 1914, 1915, 1916, 1917, 1918, 1919, 1920, 1921, 1922, 1923, 1924, 1925, 1926, 1927, 1928, 1929, 1930, 1931, 1932, 1933, 1934, 1935, 1936, 1937, 1938, 1939, 1940, 1941, 1942, 1943, 1944, 1945, 1946, 1947, 1948, 1949, 1950, 1951, 1952, 1953, 1954, 1955, 1956, 1957, 1958, 1959, 1960, 1961, 1962, 1963, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 211

къ предѣлу $\sqrt{2}$, каждый разъ разъ будемъ находить, что во сколько разъ измѣняется А, во столько же разъ и В; это заключеніе вѣрно, слѣд., и въ предѣлѣ.

II. Если окажется, что соответственно значеніямъ А, равнымъ $a, 2a, 3a, \dots$ $\frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a, \dots$, величина В принимаетъ значенія, во столько же разъ меньшія или большія, т.-е. $b, \frac{1}{2}b, \frac{1}{3}b, \dots 2b, 3b, \dots$, то величины А и В обратно пропорціональны.

Требуется доказать, что если А приметъ значеніе $\frac{1}{7}a$, то соответствующее значеніе В будетъ $\frac{1}{7}b$. Въ самомъ дѣлѣ, когда А, вначалѣ имѣвшее величину a , обращается въ $\frac{1}{7}a$, т.-е. уменьшается въ 7 разъ, то В, по условію, во столько же разъ увеличивается, и слѣд. изъ b превращается въ $7b$; затѣмъ, когда А изъ $\frac{1}{7}a$ обращается въ $\frac{5}{7}a$, увеличиваясь въ 5 разъ, то В, соответственно этому, уменьшается въ 5 разъ, и потому изъ $7b$ превращается въ b . Теорема такимъ образомъ доказана для всѣхъ случаевъ, когда отношеніе соизмѣряемо, а отсюда, по способу предѣловъ, легко заключить, что она распространяется и на случай отношенія несоизмѣряемыхъ.

Примѣры: 1. Если принять, что для исполненія работы въ два, три, четыре и т. д. разъ большей или меньшей нужно рабочихъ въ два, три, четыре и т. д. разъ больше или меньше, то заключаемъ, что и во всѣхъ случаяхъ количество исполненной работы пропорціонально числу рабочихъ.

2. Въ физикѣ доказывается, что когда давленіе, подъ которымъ газъ находится, увеличивается или уменьшается въ два, три и т. д. разъ, объемъ газа уменьшается или увеличивается во столько же разъ; заключаемъ, что во всѣхъ случаяхъ объемъ газа обратно пропорціоналенъ давленію.

312. Пусть будутъ X и Y двѣ прямо-пропорціональныя величины, напр., вѣсъ товара и цѣна его. Пусть будутъ, затѣмъ, x' и x'' два частныхъ значенія первой, а y' и y'' два частныхъ значенія второй величины, соответствующія x' и x'' . По опредѣленію прямо пропорціональныхъ величинъ, отношеніе двухъ какихъ-либо значеній первой величины равно отношенію соответствующихъ значеній второй, слѣд.

$$\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''}.$$

перемѣнивъ мѣста среднихъ членовъ, имѣемъ

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x''}{y''}.$$

Такъ какъ разсматриваемыя значенія совершенно произвольны, то можно сказать, что *отношеніе* двухъ какихъ угодно соответственныхъ значеній пропорціональныхъ величинъ *постоянно*. Обозначивъ эту постоянную величину буквою K, имѣемъ

$$\frac{X}{Y} = K, \text{ откуда } X = K \cdot Y,$$

... из двух прямо-пропорциональных величин одна равняется другой, умноженной на постоянное количество, называемое коэффициентом пропорциональности.

Взяв из опыта или наблюдения два соответственных частных значения рассматриваемых величин, и взяв их отношение, найдем коэффициент пропорциональности, т. е. числовую величину отношения, связывающую эти величины.

Если x и y — величины обратно-пропорциональные, то, по определению, имеем

$$\frac{x}{x'} = \frac{y'}{y}.$$

или, приравняв произведение крайних произведению средних:

$$x' \cdot y = x \cdot y'.$$

Так как взятые значения произвольны, то можно сказать, что произведение двух каких угодно соответственных значений двух обратно-пропорциональных величин — постоянно. Обозначив это постоянное буквою K , имеем

$$x \cdot y = K, \text{ откуда } x = \frac{K}{y}.$$

... из двух обратно-пропорциональных величин одна равна по-... коэффициенту, умноженному на другую.

Коэффициент определяется опытом или наблюдением.

Рассмотрим теперь несколько величин. Когда изменение величины зависит от изменения нескольких других величин, то, говоря, что рассматриваемая величина прямо или обратно пропорциональна другой, разумьют при этом, что все другие величины в момент сравнения двух взятых величин остаются постоянными.

Пример I. Говоря, что простые процентные деньги прямо-пропорциональны капиталу и времени обращения, разумьют под этим, что простые деньги, принимаемые в определенное время, изменяются в том же отношении, как и капитал, и что процентные деньги, принимаемые одним и тем же капиталом, изменяются в том же отношении как продолжительность обращения его.

Пример II. Говоря, что объем газа прямо пропорционален его весу при постоянном расширении и обратно пропорционален давлению, разумьют под этим, что: при данных — температурѣ и давлении объемъ газа изменяется в том же отношении какъ его вѣсъ; при данных — температурѣ и вѣсѣ газа находится въ обратномъ отношеніи къ давлению; наконецъ, при данных — давлении и данномъ вѣсѣ, объемъ газа прямо пропорционаленъ квадрату температуры.

Обозначимъ рассматриваемыя величины буквами x, A, B, P и Q , и пусть x и A пропорциональны A и B и обратно пропорциональны P и Q . Пусть два соответственных частных значений этих величин будутъ

$$x', a', b', p', q'$$

$$x'', a'', b'', p'', q''.$$

... из двух x' через остальные величины.

Разсматривая величины x и A , полагаемъ, что остальные величины остаются безъ переменны, т.е. въ то время какъ x и A измѣняются, тѣ величины сохраняютъ неизмѣнные значенія b' , p' и q' . Въ то время какъ A изъ a' переходитъ въ a'' , величина x переходитъ изъ x' въ такую величину X , которая удовлетворяетъ равенству

$$\frac{X}{x} = \frac{a''}{a'}, \text{ откуда } X = \frac{a''}{a'} \cdot x' \quad . \quad (1)$$

ибо x и A прямо пропорціональны.

При измѣненіи x и B другія величины сохраняютъ значенія a'' , p' и q' ; при переходѣ B изъ b' въ b'' , x переходитъ изъ X , соответствующаго количеству b' , въ такое значеніе X' , которое удовлетворяетъ пропорціи

$$\frac{X'}{X} = \frac{b''}{b'}, \text{ откуда } X' = \frac{b''}{b'} \cdot X \quad . \quad (2),$$

такъ такъ x и B прямо пропорціональны.

Разсмотримъ x и P . Другія величины сохраняютъ значенія a'' , b'' , q' ; при переходѣ P изъ p' въ p'' , x перейдетъ изъ X' , соответствующаго p' , въ X'' —удовлетворяющее пропорціи

$$\frac{X''}{X'} = \frac{p'}{p''}, \text{ откуда } X'' = \frac{p'}{p''} \cdot X' \quad . \quad (3),$$

ибо x и P обратно пропорціональны.

Наконецъ, рассмотримъ x и Q , при чемъ остальные величины сохраняютъ значенія a'' , b'' , p'' . При переходѣ Q изъ q' въ q'' , x переходитъ изъ X'' въ такую величину x'' , которая соответствуетъ ряду a'' , b'' , p'' , q'' . Эта величина x'' удовлетворяетъ пропорціи

$$\frac{x''}{X''} = \frac{q'}{q''}, \text{ откуда } x'' = \frac{q'}{q''} \cdot X'' \quad . \quad (4),$$

ибо x и Q величины обратно пропорціональны.

Для исключенія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ X , X' , X'' , перемножимъ почленно равенства (1), (2), (3) и (4); найдемъ

$$X \cdot X' \cdot X'' \cdot x'' = X \cdot X' \cdot X'' x'' \cdot \frac{a''}{a'} \cdot \frac{b'}{b''} \cdot \frac{p'}{p''} \cdot \frac{q'}{q''}.$$

Сокративъ на $X \cdot X' \cdot X''$, получимъ

$$x'' = x' \cdot \frac{a''}{a'} \cdot \frac{b'}{b''} \cdot \frac{p'}{p''} \cdot \frac{q'}{q''}.$$

Положивъ

$$\frac{x' \cdot p' \cdot q'}{a' \cdot b'} = K,$$

гдѣ x' , a' , b' , p' и q' представляютъ рядъ соответственныхъ частныхъ значеній разсматриваемыхъ величинъ, найдемъ

$$x'' = K \cdot \frac{a' b''}{p' q''}.$$

Такъ какъ это равенство относится къ ряду какихъ угодно соответственныхъ значений взятыхъ величинъ, можно замѣнить эти частныя значенія общими символами, и написать

$$x = K \cdot \frac{AB}{PQ}.$$

Опредѣливъ изъ опыта или наблюденія рядъ частныхъ соответственныхъ значений данныхъ величинъ, найдемъ численную величину *коэффициента* K , связывающаго данныя величины.

Если бы рассматриваемыя величины были только x , A и B , то имѣли бы

$$x = K \cdot AB,$$

т. е. если величина прямо пропорціональна нѣсколькимъ другимъ, то она равна ихъ произведенію, умноженному на постоянный коэффициентъ.

Если бы взяты были только величины x , P и Q , то имѣли бы

$$x = \frac{k}{PQ},$$

т. е. величина, обратно пропорціональная нѣсколькимъ другимъ, равна постоянному коэффициенту, дѣленному на произведеніе этихъ величинъ.

Наконецъ, изъ формулы

$$x = K \cdot \frac{AB}{PQ}$$

слѣдуетъ, что величина, прямо-пропорціональная ряду нѣкоторыхъ величинъ, и обратно-пропорціональная ряду другихъ величинъ, равна постоянному коэффициенту, умноженному на произведеніе ряда первыхъ величинъ, и дѣленному на произведеніе ряда другихъ величинъ.

Гармоническая пропорція.

313 Если три числа a , b и c удовлетворяютъ пропорціи

$$a : c = (a - b) : (b - c),$$

то второе число такъ относится къ третьему, какъ разность между первымъ и вторымъ къ разности между вторымъ и третьимъ, то они называются *гармоническими пропорциональными*; при этомъ b называется гармоническою среднею между a и c .

Приравнявъ произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ, найдемъ $ab - ac = ac - bc$; а раздѣливъ обѣ части этого равенства на abc , найдемъ

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a},$$

откуда

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что если b есть гармоническая средина между a и c , то $\frac{1}{b}$ есть арифметическая средина между $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$.

314. ТЕОРЕМА. *Арифметическая, геометрическая и гармоническая средины двух каких-нибудь чисел составляют непрерывную геометрическую пропорцію.*

Пусть x , y и z будут: гармоническая, геометрическая и арифметическая средины чисел a и b ; т.-е.

$$a:b = (a-x):(x-b); \quad y^2 = ab; \quad z = \frac{a+b}{2}.$$

Приравнявъ въ первой произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ, находимъ

$$ax - ab = ab - bx;$$

прибавивъ къ обѣимъ частямъ по $bx - ab$, находимъ

$$ax - bx = 2ab; \quad \text{или} \quad 2xx = 2y^2; \quad \text{или} \quad xx = y^2,$$

откуда

$$x:y = y:z.$$

Примѣчаніе. Поводомъ къ названію рассматриваемой пропорціи гармоническою послужило замѣчаніе, что числа 1 , $\frac{4}{5}$ и $\frac{2}{3}$, представляющія длины струнъ, дающихъ совершенный аккордъ (*ut, mi, sol*), удовлетворяютъ этой пропорціи.

П р и л о ж е н і я.

315. I. Раздѣлить число A на части пропорціональныя даннымъ числамъ a , b , c ?

Это значитъ найти три такія числа, которыхъ сумма равнялась бы A , и которыя удовлетворяли бы равенствамъ

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

По свойству равныхъ отношеній имѣемъ:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c}.$$

по $x+y+z = A$, слѣд. для опредѣленія x , y и z имѣемъ три равенства

$$\frac{x}{a} = \frac{A}{a+b+c}; \quad \frac{y}{b} = \frac{A}{a+b+c}; \quad \frac{z}{c} = \frac{A}{a+b+c},$$

откуда

$$x = \frac{Aa}{a+b+c}; \quad y = \frac{Ab}{a+b+c}; \quad z = \frac{Ac}{a+b+c}.$$

II. Три купца внесли для общей торговли капиталы: A , A' и A'' , находившіеся въ оборотѣ: первый— t лѣтъ, второй— t' , третій— t'' лѣтъ. Сколько каждый купецъ долженъ получить изъ общей прибыли B ?

Части каждаго должны быть прямо пропорціональны капиталамъ и временамъ ихъ обращенія; а слѣд. эти части должны быть пропорціональны произведеніямъ капиталовъ на соответствующія времена; итакъ, имѣемъ

$$x + y + z = B \quad \text{и} \quad \frac{x}{At} = \frac{y}{A't'} = \frac{z}{A''t''},$$

откуда, подобно предыдущему, найдемъ

$$x = \frac{B \cdot At}{At + A't' + A''t''}; \quad y = \frac{B \cdot A't'}{At + A't' + A''t''}; \quad z = \frac{B \cdot A''t''}{At + A't' + A''t''}.$$

III. Рѣшить уравненія

$$ax = by = cz = d, \quad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}.$$

Умноживъ оба члена перваго отношенія на a , втораго на b , третьяго на c , получимъ

$$\frac{ax}{am} = \frac{by}{bn} = \frac{cz}{cp}.$$

Отсюда, по свойству равныхъ отношеній, выводимъ:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{ax + by + cz}{am + bn + cp} = \frac{d}{am + bn + cp},$$

а отсюда:

$$x = \frac{dm}{am + bn + cp}; \quad y = \frac{dn}{am + bn + cp}; \quad z = \frac{dp}{am + bn + cp}.$$

IV. Рѣшить систему уравненій

$$ax = by = cz = du \dots (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = \frac{1}{m} \dots (2).$$

Уравненія (1) можно представить въ видѣ

$$\frac{a}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{c}{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{d}{\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

Но въ ряду равныхъ отношеній сумма всѣхъ предыдущихъ членовъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему, такимъ образомъ, замѣчая, что въ силу уравненія (2), сумма послѣдующихъ членовъ равна $\frac{1}{m}$, получимъ:

$$a + b + c + d = \frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = \frac{d}{\frac{1}{u}};$$

откуда

$$x = (a - b + c + d)^m_a$$

$$y = (a + b - c - d)^m_b$$

$$z = (a + b + c - d)^m_c$$

$$u = (a - b + c - d)^m_d$$

V. Решить уравненіе

$$\begin{aligned} \sqrt{a-x} + \sqrt{a-x} &= b, \\ \sqrt{a-x} - \sqrt{a-x} &= c. \end{aligned}$$

Во всякой пропорции сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности такъ, какъ сумма членовъ втораго отношенія къ ихъ разности; слѣдовательно

$$\begin{aligned} \sqrt{a-x} &= \frac{b+c}{b-c}, \\ \sqrt{a-x} &= \frac{b-c}{b+c}. \end{aligned}$$

Возвысивъ обѣ части въ квадраты, для освобожденія неизвѣстнаго изъ-подъ радикала, получаемъ

$$\frac{a-x}{a-x} = \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2}.$$

Примѣнивъ снова то же самое свойство пропорцій, найдемъ

$$\frac{a}{x} = \frac{(b+c)^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2 - (b-c)^2} = \frac{b^2 - c^2}{2bc}.$$

откуда

$$x = \frac{2abc}{b^2 - c^2}.$$

ГЛАВА XXIV.

Неравенства первой степени.

Опредѣленія. — Общія начала. Начала, относящіяся къ совместнымъ неравенствамъ. — Проверки неравенствъ. Доказательство нѣкоторыхъ замѣчательныхъ неравенствъ. —

Рѣшеніе неравенствъ первой степени съ однимъ и со многими неизвѣстными.

Опредѣленія.

316. Если разность двухъ количествъ a и b равна положительному числу p , то изъ равенства $a - b = p$ находимъ: $a = b + p$, откуда видно, что количество a превышаетъ b на p единицъ.

Если же разность между a и b равна отрицательному числу $-p$, то из условия $a - b = -p$ находим: $a = b - p$, откуда видно, что a меньше b на p единиц.

Отсюда вытекает *определение*: количество a считается большим b , каковы бы ни были их знаки, если разность $a - b$ положительна, наоборот, a считается меньшим b , если разность $a - b$ отрицательна.

Обратно: если a больше b , то это значит, что a равно b , сложенному с положительным числом p : $a = b + p$, откуда $a - b = p$; если a меньше b , то это значит, что a равно b без некоторого положительного числа p , т.-е. $a = b - p$, откуда $a - b = -p$.

Итак: каковы бы ни были знаки количеств a и b , если a больше b , разность $a - b$ положительна, если же a меньше b , эта разность отрицательна.

Следствия Из данных определений можно вывести все свойства относительно сравнительной величины положительных и отрицательных чисел.

1 Из двух положительных чисел то больше, которого абсолютная величина больше.

Так, $+10$ больше $+6$, потому что разность $+10 - (+6)$ равна положительному числу $+4$.

2. Всякое положительное число больше нуля.

Так, $+5 > 0$, потому что разность $+5 - 0$ равна положительному числу $+5$.

3. Всякое положительное число больше всякого отрицательного.

Так, $-2 < +7$, ибо разность $-2 - (-7)$ положительна и равна $+5$.

4. Из двух отрицательных чисел то больше, которого абсолютная величина меньше.

Напр. -3 больше -8 , ибо разность $-3 - (-8)$ равна положительному числу $+5$.

5. Ноль больше всякого отрицательного числа.

Так, $0 > -4$, ибо разность $0 - (-4)$ равна $+4$, числу положительному.

Отсюда вытекает, что если написать ряд положительных и отрицательных чисел, так чтобы их абсолютная величины шли возрастающей от нуля:

$$= \infty, \dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots, +\infty,$$

то любое число, взятое в этом ряду, больше каждого числа, находящегося влево от него, и меньше каждого числа, стоящего справа от него.

Если подразумевать в этом ряду между целыми числами и дробями и несоизмеримыми числами, то получим *скалу всевозможных действительных чисел*.

Так как всякое положительное число больше нуля, а всякое отрицательное меньше нуля, то желая выразить, что число a положительно, пишут, что оно больше нуля:

$$a > 0;$$

а для выразить, что число b отрицательно, пишут, что оно меньше нуля:

$$b < 0.$$

317. Соединеніе двух неравныхъ величинъ знакомъ неравенства называется *неравенствомъ*; такъ

$$7 > 5, \quad a < b$$

суть неравенства. Выраженія, находящіяся по ту и по другую сторону знака неравенства, называются *частями* неравенства: находящееся слѣва отъ этого знака, называется *первою частью* неравенства, а стоящее справа — *второю частью* его.

Подобно равенствамъ, неравенства бываютъ двоякаго рода: одни, какъ напр. $a^2 + b^2 > 2ab$, имѣютъ мѣсто при всякихъ частныхъ значеніяхъ буквъ, въ нихъ входящихъ; другія, каково напримѣръ $2ax^2 + bx + c > 0$, имѣютъ мѣсто только при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ этихъ буквъ.

Такимъ образомъ, по отношенію къ неравенствамъ подлежатъ рѣшенію два вопроса: 1) проверка такихъ неравенствъ, которыя справедливы при всѣхъ значеніяхъ буквъ; и 2) опредѣленіе тѣхъ значеній неизвѣстныхъ, которыя удовлетворяютъ неравенству, имѣющему мѣсто при частныхъ значеніяхъ буквъ.

Рѣшеніе этихъ вопросовъ основано на слѣдующихъ началахъ.

Общія начала.

318. Опредѣленіе. Два неравенства называются *эквивалентными* одно другому, если второе есть слѣдствие перваго, и обратно — первое есть слѣдствие втораго.

319. Начало I. Неравенства

$$A > B \dots (1) \quad \text{и} \quad A - B > 0 \dots (2)$$

эквивалентны, каковы бы ни были знаки количествъ A и B.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) если A больше B, то разность $A - B$ положительна, т.-е. больше нуля; слѣд. неравенство (2) вытекаетъ изъ (1); 2) обратно, если разность $A - B$ больше нуля, т.-е. положительна, то количество A больше B: значитъ, неравенство (1) есть слѣдствие неравенства (2). Эквивалентность неравенствъ (1) и (2) доказана.

Подобнымъ же образомъ доказывается, что *неравенства*

$$a < b \quad \text{и} \quad a - b < 0$$

эквивалентны, каковы бы ни были таки количества a и b.

320. Начало II. Придавая къ обѣимъ частямъ неравенства одно и то же количество, положительное или отрицательное, и не перемѣняя знака неравенства, получимъ новое неравенство, эквивалентное данному.

То-есть, если данное неравенство есть

$$A > B \dots (1)$$

и M произвольное количество, положительное или отрицательное, то требуется доказать, что неравенство

$$A + M > B + M \dots (2)$$

эквивалентно (1). Въ самомъ дѣлѣ:

1) Если дано, что

$$A > B,$$

то это значит, по определению, что разность $A - B$ положительна, и следов., из (1) вытекает неравенство

$$A - B > 0;$$

прибавивъ къ первой части M и вычтя изъ нея M , мы не измѣнимъ разности $A - B$, а потому и

$$(A + M) - (B + M) > 0,$$

откуда, по определению, имѣемъ

$$A + M > B + M.$$

Итакъ, неравенство (2) есть следствие первого.

2) Если дано, что

$$A + M > B + M,$$

то разность между первой и второю суммою положительна, т.-е.

$$(A + M) - (B + M) > 0,$$

т.е.

$$A - B > 0,$$

откуда по определению

$$A > B.$$

Итакъ, изъ (1) и (2) имѣемъ слѣдующее:

Теорема 1. Неравенство (1) и (2) доказана.

Изъ теоремы 1 мы можемъ доказать, что вычтя изъ обѣихъ частей одно и то же, получимъ неравенство эквивалентное данному.

Правило 1. Можно переносить члены изъ одной части неравенства въ другую, перемѣняя у переносимыхъ членовъ знаки.

Такъ, изъ неравенство

$$ax - b > cx + d \quad . \quad . \quad (1)$$

вычтемъ въ обѣихъ частяхъ его по $-cx + b$, найдемъ

$$ax - b - cx + b > cx + d - cx + b,$$

или, по приведеніи подобныхъ членовъ,

$$ax - cx > d + b \quad . \quad . \quad (2).$$

По доказанному, неравенство (2) эквивалентно (1) и слѣд. можетъ его замѣнять. Сравнивая ихъ, замѣчаемъ, что членъ $-b$ перешелъ изъ первой части во вторую со знакомъ $+$, а членъ cx изъ второй части въ первую со знакомъ $-$. Такимъ образомъ, правило перенесенія членовъ изъ одной части неравенства въ другую ничѣмъ не отличается отъ правила перенесенія членовъ изъ одной части уравненія въ другую.

Слѣдствіе II. *Всякое неравенство можно привести къ виду*

$$A > 0,$$

т.-е. къ неравенству, вторая часть котораго есть нуль.

Въ самомъ дѣлѣ, достаточно для этого всѣ члены собрать въ первую часть. Такъ, неравенство

$$5x^2 - 7x + 1 > 2x^2 + 3x + 4$$

эквивалентно неравенству

$$3x^2 - 10x - 3 > 0.$$

321. Начало III. *Помножая обѣ части неравенства на одно и то же количество—существенно-положительное, и не перемѣняя знакъ неравенства, получимъ новое неравенство, эквивалентное данному.*

Требуется доказать, что неравенство

$$A > B \dots (1)$$

эквивалентно неравенству

$$AM > BM \dots (2)$$

при условіи: $M > 0$.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) неравенство $A > B$ эквивалентно неравенству

$$A - B > 0;$$

помноживъ положительное количество $A - B$ на положительное количество M , получимъ и произведение положительное, слѣд.

$$(A - B)M > 0, \text{ или } AM - BM > 0,$$

откуда

$$AM > BM.$$

Итакъ, доказано, что изъ неравенства (1) слѣдуетъ (2).

2) Обратное: перенесъ въ неравенствѣ $AM > BM$ вторую часть въ первую, найдемъ

$$AM - BM > 0, \text{ или } (A - B)M > 0;$$

но множитель M положительнаго произведенія $(A - B)M$ положителенъ, слѣд. и другой множитель долженъ быть положительенъ, т.-е.

$$A - B > 0, \text{ откуда } A > B;$$

т.-е. изъ неравенства (2) вытекаетъ (1).

Эквивалентность неравенствъ (1) и (2) такимъ образомъ доказана.

Слѣдствіе I. *Помножая обѣ части неравенства на одно и то же существенно-отрицательное количество и перемѣняя знакъ неравенства, получимъ новое неравенство, эквивалентное данному.*

Т.-е. неравенство

$$A > B \dots (1)$$

эквивалентно неравенству

$$AM < BM \dots (2)$$

при условии: $M < 0$.

Из этого следует, если M отрицательно, то $-M$ положительно, а потому, по началу III, помноживъ обе части неравенства (1) на $-M$ и сохранивъ тот же знакъ, получимъ неравенство

$$-AM > -BM \dots (3)$$

Перенеся въ (3) члены изъ одной части въ другую, дадимъ ему видъ

$$BM > AM, \text{ или } AM < BM.$$

Следовательно, что неравенство (1) эквивалентно (2-му).

Следствие II. Умножая обе части неравенства на такое количество, которое **знакъ неизвѣстенъ**, получимъ неравенство, котораго **смыслъ неизвѣстенъ**, т.-е. неизвѣстно — больше ли его первая часть второй, или меньше.

Это очевидно, потому что знакъ неравенства сохраняется, когда множитель положительный, и измѣняется въ противоположный, когда множитель отрицательный.

Итакъ: **нельзя умножить обе части неравенства на такое количество, которое знакъ неизвѣстенъ.**

Следствие III. Раздѣливъ обе части неравенства на одно и то же количество M , и не перемѣнивъ знака неравенства при $M > 0$, и перемѣнивъ его знакъ при $M < 0$, найдемъ неравенство, эквивалентное данному.

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить на M — все равно что помножить на $\frac{1}{M}$, а для случая умноженія теорема доказана.

322 Приложение. Начало III съ вытекающими изъ него слѣдствіями имѣютъ важное приложение при вычисленіяхъ надъ неравенствами, а именно при сокращеніи неравенствъ и при освобожденіи ихъ отъ дробей.

Пусть, напр., требуется освободить отъ дробей неравенство

$$\frac{P}{Q} > \frac{R}{S} \dots (1)$$

Собравъ его члены въ первую часть, найдемъ эквивалентное ему неравенство

$$\frac{P}{Q} - \frac{R}{S} > 0, \text{ или } \frac{PS - QR}{QS} > 0 \dots (2).$$

Умножить обе его части на QS нельзя, когда знаки количества Q и S неизвѣстны, потому что въ такомъ случаѣ неизвѣстенъ и знакъ произведенія QS . Но если бы ни были знаки Q и S , квадратъ произведенія QS всегда будетъ положительнымъ, а потому умноживъ обе части неравенства (2) на Q^2S^2 и сохранивъ знакъ неравенства, найдемъ

$$\frac{(PS - QR)^2}{QS} > 0, \text{ или } QS(PS - QR) > 0,$$

неравенство — эквивалентное (1)-му и представленное въ другомъ видѣ.

Пользуясь слѣдствіемъ III, можно сокращать неравенства, для обѣхъ части его на общаго множителя; но эта операція возможна, когда извѣстенъ знакъ того множителя, на который сокращаемъ. Такъ напр. если въ неравенствѣ замѣчаемъ множителя, имѣющаго видъ квадрата или суммы квадратовъ, такихъ множителей можно сократить, не измѣняя знака неравенства: въ самомъ дѣлѣ, квадратъ всякаго количества и положительнаго и отрицательнаго всегда положителенъ, а слѣд. и сумма квадратовъ такова же. Такъ, имѣя неравенство

$$8(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 1)(x - 5) > 0.$$

Замѣчаемъ, что множитель $x^2 - 2x + 1$ есть ничто иное какъ $(x - 1)^2$, и потому существенно-положителенъ; замѣмъ, множитель $x^2 + 2x + 2$ равенъ $(x^2 - 2x + 1) + 1$, или $(x - 1)^2 + 1$, т.-е. представляеть сумму двухъ квадратовъ, а потому, при всякомъ x , существенно-положителенъ. Заключаемъ, что и произведение $8(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 1)$, при всякихъ значеніяхъ x , существенно-положительно; сокративъ на него данное неравенство, замѣнимъ его простѣйшимъ неравенствомъ

$$x - 5 > 0.$$

Имѣя неравенство

$$-5a^2(x - 2) < 0,$$

и замѣчая, что a^2 , какъ квадратъ, всегда положителенъ (каковъ бы знакъ ни имѣло количество a), заключаемъ, что $-5a^2$ — существенно-отрицательно; а потому, раздѣливъ неравенство на $-5a^2$ и переимѣнивъ знакъ $<$ на $>$, найдемъ неравенство

$$x - 2 > 0,$$

эквивалентное данному, но имѣющее простѣйшій видъ.

323. Начало IV. Если обѣ части неравенства положительны, то возвышая ихъ въ одинаковую цѣлую положительную степень и не перемѣняя знакъ неравенства, получимъ неравенство эквивалентное данному.

Рассмотримъ сначала простѣйшій случай возвышенія въ квадратъ. Если дано неравенство

$$A > B, \dots (1)$$

въ которомъ $A > 0$ и $B > 0$, то доказать, что неравенство

$$A^2 > B^2 \dots (2)$$

эквивалентно данному.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) Изъ неравенства (1) выводимъ:

$$A - B > 0;$$

но какъ A и B положительны, то и

$$A + B > 0.$$

Перемноживъ два положительныя количества, найдемъ и произведеніе положительное, слѣд.

$$(A - B)(A + B) > 0, \text{ или } A^2 - B^2 > 0,$$

откуда

$$A^2 > B^2.$$

2) Обратно, если $A^2 > B^2$, то

$$A^2 - B^2 > 0, \text{ или } (A + B)(A - B) > 0;$$

следовательно, оба множителя: $A + B$ и $A - B$ должны быть одного знака; но так как $A + B$ положительно (ибо $A > 0$ и $B > 0$), то и $A - B > 0$, откуда

$$A > B.$$

Эквивалентность неравенств (1) и (2) доказана.

Следствие I. Если обе части неравенства отрицательны, то возвысив их въ квадратъ и изменивъ знакъ неравенства, получимъ неравенство, эквивалентное данному.

То-есть, если дано неравенство

$$A > B, \dots (1)$$

примемъ $A < 0$ и $B < 0$, то доказать, что неравенство

$$A^2 < B^2 \dots (2)$$

эквивалентно данному.

Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ обе части (1) на -1 , выдемъ ему эквивалентное неравенство

$$-A < -B,$$

гдѣ уже A и $-B$ положительны, а потому, по доказанному, возвысивъ въ квадратъ и не изменивъ знака неравенства, получимъ

$$A^2 < B^2,$$

эквивалентное неравенству $-A < -B$, а слѣд. и вернѣе $A > B$.

Следствие II. Если обе части неравенства имѣютъ противоположные знаки, то нельзя ихъ возвысить въ квадратъ, не зная ихъ численной величины.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ неравенство

$$A > B,$$

но $B < 0$, и требуется доказать, что результатъ возвышенія въ квадратъ, можетъ быть или $A^2 > B^2$, или $A^2 = B^2$, или $A^2 < B^2$.
Следовательно:

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B);$$

такъ какъ $A > 0$ и $B < 0$ будетъ $A - B$ положительно; но мы не знаемъ знака $A + B$, а потому неизвѣстенъ и знакъ разности $A^2 - B^2$; поэтому не можемъ сказать, будетъ ли $A^2 > B^2$, или $A^2 = B^2$, или $A^2 < B^2$.

Напримеръ:

$$\begin{array}{lll} \text{неравенство } +3 > -2 & \text{приводить къ} & +9 > +4; \\ \text{„} & 3 > -5 & \text{„} & +9 < 25; \\ \text{„} & +3 > -3 & \text{„} & +9 = +9. \end{array}$$

Слѣдствіе III. Нельзя возвышать въ квадратъ такое неравенство, въ которомъ знаки частей неизвѣстны.

Это непосредственно очевидно изъ предыдущаго.

324. Обобщеніе. Если оба части неравенства положительны, то возводя ихъ въ одинаковую целую положительную степень и неизмѣняя при этомъ знакъ неравенства, получимъ неравенство эквивалентное данному.

Требуется доказать, что если $A > 0$ и $B > 0$, а m — целое положительное число, то неравенства

$$A > B \dots (1) \quad \text{и} \quad A^m > B^m \dots (2)$$

эквивалентны.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $B > 0$, то раздѣливъ оба части на B , найдемъ

$$\frac{A}{B} > 1,$$

что означаетъ, что $\frac{A}{B}$ есть неправильная дробь; но m я степень неправильной дроби есть также дробь неправильная, слѣд.

$$\frac{A^m}{B^m} > 1,$$

откуда, множи оба части на положительное количество B^m , находимъ

$$A^m > B^m.$$

Обратно, изъ неравенства (2) можно вывести (1). Въ самомъ дѣлѣ:

$$A^m - B^m = (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \dots + B^{m-1}).$$

Въ силу неравенства (2) это произведеніе > 0 ; но второй множитель, какъ сумма положительныхъ членовъ, положительнъ, слѣд. и $A - B > 0$, откуда

$$A > B.$$

Слѣдствія. I. Если количества A и B оба отрицательны, то возводя оба части неравенства $A > B$ въ целую положительную степень m , и не измѣняя знакъ неравенства при m нечетномъ, и напротивъ измѣняя его при m четномъ, получимъ неравенство, эквивалентное данному.

Дано неравенство

$$A > B, \dots (1)$$

Если $A < 0$ и $B < 0$. Положим $A = -A'$ и $B = -B'$, где уже A' и B' положительны, умножим обе части неравенства (1) на -1 ; найдем

$$-A < -B, \text{ или } A' < B'.$$

Так как A' и B' положительны, то по предыдущей теореме имеем

$$A'^m < B'^m.$$

Из равенств $A = -A'$ и $B = -B'$ имеем: $A' = (-1)A$ и $B' = (-1)B$. Если, по возвышению в m -ю степень, находим: $A'^m = (-1)^m A^m$ и $B'^m = (-1)^m B^m$. Подставляя в последнее неравенство, получим:

$$(-1)^m \cdot A^m < (-1)^m \cdot B^m.$$

Если m — четное, то $(-1)^m$ есть число положительное; а потому, разделив на него последнее неравенство, не должны переменить знак неравенства; напротив, при m нечетном, $(-1)^m < 0$ и деление неравенства на это число понесет за собою перемену знака неравенства. Таким образом, неравенство (1), в котором $A < 0$ и $B < 0$, эквивалентно неравенству

$$A^m < B^m$$

при m — четном; и неравенству

$$A^m > B^m$$

при m — нечетном.

II. Когда части неравенства имеют различные знаки, то следует различать два случая:

1) когда возвышаем неравенство в *нечетную* степень, то степени сохраняют те знаки, какие имели части неравенства, а потому и знак неравенства сохраняется. Напр.

из $-3 < -7$ следует $(-3)^3 < (-7)^3$, или $-27 < -343$.

2) Когда возвышаем неравенство в *четную* степень, то нельзя дать никакого правила: знак неравенства может измениться или же сохраниться, или даже неравенство может перейти в равенство. Таким:

$$\begin{aligned} 3 > -2 & \text{ приводит к } (+3)^4 > (-2)^4, \text{ или } +81 > +16; \\ 2 > -5 & \text{ „ „ „ } (+2)^4 < (-5)^4, \text{ или } 16 < +625; \\ +2 > -2 & \text{ „ „ „ } (+2)^4 = (-2)^4, \text{ или } +16 = +16. \end{aligned}$$

III. Если обе части неравенства положительны, то возводя их в *любую отрицательную степень* и переменяя знак неравенства, получим неравенство эквивалентное данному

Требуется доказать, что если

$$A > B, \text{ . . . (1)}$$

то $A > 0$ и $B > 0$, то неравенство

$$A^{-n} < B^{-n} \quad (2)$$

эквивалентно (1)-му.

Такъ какъ n — число положительное, то неравенство

$$A^n > B^n \dots (3)$$

эквивалентно (1). Раздѣливъ обѣ части на положительное количество $A^n \cdot B^n$, найдемъ неравенство

$$\frac{1}{B^n} > \frac{1}{A^n} \quad \text{или} \quad B^{-n} > A^{-n}, \quad \text{или, наконецъ,}$$

$$A^{-n} < B^{-n}.$$

эквивалентное (3), а потому и (1)-му.

325. Начало V. 1. Каковы бы ни были знаки обѣихъ частей неравенства, извлека корень нечетнаго порядка, должно сохранять знак неравенства.

Это есть прямое слѣдствіе правила знаковъ при извлеченіи корня.

Такъ:

$$\begin{array}{lcl} \text{Изъ неравенства} & 27 > 8 & \text{имѣемъ; } \sqrt[3]{+27} > \sqrt[3]{+8}, \text{ или } +3 > +2; \\ \text{»} & +27 < 8 & \sqrt[3]{+27} < \sqrt[3]{+8}, \text{ или } +3 < +2; \\ \text{»} & -8 < -27 & \sqrt[3]{-8} < \sqrt[3]{-27}, \text{ или } -2 < -3. \end{array}$$

2. Если же показателъ корня — четный, то, во-первыхъ, необходимо, чтобы обѣ части неравенства были положительны (въ противномъ случаѣ корни были бы мнимы, и не могло бы быть рѣчи о ихъ сравненіи); въ такомъ случаѣ каждый корень имѣетъ два значенія, равныя по величинѣ, но противоположны по знаку; и неравенство сохраняетъ знакъ, или измѣняетъ его, смотря по тому, беремъ ли положительныя, или отрицательныя значенія корней. Такъ:

$$\begin{array}{l} \text{неравенство} \quad +49 > +25 \\ \text{дастъ} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{+49} > \sqrt{+25}, \text{ или } +7 > +5; \\ -\sqrt{+49} < -\sqrt{+25}, \text{ или } -7 < -5. \end{array} \right. \end{array}$$

Но если взять корни съ различными знаками, то очевидно, что отрицательный корень всегда будетъ меньше. Такъ

$$\begin{array}{l} \text{неравенство} \quad +49 > +25 \\ \text{дастъ} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{49} > -\sqrt{25}, \text{ или } +7 > -5; \\ -\sqrt{49} < +\sqrt{25}, \text{ или } -7 < +5. \end{array} \right. \end{array}$$

Начала, относящіяся къ совмѣстнымъ неравенствамъ.

326. Если въ двухъ или нѣсколькихъ неравенствахъ первыя части больше вторыхъ, или первыя части меньше вторыхъ, то они называются неравенствами *одинаковаго смысла*. Такъ, неравенства

$$3 > -2 \quad \text{и} \quad a > b$$

суть два неравенства одинаковаго смысла.

Если же въ одномъ неравенствѣ первая часть больше второй, а въ другомъ первая меньше второй части, то ихъ называютъ неравенствами *противоположную смысла*. Таковы

$$a > b \quad \text{и} \quad c < d.$$

327 Начало VI. *Складывая почленно два или несколько неравенствъ одинаковаго смысла, получимъ неравенство того же смысла; но оно не можетъ замѣнить одною изъ данныхъ.*

Пусть данныя неравенства будутъ

$$A > B \quad \text{и} \quad A' > B'.$$

Изъ нихъ слѣдуетъ, что разности $A - B$ и $A' - B'$ положительны, а потому и сумма ихъ положительна; слѣд.

$$A - B + A' - B' > 0,$$

откуда, перенеся $-B$ и $-B'$ во вторую часть, найдемъ

$$A + A' > B + B'.$$

Но это неравенство не можетъ замѣнить одного изъ данныхъ, иначе говоря, система:

$$\begin{array}{l} A > B \\ A + A' > B + B' \end{array}$$

не имѣетъ необходимыхъ слѣдствій:

$$A' > B'.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства

$$A + A' > B + B',$$

перенесениемъ членовъ въ первую часть выводимъ:

$$(A - B) + (A' - B') > 0;$$

и хотя изъ условія $A > B$ мы и знаемъ, что $A - B > 0$, однако отсюда нельзя заключить, чтобы и

$$A' - B' > 0$$

Слѣдствіе. *Нельзя почленно складывать два неравенства различнаго смысла, ибо нельзя предвидѣть, которая сумма будетъ больше. Дѣйствіе въ этомъ случаѣ возможно только въ численныхъ примѣрахъ. Такъ*

$$\begin{array}{l} 1) \quad 5 > 3 \\ \quad 2 < 3 \\ \quad 7 > 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2) \quad 5 > 3 \\ \quad 1 < 7 \\ \quad 6 < 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \quad 5 > 3 \\ \quad 3 < 5 \\ \quad 8 = 8 \end{array}$$

328. Начало VII. Можно складывать почленно вычитание двух неравенств различного смысла; полученное неравенство будет одинакового смысла с первым; но оно не может замкнуть одного из данных.

Пусть данные неравенства суть:

$$A > A' \quad \text{и} \quad B < B'.$$

Мы заключаем из них, что разности: $A - A'$ и $B - B'$ оба положительны, а потому и сумма их положительна; слѣд.

$$A - A' + B - B' = 0,$$

или

$$A + B = A' + B'.$$

Но система

$$\begin{cases} A > A' \\ A - B > A' - B' \end{cases}$$

не имѣетъ необходимыми слѣдствіемъ $B < B'$ и потому не необходимо эквивалентна данной.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства $A - B > A' - B'$ имѣемъ

$$(A - A') - (B - B') > 0,$$

и хотя знаемъ, что $A - A' > 0$, но отсюда нельзя заключить, чтобы необходимо было и $B' - B > 0$.

Слѣдствіе. Нельзя складывать почленно вычитания двухъ неравенствъ одинакового смысла, но можно складывать ихъ относительно величину разностей; такъ

$\begin{array}{r} 1) \quad 7 > 5 \\ 3 > 2 \\ \hline 4 > 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2) \quad 7 > 5 \\ 3 > 1 \\ \hline 4 = 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3) \quad 7 > 5 \\ 3 > -6 \\ \hline 4 < 11 \end{array}$
--	--	--

329. Начало VIII. Перемножая почленно два или несколько неравенствъ одинакового смысла, части которыхъ положительны, получимъ неравенство того же смысла; но оно не можетъ замкнуть одного изъ данныхъ.

Пусть данные неравенства суть:

$$A > B \quad \text{и} \quad A' > B',$$

причемъ: A, A', B, B' — положительны. Изъ данныхъ неравенствъ имѣемъ

$$A - B > 0 \quad \text{и} \quad A' - B' > 0,$$

а такъ какъ A' и B положительны, то и

$$(A - B)A' > 0 \quad \text{и} \quad (A' - B')B > 0;$$

складывая, находимъ

$$(A - B)A' + (A' - B')B > 0, \text{ или } AA' - BB' > 0,$$

откуда

$$AA' > BB'.$$

Но изъ того, что

$$\begin{array}{l} A > B \\ AA' > BB' \end{array} \quad \left\{ \right.$$

нельзя заключить, что и $A' > B'$, ибо сумма $(A - B)A' + (A' - B')B$ можетъ быть положительна, хотя бы $A' - B'$ и было отрицательно.

Эта теорема справедлива для какого угодно числа неравенствъ.

Пусть, напр., имѣемъ p неравенствъ

$$A_1 > B_1, \quad A_2 > B_2, \quad . \quad . \quad ., \quad A_p > B_p.$$

Примѣнимъ новый приемъ доказательства, который полезенъ намъ будетъ и впоследствии. Приемъ этотъ основанъ на томъ замѣчаніи, что неравенство $A > B$ всегда можно замѣнить равенствомъ $A - B \geq x$, гдѣ $x > 0$; въ самомъ дѣлѣ, это равенство означаетъ, что A больше B на x . Итакъ, данныя неравенства можемъ замѣнить равенствами

$$A_1 - B_1 \geq x_1, \quad A_2 - B_2 \geq x_2, \quad . \quad . \quad ., \quad A_p - B_p \geq x_p.$$

Перемноживъ ихъ, имѣемъ:

$$A_1 A_2 \dots A_p = (B_1 + x_1)(B_2 + x_2) \dots (B_p + x_p),$$

или, раскрывъ скобки и перенеся членъ $B_1 B_2 \dots B_p$ въ первую часть, имѣемъ:

$$A_1 A_2 \dots A_p - B_1 B_2 \dots B_p = \sum x_1 (B_2 + x_2) \dots (B_p + x_p) + \dots$$

Такъ какъ вторая часть, какъ сумма положительныхъ членовъ, положительна, то и заключаемъ, что

$$A_1 A_2 \dots A_p > B_1 B_2 \dots B_p.$$

Примѣчаніе. Для другихъ случаевъ нельзя формулировать никакого общаго правила.

340 Начало IX. Можно раздѣлить почленно одно на другое два неравенства разнаго смысла, если все четыре части положительны, сохранивъ прежній знакъ неравенства, какъ въ дѣльномъ; но новое неравенство можетъ замѣнить одною изъ данныхъ.

Пусть даны неравенства

$$A > B \quad \text{и} \quad C < D,$$

гдѣ A, B, C, D — положительны. Помноживъ $A > B$ на $D > C$, по предыдущей теоремѣ имѣемъ:

$$AD > BC;$$

откуда, раздѣливъ обѣ части на положительное количество CD , имѣемъ:

$$\frac{A}{C} > \frac{B}{D}.$$

Другое доказательство. Запишемъ первое изъ данныхъ неравенствъ равенствомъ: $A = B + x$, а второе равенствомъ $C = D - y$, гдѣ $x > 0$ и $y > 0$, и раздѣливъ первое равенство на второе, имѣемъ:

$$\frac{A}{C} = \frac{B + x}{D - y};$$

вычтя изъ обѣихъ частей по $\frac{B}{D}$, получимъ:

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{B + x}{D - y} - \frac{B}{D},$$

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{Dx + By}{(D - y)D}.$$

Вторая часть положительна, слѣд. $\frac{A}{C}$ больше $\frac{B}{D}$.

Примѣчаніе. Для другихъ случаевъ нельзя формулировать общаго правила

Проверка заданныхъ неравенствъ.

331. Для проверки данныхъ неравенствъ не существуетъ никакого общаго правила; укажемъ методы наиболее употребительные.

I. Методъ возвышенія въ степень. Если въ подлежащемъ проверкѣ неравенствъ встрѣчается радикалъ, его изолируютъ и затѣмъ возвышаютъ обѣ части неравенства въ степень, изображаемую показателемъ корня. Пусть, напр., требуется доказать, что среднее арифметическое двухъ положительныхъ количествъ a и b больше ихъ среднего геометрическаго, т.-е. что

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Такъ какъ обѣ части неравенства положительны, то, возвысивъ ихъ въ квадратъ и сохранивъ знакъ неравенства, запишемъ данное неравенство ему эквивалентнымъ

$$\frac{(a + b)^2}{4} > ab;$$

или, умноживъ обѣ части на 4 и собравъ всѣ члены въ первую часть:

$$(a + b)^2 - 4ab > 0, \text{ или } (a - b)^2 > 0.$$

Такъ какъ квадратъ всякаго дѣйствительнаго количества положителенъ, то послѣднее неравенство вѣрно; поэтому вѣрно и эквивалентное ему данное неравенство.

332. II. Методъ разложенія на множителей. Переносить всѣ члены въ одну часть и разлагаютъ полученный полиномъ на множителей; справедливость произвѣрнаго неравенства дѣлается очевидною.

Пусть, напр., требуется доказать, что при всякихъ значеніяхъ a , положительныхъ или отрицательныхъ,

$$3(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2.$$

По перенесеніи въ первую часть, по раскрытіи скобокъ и по приведеніи подобнаго члена данное неравенство ему эквивалентнымъ:

$$2a^4 - 2a^3 - 2a + 2 > 0,$$

или, по разложеніи на множителей, неравенствомъ:

$$2(a - 1)^2(a^2 + a + 1) > 0;$$

или, придавъ къ триному $a^2 + a + 1$ и вычтя изъ него $\frac{1}{4}$, найдемъ

$$2(a - 1)^2 \left(a + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) > 0.$$

$2(a - 1)^2$, очевидно, положительно; биномъ $\left(a + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right)$, какъ сумма двухъ положительныхъ количествъ, также положителенъ, а отсюда справедливость послѣдняго неравенства, а потому и эквивалентнаго ему перваго, очевидна.

333 III. Методъ превращенія полинома въ сумму квадратовъ. Переносить всѣ члены въ одну часть и разлагаютъ полученный полиномъ въ сумму квадратовъ; справедливость неравенства дѣлается очевидною.

Примѣръ I. Доказать справедливость неравенства

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc + 1 > 0.$$

Его можно представить въ видѣ:

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2) + \frac{1}{2}(b^2 - 2bc + c^2) + \frac{1}{2}(c^2 - 2ac + a^2) + 1 > 0,$$

или

$$\frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(c - a)^2 + 1 > 0,$$

что очевидно.

Примѣръ II. Доказать, что если $b^2 - 4ac < 0$, то справедливо неравенство

$$\{bb' - 2(ca' + ac')\}^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') > 0.$$

Раскрывая и располагая по степенямъ количества b' , можемъ этому неравенству дать видъ:

$$ac'b'^2 - b(ca' + ac')b' + (ca' + ac')^2 + a'c'(b^2 - 4ac) > 0,$$

или

$$ac \left\{ b' - \frac{bca' - ac}{2ac} \right\}^2 + \frac{4ac - b^2}{4ac} (ca' - ac')^2 > 0.$$

Изъ данного условія $b^2 - 4ac < 0$ выводимъ, что $4ac > b^2$, а потому $ac > 0$, равно и $4ac - b^2 > 0$; отсюда видно, что первая часть послѣдняго неравенства положительна, и стало быть оно вѣрно; поэтому вѣрно и эквивалентное ему заданное неравенство.

334. IV. Неравенства симметричныя относительно данныхъ буквъ. Когда неравенство симметрично относительно нѣкоторыхъ буквъ a, b, c , то предварительно условливаются въ относительной величинѣ этихъ буквъ; пусть, напр., a есть наименьшее изъ трехъ данныхъ количествъ; въ такомъ случаѣ b и c можно представить въ видѣ: $b = a + x$, $c = a + y$, гдѣ $x > 0$ и $y > 0$.

Пусть, наприм., требуется доказать, что если a, b , и c положительны, то имѣетъ мѣсто неравенство:

$$abc > (a + b - c)(b + c - a)(a + c - b).$$

Положивъ $b = a + x$ и $c = a + y$, и подставивъ въ испытуемое неравенство, приводимъ задачу къ проверкѣ неравенства

$$a(a + x)(a + y) > (a + x - y)(a + x + y)(a + y - x),$$

или

$$a\{a^2 - a(x - y) + xy\} - \{a^2 - (x - y)^2\}(a + x + y) > 0,$$

или

$$axy + (a + x + y)(x - y)^2 > 0;$$

справедливость этого неравенства очевидна, такъ какъ оба его члена положительны.

335. V. Иногда справедливость заданнаго неравенства можно доказать, показавъ, что оно есть слѣдствіе равенствъ или неравенствъ уже доказанныхъ или легко доказуемыхъ.

Примѣръ. Доказать, что если a, b и c положительны, то имѣетъ мѣсто неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 > 3abc.$$

Такъ какъ a, b и c входятъ въ это неравенство симметрично, то мы могли бы примѣнить къ нему предыдущій способъ. Но можно доказать справедливость даннаго неравенства, исходя изъ неравенствъ:

$$a^2 + b^2 > 2ab \quad (1), \quad b^2 + c^2 > 2bc \quad (2), \quad c^2 + a^2 > 2ac \quad (3).$$

Справедливость этихъ неравенствъ легко обнаруживать; въ самомъ дѣлѣ, изъ очевиднаго неравенства $(a - b)^2 > 0$ или $a^2 + b^2 - 2ab > 0$ прямо имѣемъ $a^2 + b^2 > 2ab$. Такимъ же образомъ докажемъ (2) и (3).

Сложивъ неравенства (1), (2) и (3), получимъ:

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac;$$

умноживъ обѣ части этого неравенства на положительное количество $a + b + c$, найдемъ, по упрощеніи:

$$a^2 + b^2 + c^2 > 3abc,$$

что и требовалось доказать.

336 VI. Методъ заключенія отъ n къ $n + 1$ и наоборотъ. Пусть требуется доказать, что если a и b положительны, всегда имѣютъ мѣсто неравенства

$$2(a^2 + b^2) > (a + b)^2,$$

$$2^2(a^3 + b^3) > (a + b)^3,$$

$$2^3(a^4 + b^4) > (a + b)^4,$$

$$\dots$$

и вообще

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n,$$

гдѣ n —цѣлое положительное число.

Первое неравенство доказать не трудно; въ самомъ дѣлѣ, перенеся $(a + b)^2$ въ первую часть, раскрывъ скобки и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ:

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0 \quad \text{или} \quad (a - b)^2 > 0,$$

что вѣрно.

Второе неравенство представимъ въ видѣ

$$4(a^3 + b^3) - (a + b)^3 > 0,$$

или, замѣтивъ, что

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{и} \quad (a + b)^3 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2),$$

даемъ неравенству видъ

$$4(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) > 0,$$

или

$$3(a + b)(a^2 - 2ab + b^2) > 0,$$

или

$$3(a + b)(a - b)^2 > 0,$$

что очевидно.

Чтобы доказать общность закона, выражаемого этими неравенствами, допустимъ, что онъ вѣренъ для показателя n , т. е. что неравенство

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n \quad \dots (1)$$

справедливо, и докажемъ, что въ этомъ предположеніи будетъ вѣрно и неравенство для показателя $n + 1$, т. е.

$$2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) > (a + b)^{n+1} \quad \dots (2).$$

Въ самомъ дѣлѣ, умножая обѣ части (1) на положительное количество $a + b$, найдемъ

$$2^{n-1}(a^n + b^n)(a + b) > (a + b)^{n+1}.$$

Слѣдовательно, достаточно показать, что

$$2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) > 2^{n-1}(a^n + b^n)(a + b).$$

По сокращеніи на 2^{n-1} , по раскрытіи скобокъ во второй части и по упрощеніи, получимъ

$$a^{n+1} + b^{n+1} > ab^n + ba^n,$$

или

$$a^n(a - b) - b^n(a - b) > 0,$$

или

$$(a^n - b^n)(a - b) > 0,$$

неравенство очевидное, потому что оба множителя, $a^n - b^n$ и $a - b$, всегда имѣютъ одинаковые знаки.

Итакъ, какъ скоро неравенство (1) провѣрено для нѣкотораго значенія n , мы можемъ заключить, что оно также вѣрно и для величины n , на единицу большей. Но мы доказали, что оно вѣрно для $n = 2$, слѣд. оно вѣрно и для $n = 3$: будучи же вѣрно для $n = 3$, оно вѣрно и для $n = 4$ и т. д.

Доказанное неравенство можно написать въ видѣ

$$\frac{a^n + b^n}{2} > \frac{a + b}{2}^n;$$

въ этой формѣ оно показываетъ, что *арифметическая средина n -хъ степеней двухъ чиселъ больше n -ой степени арифметической средины этихъ чиселъ.*

Можно распространить эту теорему на какое угодно число p положительныхъ количествъ a, b, c, d, \dots, k, l .

Взявъ четыре количества a, b, c, d , имѣемъ тождество:

$$\left(\frac{a + b + c + d}{4} \right)^n = \left(\frac{a + b}{2} + \frac{c + d}{2} \right)^n,$$

и слѣд. по предыдущей теоремѣ имѣемъ:

$$\left(\frac{a + b + c + d}{4} \right)^n < \left(\frac{a + b}{2} + \frac{c + d}{2} \right)^n,$$

но мы имѣли:

$$\left(\frac{a + b}{2} \right)^n < \frac{a^n + b^n}{2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{c + d}{2} \right)^n < \frac{c^n + d^n}{2};$$

слѣдовательно

$$\left(\frac{a + b + c + d}{4} \right)^n < \frac{a^n + b^n + c^n + d^n}{4}.$$

Такимъ же точно образомъ докажемъ, что предложеніе вѣрно для 8, 16, ..., 2^k положительныхъ количествъ. Чтобы доказать справедливость теоремы вообще, употребимъ пріемъ, впервые введенный французскимъ математикомъ Коши; пріемъ этотъ разнится отъ пріема Бернулли тѣмъ, что дѣлается заключеніе не отъ p къ $p + 1$, а обратно: отъ $p - 1$ къ p . Итакъ, допустивъ, что теорема справедлива для $p + 1$ чиселъ, докажемъ, что она будетъ вѣрна и для p чиселъ.

Имѣемъ тождество

$$\left(\frac{a+b+c+\dots+h}{p} \right)^{p+1} = \frac{(a-b+c+\dots+h)^{p+1}}{p+1} - \frac{a+b+c+\dots+h}{p+1} + \frac{a-b+c+\dots+h}{p}$$

слѣдовательно

$$\left(\frac{a+b+c+\dots+h}{p} \right)^k = \left(\frac{a-b+c+\dots+h}{p+1} + \frac{a-b+c+\dots+h}{p} \right)^k \quad (3).$$

Но, по допущенію, теорема вѣрна для $p+1$ количествъ; поэтому вторая часть равенства (3) меньше

$$a^k + b^k + c^k + \dots + h^k + \frac{a+b+c+\dots+h}{p} \cdot \dots + h^k$$

в слѣд. и

$$\left(\frac{a+b+c+\dots+h}{p} \right)^k < \frac{a^k + b^k + c^k + \dots + h^k}{p+1} + \left(\frac{a+b+c+\dots+h}{p} \right)^k$$

а потому и

$$\left(\frac{a+b+c+\dots+h}{p} \right)^k < \frac{a^k + b^k + c^k + \dots + h^k}{p}$$

337. Доказательство нѣкоторыхъ замѣчательныхъ неравенствъ. Приведемъ доказательство нѣкоторыхъ теоремъ, выходящихъ примѣненіе къ элементарной математикѣ, или же представляющихъ интересъ въ самомъ способѣ ихъ доказательствъ.

338. I. Полусумма двухъ чиселъ, каковы бы ни были ихъ знаки, всегда заключается между этими числами.

Пусть данныя числа будутъ a и b , и пусть

$$a < b. \quad (1).$$

Придавая къ обѣимъ частямъ по a , найдемъ:

$$2a < a + b,$$

откуда

$$a < \frac{a+b}{2}.$$

Придавая къ обѣимъ частямъ (1) по b , получимъ

$$a + b < 2b,$$

$$\frac{a+b}{2} < b.$$

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

II. Теорема 2-я. Эта теорема имѣетъ обширныя приложенія въ изслѣдованіи вопросовъ 2-й степени.

II. Если дано несколько дробей $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$, у которых все знаменатели имеют один и тот же знак, то дробь, которой числитель — сумма всех числителей, а знаменатель — сумма всех знаменателей, содержится между наименьшею и наибольшею из них.

Пусть наименьшая из данных дробей будет m , а наибольшая M , тогда, по условию, имеем

$$m < \frac{a_1}{b_1} \leq M, \quad m < \frac{a_2}{b_2} \leq M, \quad m < \frac{a_3}{b_3} \leq M, \quad \dots, \quad m < \frac{a_n}{b_n} \leq M \quad (1).$$

Пусть b_1, b_2, \dots, b_n — все > 0 ; в таком случае умножение на b_1, b_2, \dots не изменит смысла неравенств и мы получим

$$b_1 m \leq a_1 < b_1 M, \quad b_2 m \leq a_2 < b_2 M, \quad \dots, \quad b_n m \leq a_n < b_n M.$$

а складывая почленно эти неравенства, найдем

$$m(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leq a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq M(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

Деление на положит. колич. $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ не изменит смысла неравенств, и мы найдем

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} < M \quad (2).$$

Пусть теперь b_1, b_2, \dots, b_n — все < 0 ; в таком случае умножение неравенств (1) на эти количества изменит смысл всех неравенств, и получится

$$b_1 m \geq a_1 > b_1 M, \quad b_2 m \geq a_2 > b_2 M, \quad \dots, \quad b_n m \geq a_n > b_n M,$$

откуда почленное сложение даст:

$$m(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \geq a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > (b_1 + b_2 + \dots + b_n)M.$$

Так как теперь $b_1 + b_2 + \dots + b_n < 0$, то деление на эту сумму изменит смысл неравенств, и получится

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} < M.$$

Таким образом снова получилось соотношение (2), и теорема доказана.

Напр., если даны дроби $\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{-4}{25}$, то

$$\frac{-5}{8} < \frac{-1 + 1 - 5 + 3 - 4}{2 + 3 + 8 + 4 + 25} < \frac{3}{4}.$$

Также, если даны дроби $\frac{1}{-3}, \frac{-3}{-7}, \frac{4}{-5}, \frac{-6}{-15}, \frac{-1}{-8}$, то

$$\frac{4}{-5} < \frac{1 - 3 + 4 - 6 - 1}{-3 - 7 - 5 - 15 - 8} < \frac{3}{-7}.$$

339. III. ТЕОРЕМА КОШИ. Среднее арифметическое и положительныя количества $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, которыя не все равны между собою, больше ихъ средняго геометрическаго.

Для двухъ количествъ теорема уже доказана выше; слѣд.

$$\sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Затѣмъ, имѣемъ тождество

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4}}$$

слѣдовательно

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} < \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} < \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2};$$

итакъ:

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

Такимъ же образомъ, замѣчая, что

$$\sqrt[8]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \cdot \sqrt[4]{a_5 a_6 a_7 a_8},$$

докажемъ, что теорема вѣрна для 8 количествъ; и вообще, что она справедлива для 2^k чиселъ.

Чтобы доказать, что теорема справедлива для какого угодно числа данныхъ количествъ, Коши доказываетъ, что если теорема вѣрна для $p + 1$ количествъ, то она вѣрна и для p количествъ.

Имѣемъ тождество:

$$\sqrt[p]{a_1 a_2 a_3 \dots a_p} = \sqrt[p+1]{a_1 a_2 a_3 \dots a_p} \cdot \sqrt[p+1]{a_1 a_2 a_3 \dots a_p};$$

но, по условію, теорема вѣрна для $p + 1$ количествъ

$$a_1, a_2, \dots, a_p, \sqrt[p]{a_1 \dots a_p}.$$

слѣдовательно

$$\sqrt[p+1]{a_1 a_2 a_3 \dots a_p} \sqrt[p+1]{a_1 a_2 \dots a_p} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p + \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_p}}{p+1}.$$

Замѣчая, что первая часть $= \sqrt[p]{a_1 a_2 a_3 \dots a_p}$, находимъ:

$$\sqrt[p]{a_1 a_2 a_3 \dots a_p} < a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p.$$

Слѣд.

$$\sqrt[p]{a_1 a_2 a_3 \dots a_p} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p}{p},$$

что и слѣдовало доказать.

Замѣтимъ, обобщеніе теоремы для случая, когда число n данныхъ количествъ не есть степень двухъ, можетъ быть сдѣлано инымъ приемомъ. Пусть q будетъ наибольшее простое число, которое надо прибавить къ n , чтобы получить степень двухъ.

Обозначимъ арифметич. среднюю $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ данныхъ n чиселъ буквою δ . Присоединивъ къ этимъ числамъ q чиселъ, изъ которыхъ каждое равно-лось бы δ , получимъ $n + q$ чиселъ:

$$\underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}_n, \quad \underbrace{\delta, \delta, \delta, \dots, \delta}_q.$$

Такъ какъ число $n + q$ есть степень двухъ, то по доказанному

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + q \cdot \delta}{n + q} > \sqrt[n+q]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n \cdot \delta^q}.$$

Но $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n \cdot \delta$; подставивъ въ последнее неравенство, найдемъ:

$$\frac{n\delta + q\delta}{n + q} > \sqrt[n+q]{a_1 a_2 \dots a_n \cdot \delta^q}, \quad \text{или} \quad \delta > \sqrt[n+q]{a_1 a_2 \dots a_n \cdot \delta^q},$$

откуда

$$\delta^{n+q} > a_1 a_2 a_3 \dots a_n \cdot \delta^q,$$

а по сокращеніи на δ^q , по замѣнѣ δ его величиною δ по извлеченіи изъ обѣихъ частей n -го корня, находимъ:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$$

340. IV. Формула дѣленія при цѣломъ положительномъ m :

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}$$

позволяютъ вывести слѣдующія неравенства. Если $a > b > 0$, то, подставивъ во вторую часть вмѣсто b количество a , мы этимъ вторую часть увеличимъ; слѣд.

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} < m a^{m-1} \dots (1).$$

Напротивъ, подставивъ во второй части b вмѣсто a , мы ее уменьшимъ, и получимъ

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} > m \cdot b^{m-1} \dots (2).$$

Помноживъ неравенство (1) на положительное количество $a - b$ и вынеся за скобки a^{m-1} , найдемъ:

$$[a - m(a - b)] a^{m-1} < b^m \dots (3).$$

Подобнымъ же образомъ изъ неравенства (2) найдемъ:

$$a^m > [b + m(a - b)] b^{m-1} \dots (4).$$

Если $a - m(a - b)$ будет количество положительное, то, разделивъ неравенство (3) на $a - m(a - b)$, найдемъ:

$$a^{m-1} < \frac{b^m}{a - m(a - b)};$$

Слѣдовательно это неравенство возможно при условіи

$$a > m(a - b), \text{ или } b > \frac{m-1}{m} \cdot a.$$

Положивъ $m = n + 1$, получимъ:

$$a^n < \frac{b^{n+1}}{a - (n+1)(a-b)} \dots (5).$$

$$\text{т. е. } a > b > \frac{n}{n+1} \cdot a$$

Воспользуемся неравенствомъ (3), въ которомъ $a > b$, для вывода слѣдующаго неравенства:

$$\frac{s^k}{1.2.3.4 \dots k} < \left(\frac{s}{\sqrt{k}} \right)^k$$

т. е. s произвольное, а k —цѣлое положительное число.

Положивъ въ (3): $a = m + 1$ и $b = m$, найдемъ:

$$(m+1)^{m-1} < m^m, \text{ откуда } \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m} < (m+1)^2.$$

Подставляя сюда вмѣсто m послѣдовательно 2, 3, 4 . . . $k-1$, имѣемъ:

$$2^2 = 2^2$$

$$\frac{3^2}{2^2} < 3^2$$

$$\frac{4^2}{3^2} < 4^2$$

.....

$$\frac{k^2}{(k-1)^{k-1}} < k^2.$$

Перемножая эти неравенства, получимъ

$$k^2 < 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \dots k^2,$$

откуда, по извлеченіи квадратнаго корня, находимъ:

$$\sqrt{k^2} < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k$$

или

$$(\sqrt{k})^k < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k.$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{a^k}{1.2.3 \dots k} < \frac{a^k}{(1/k)^k} \quad \text{или} \quad \frac{a^k}{1.2.3 \dots k} < \left(\frac{a}{1/k}\right)^k.$$

Рѣшеніе неравенствъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

341. Нерѣдко случается, что неизвѣстное вопроса, по свойству самой задачи, должно заключаться между извѣстными предѣлами, и слѣд. должно удовлетворять нѣкоторымъ неравенствамъ. Отсюда задача о рѣшеніи неравенствъ.

Рѣшить неравенство значитъ найти предѣлы, между которыми должны заключаться значения неизвѣстнаго, для того чтобы неравенство было удовлетворено.

342. Рѣшеніе одного неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Всякое неравенство первой степени съ 1 неизвѣстнымъ, по уничтоженіи дробей, по перенесеніи извѣстныхъ членовъ въ одну часть, а неизвѣстныхъ въ другую и по приведеніи, можетъ быть представлено въ видѣ

$$ax > b \dots (1).$$

Чтобы найти отсюда предѣлы значеній x , нужно обѣ части раздѣлить на a , а при этомъ нужно знать знакъ коэффициента a . Отсюда два случая:

I. Если $a > 0$, то раздѣливъ обѣ части на a , слѣдуетъ сохранить знакъ неравенства; такимъ образомъ найдемъ

$$x > \frac{b}{a}.$$

Заключаемъ, что въ этомъ случаѣ неравенству (1) удовлетворяютъ всѣ значенія x , большія $\frac{b}{a}$, а потому $\frac{b}{a}$ называется *низшимъ предѣломъ* неизвѣстнаго x .

II. Если $a < 0$, то раздѣливъ обѣ части неравенства (1) на отрицательное количество a , должны переменить смыслъ неравенства; найдемъ

$$x < \frac{b}{a},$$

т.-е. что неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x , меньшія $\frac{b}{a}$; въ этомъ случаѣ $\frac{b}{a}$ будетъ *вышимъ предѣломъ* неизвѣстнаго.

Приводимъ примѣры:

Примѣръ I. Какъ нужно взять x , чтобы удовлетворить неравенству:

$$\frac{4}{3}x - \frac{1}{4} + 3 < 5x - \frac{x}{24} - 19.$$

Для освобожденія неравенства отъ дробей множимъ обѣ части на положительное число 24: знакъ неравенства отъ этого не измѣнится и мы получимъ

$$32x - 6 + 72 < 120x - x - 456,$$

или

$$32x + 66 < 119x - 456.$$

По перенесеніи членовъ и по приведеніи, найдемъ:

$$522 < 87x,$$

откуда, раздѣливъ обѣ части на положительное число 87, имѣемъ

$$x > 6.$$

Итакъ, всѣ числа большія 6 удовлетворяютъ данному неравенству.

Примѣръ II. Рѣшить неравенство

$$\frac{x}{a+b} - \frac{a}{a-b} > \frac{x}{a-b} - \frac{b}{a+b}.$$

Для уничтоженія дробей нужно бы было умножить обѣ части неравенства на $(a+b)(a-b)$, или $a^2 - b^2$; но какъ мы не знаемъ знака этого количества, то умножимъ обѣ части на $(a^2 - b^2)^2$, т.-е. на положительное количество; при этомъ знакъ неравенства не переизмѣнится, и мы получимъ:

$$(a^2 - b^2)(a-b)x - a(a^2 - b^2)(a+b) > (a^2 - b^2)(a+b)x - b(a^2 - b^2)(a-b).$$

Перенеся неизвѣстные члены въ первую часть, а извѣстные во вторую и сдѣлавъ надлежащія упрощенія, найдемъ:

$$-2b(a^2 - b^2)x > (a^2 - b^2)(a^2 + b^2).$$

Далѣе приходится дѣлить обѣ части на коэффициентъ при x , а при этомъ надо знать знакъ количества $b(a^2 - b^2)$; отсюда два случая:

1) Если $b(a^2 - b^2) < 0$, то $-2b(a^2 - b^2)$ будетъ количество положительное, и слѣдов. дѣля на него обѣ части неравенства, слѣдуетъ сохранить знакъ неравенства; такимъ образомъ получимъ

$$x > \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{-2b(a^2 - b^2)},$$

или, по сокращеніи дроби на $a^2 - b^2$:

$$x > -\frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

2) Если $b(a^2 - b^2) > 0$, то раздѣляя обѣ части неравенства на отрицательное количество $-2b(a^2 - b^2)$, нужно измѣнять смыслъ неравенства, такъ что въ этомъ случаѣ, по сокращеніи, найдемъ:

$$x < -\frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

Проверим найденные для x предѣлы на самомъ неравенствѣ.

Мы нашли, что при условіи: $b(a^2 - b^2) < 0$ неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x , большія $-\frac{a^2 + b^2}{2b}$; слѣд. для проверки должны положить

$$x = -\frac{a^2 + b^2}{2b} + h,$$

гдѣ $h > 0$, и это значеніе x подставить въ данное неравенство. Сдѣлавъ это, найдемъ:

$$-\frac{a^2 + b^2}{2b} + h - \frac{a}{a-b} > -\frac{a^2 + b^2}{2b} + h - \frac{b}{a+b}, \dots (1)$$

или:

$$\frac{-(a^2 + b^2) - 2bh}{2b(a+b)} - \frac{a}{a-b} > \frac{-(a^2 + b^2) - 2bh}{2b(a-b)} - \frac{b}{a+b};$$

умноживъ обѣ части на количество $2b(a+b)(a-b)$, по условію, меньшее нуля, найдемъ по упрощенію

$$-2b^2h < +2b^2h \dots (2).$$

Но h и b^2 положительны, слѣд. $-2b^2h$ отрицательно, а $+2b^2h$ положительно, и потому неравенство (2), а слѣд. и эквивалентное ему (1) вѣрно.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что при условіи $b(a^2 - b^2) > 0$ данному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x , меньшія $-\frac{a^2 + b^2}{2b}$.

343. Рѣшеніе нѣсколькихъ неравенствъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Пусть, наприм., имѣемъ два неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$ax > b \quad \text{и} \quad a'x > b'.$$

1. Пусть мы нашли: изъ перваго: $x > m$, а изъ втораго: $x > p$.

Если, при этомъ, $p > m$, то очевидно, что даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ значенія x , большія p ; такимъ образомъ p есть низшій предѣлъ x .

2. Если, рѣшая неравенства, найдемъ

$$x < m \quad \text{и} \quad x < p,$$

и если $p < m$, то очевидно, что всѣ значенія x , меньшія p , удовлетворяютъ даннымъ неравенствамъ, ибо такія значенія будутъ меньше и m . Въ этомъ случаѣ p есть высшій предѣлъ неизвѣстнаго.

3. Если найдемъ

$$x > m \quad \text{и} \quad x < p,$$

то когда $p > m$, очевидно, что даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ значенія x , заключающіяся между m и p ; m есть низшій, а p высшій предѣлъ для x .

4. Если же, найдя

$$x > m \text{ и } x < p,$$

окажется, что $m > p$, то предѣлы будутъ противорѣчащiе; а это значить, что не существуетъ такихъ значенiй x , которыя удовлетворяли бы совмѣстно даннымъ неравенствамъ. Самыя неравенства въ такомъ случаѣ называются *несовмѣстными*.

344. Нетрудно обобщить этотъ способъ. Пусть дана система n неравенствъ 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ x :

$$a_1x > b_1, \quad a_2x > b_2, \quad a_3x > b_3, \quad \quad a_nx > b_n.$$

Рѣшить ихъ — значить найти всѣ значенiя x , удовлетворяющiя всѣмъ заданнымъ неравенствамъ совмѣстно. Для этого рѣшимъ каждое неравенство отдѣльно, т.-е. найдемъ изъ него предѣлъ для x . При этомъ могутъ имѣть мѣсто 3 случая.

1) Можетъ случиться, что, рѣшая неравенства, мы найдемъ, что x долженъ *превышать* извѣстные предѣлы: напр.

$$x > h_1, \quad x > h_2, \quad x > h_3, \quad, \quad x > h_n.$$

Если наибольшее изъ n чиселъ $h_1, h_2, . . . h_n$ будетъ h , то очевидно, что всѣ неравенства будутъ удовлетворены, если мы возьмемъ

$$x > h: \quad .$$

въ этомъ случаѣ существуетъ, слѣдов., *нижний предѣлъ* для неизвѣстнаго x .

2) Можетъ случиться, наоборотъ, что, рѣшая каждое изъ данныхъ неравенствъ, мы найдемъ, что x должно быть меньше нѣкоторыхъ предѣловъ; напр., что

$$x < k_1, \quad x < k_2, \quad, \quad x < k_n.$$

Въ такомъ случаѣ, очевидно, мы удовлетворимъ даннымъ неравенствамъ, взявъ $x < k$, гдѣ k —наименьшее изъ чиселъ $k_1, k_2, . . . k_n$. Это k дастъ *смыслъ предѣлъ* неизвѣстнаго.

3) Наконецъ, можетъ случиться, что, рѣшивъ заданныя неравенства, мы найдемъ, что q неравенствъ покажутъ, что x должно быть больше q чиселъ:

$$x > h_1, \quad x > h_2, \quad x > h_3, \quad, \quad x > h_q;$$

а остальные $n - q$ неравенствъ дадутъ для x высшiе предѣлы, напр.

$$x < k_1, \quad x < k_2, \quad x < k_3, \quad . . . x < k_{n-q}.$$

Если наибольшее въ ряду чиселъ $h_1, h_2, h_3, . . .$ будетъ h , а наименьшее въ ряду $k_1, k_2, k_3, . . .$ будетъ k , то очевидно, что мы должны взять:

$$h < x < k,$$

т.-е. даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ числа, большiя h , но въ то же время меньшiя k . При этомъ:

а) если $h < k$, то такіа числа существуютъ, и слѣд., данныя неравенства совмѣстны;

б) если $h \geq k$, то, очевидно, нѣтъ чиселъ, удовлетворяющихъ данной системѣ неравенствъ, которыя, поэтому, несовмѣстны.

Рѣшеніе совмѣстныхъ неравенствъ первой степени съ нѣсколькими неизвѣстными.

345. Когда имѣемъ нѣсколько неравенствъ первой степени съ нѣсколькими неизвѣстными, то не всегда можно найти предѣлы для каждаго неизвѣстнаго.

Для нахождения этихъ предѣловъ употребляютъ или *методъ сравняванія величинъ неизвѣстныхъ*, или *методъ уравниванія коэффициентовъ* при одномъ и томъ же неизвѣстномъ.

346. Методъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ. Пусть требуется рѣшить два неравенства съ двумя неизвѣстными:

$$\begin{aligned} 5x - 3y &> 4, \\ 8x + 2y &> 25. \end{aligned}$$

Вывода предѣлы для x , находимъ: изъ перваго неравенства

$$x > \frac{4 + 3y}{5},$$

и изъ втораго

$$x > \frac{25 - 2y}{8}.$$

Такъ какъ получились два низшіе предѣла для неизвѣстнаго, то нельзя сказать, который изъ нихъ больше, и нельзя такимъ образомъ исключить x . Если же рѣшимъ неравенства относительно y , то найдемъ:

$$y < \frac{5x - 4}{3} \quad \dots (1) \quad \text{и} \quad y > \frac{25 - 8x}{2} \quad \dots (2)$$

и исключеніе y возможно. Въ самомъ дѣлѣ, первая дробь, какъ большая количества y , очевидно, больше второй дроби, какъ меньшей того же самаго y ; слѣдов.

$$\frac{5x - 4}{3} > \frac{25 - 8x}{2}.$$

Рѣшивъ это неравенство, находимъ

$$x > \frac{83}{34}, \quad \text{или} \quad x > 2 \frac{15}{34}.$$

Давая x какое угодно значеніе, большее $2 \frac{15}{34}$, найдемъ, что каждому изъ нихъ соответствуютъ два предѣла для y , изъ неравенствъ (1) и (2). Такъ, взявъ $x = 3$, найдемъ, что

$$y < 3 \frac{2}{3}, \quad \text{но} \quad y > \frac{1}{2}.$$

Взявъ $x = 4$, найдемъ

$$y < 5\frac{1}{3}, \text{ но } y > -3\frac{1}{2}.$$

Такимъ образомъ, данныя неравенства могутъ быть удовлетворены безчисленными множествами значений x и y .

Пусть требуется рѣшить три неравенства съ 3-мя неизвѣстными:

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + z + 1 &> 0, \\ x + 2y - z - 2 &< 0, \\ 3x + 2y - z - 1 &> 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

Рѣшивъ ихъ относительно x , находимъ:

$$\left. \begin{aligned} x &> \frac{y - z - 1}{2}, \\ x &< z + 2 - 2y \\ x &> \frac{z - 2y + 1}{3}. \end{aligned} \right\} (2)$$

Очевидно, что $z + 2 - 2y$, какъ выраженіе большее x , больше каждой изъ дробей, меньшихъ x ; слѣд y и z удовлетворяютъ двумъ неравенствамъ:

$$\left. \begin{aligned} z + 2 - 2y &> \frac{y - z - 1}{2}, \\ z + 2 - 2y &> \frac{z - 2y + 1}{3}. \end{aligned} \right\} (3)$$

Рѣшая эти два неравенства относительно y , найдемъ:

$$y < \frac{3z + 5}{5}, \text{ и } y < \frac{2z + 5}{4} \dots (4)$$

Давая z произвольное значеніе, напр. $z = 0$, изъ послѣднихъ неравенствъ находимъ:

$$y < 1 \text{ и } y < \frac{5}{4};$$

взявъ теперь какое угодно значеніе, меньшее 1, для y , положивъ, напримѣръ, $y = -1$, мы удовлетворимъ неравенствамъ (4).

Внося въ систему (2) $y = -1$ и $z = 0$, найдемъ

$$x > -1, \quad x < 4, \quad x > 1.$$

Слѣдов., взявъ $1 < x < 4$, мы удовлетворимъ этимъ тремъ неравенствамъ. Такъ, напр.

$$x = 2, \quad y = -1, \quad z = 0; \quad x = 2\frac{1}{2}, \quad y = -1, \quad z = 0; \quad x = 3, \quad y = -1, \quad z = 0;$$

и т. п. удовлетворяютъ даннымъ неравенствамъ.

347. Методъ уравниванія коэффициентовъ. Пусть требуется рѣшить неравенства:

$$5x - 3y > 4,$$

$$8x + 2y > 25.$$

Желая исключить x , мы должны умножить первое неравенство на 8, а второе на 5, послѣ чего получимъ

$$40x - 24y > 32 \quad \text{и} \quad 40x + 10y > 125.$$

Затѣмъ слѣдовало бы вычесть одно неравенство изъ другого; но такъ какъ мы не имѣемъ права вычитать неравенства одинаковаго смысла, то и нельзя этимъ приемомъ исключить x . Но можно исключить y , помноживъ первое неравенство на 2, а второе на 3, и сложивъ ихъ, что позволительно; такимъ образомъ найдемъ:

$$34x > 83, \quad \text{откуда} \quad x > 2\frac{15}{34}.$$

Затѣмъ, продолжаемъ такъ, какъ указано въ § 346.

Когда предложенныя неравенства противоположнаго смысла, можно методомъ уравниванія коэффициентовъ исключить неизвѣстное, имѣющее въ обоихъ неравенствахъ одинаковый знакъ. Такъ, имѣя неравенства

$$2x + 3y > 23,$$

$$3x + 2y < 22.$$

можно исключить x , умноживъ первое на 3, второе на 2 и вычтя второе изъ перваго. Такимъ путемъ найдемъ

$$y > 5.$$

Давая y какое угодно значеніе, большее 5, напр. 7, найдемъ два предѣла для x :

$$x > 1, \quad x < 2\frac{2}{3}.$$

Подобнымъ образомъ можно бы было исключить и y ; вычитая утроенное второе изъ удвоеннаго перваго неравенства, нашли бы

$$x < 4.$$

Затѣмъ, для $x < 4$, можно изъ данныхъ неравенствъ найти предѣлы для y .

Примѣчаніе. Не всякую систему неравенствъ можно рѣшить.

Пусть, напр., даны неравенства

$$3x + 5y > 7, \quad 4x + 5y > 9.$$

Замѣчаемъ, во-первыхъ, что нельзя исключить y , такъ какъ непозволительно дѣлать почленное вычитаніе неравенствъ одинаковаго смысла. Также непримѣнимъ въ данномъ случаѣ и способъ подстановки, потому что рѣшивъ, напр.,

первое неравенство относительно y , найдемъ низшій предѣлъ для y , а замѣнивъ y этимъ предѣломъ въ выраженіи $4x - 5y$, мы послѣднее уменьшимъ, а слѣд. останется неизвѣстнымъ, будетъ ли оно необходимо больше 9. Такимъ же точно образомъ убѣдимся, что нельзя исключить и x .

Вообще, можетъ случиться, что нельзя найти предѣловъ ни для одного неизвѣстнаго; или же можно найти предѣлъ для одного неизвѣстнаго, или, наконецъ, и для обоихъ.

ГЛАВА XXV.

Исслѣдованіе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Рѣшенія: положительныя, отрицательныя, нулевыя, безконечныя, неопредѣленныя. —
Примѣры исслѣдованія буквенныхъ вопросовъ.

348. Выразивъ условія задачи уравненіемъ и рѣшивъ это уравненіе, найденное рѣшеніе изслѣдуютъ. При этомъ надо различать два случая.

1. Когда задача дана въ числахъ, т.-е. въ формѣ частной задачи, то полученное рѣшеніе, удовлетворяя уравненію, не всегда представляетъ вѣстѣ съ этимъ и отвѣтъ на вопросъ, алгебраическимъ выраженіемъ котораго служить уравненіе. Такъ, напр., если въ задачѣ требуется опредѣлить число людей, и мы, составивъ уравненіе и рѣшивъ его, найдемъ, что искомое число равно $\frac{3}{4}$

или $1\frac{1}{2}$, то подобныя числа, удовлетворяя уравненію, нѣкоимъ образомъ не могутъ служить отвѣтомъ на предложенную задачу, ибо число людей можетъ выражаться только цѣлыми числами. Другой примѣръ. Если въ задачѣ требуется опредѣлить сторону треугольника, и рѣшивъ уравненіе, вытекающее изъ условій задачи, мы найдемъ, что длина стороны треугольника равна (-3 ф.) , то подобное рѣшеніе, удовлетворяя уравненію, очевидно, не можетъ выражать длину стороны треугольника. Подобныя рѣшенія, не соответствующія смыслу задачи, указываютъ на ея невозможность. Разысканіе—гдѣ кроются причины невозможности вопроса, составляетъ задачу *исслѣдованія*.

Затѣмъ, иногда искомыя рѣшенія являются въ особыхъ формахъ — нуля, безконечности или неопредѣленности. Исслѣдованіе значенія подобныхъ формъ по отношенію къ задачѣ также составляетъ предметъ *исслѣдованія*.

2. Когда данныя вопроса выражены буквами, т.-е. задача предложена въ общемъ видѣ, то значенія неизвѣстныхъ выражаются формулами, составленными изъ этихъ буквъ. Опредѣленіе условій, которымъ должны удовлетворять данныя, для того чтобы задача была возможна, а также изученіе всѣхъ замѣчательныхъ особенностей, какия можетъ представить разсматриваемая формула при всѣхъ возможныхъ предположеніяхъ относительно данныхъ, составляетъ также предметъ *исслѣдованія*.

349. Если задача приводить къ уравненію первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, то это ур. по освобожденію отъ дробей, по перенесеніи членовъ и по приведенію, всегда можетъ быть приведено къ виду

$$ax = b \dots (1).$$

Для рѣшенія его, мы должны обѣ части раздѣлить на коэффициентъ a при x .

Если a есть количество *конечное и отличное отъ нуля*, то указанное дѣленіе позволительно, и мы получимъ ур.

$$x = \frac{b}{a} \dots (2)$$

эквивалентное (1). Такъ какъ ур. (2) удовлетворяется *только* при $x = \frac{b}{a}$, то заключаемъ, что и эквивалентное ему (1) имѣетъ въ данномъ случаѣ *одно единственное рѣшеніе*, равное $\frac{b}{a}$, которое можетъ быть или положительное, или отрицательное, смотря по тому, будутъ ли a и b имѣть знаки одинаковые или разные. При $b = 0$ это рѣшеніе обращается въ 0.

Но *если* положить $a = 0$, то мы уже не имѣемъ права множить обѣ части ур—нія (1) на дробь $\frac{1}{a}$, которая въ этомъ случаѣ равна ∞ , ибо мы не можемъ утверждать, что новое уравненіе будетъ въ данномъ случаѣ необходимо эквивалентно данному. Цѣль изслѣдованія— розыскать, каково будетъ рѣшеніе уравненія (1) въ частномъ случаѣ $a = 0$, при чемъ b можетъ быть или отлично отъ нуля, или также равно нулю.

Изъ сказаннаго заключаемъ, что намъ предстоитъ разсмотрѣть слѣдующіе случаи:

- 1) a и b конечны и имѣютъ одинаковые знаки;
- 2) a и b конечны и имѣютъ противоположные знаки;
- 3) a — конечно; $b = 0$;
- 4) $a = 0$, b — конечно;
- 5) $a = 0$ и $b = 0$.

350. I. Положительныя рѣшенія. Когда a и b конечны и имѣютъ одинаковые знаки, то $x = \frac{b}{a}$, какъ частное отъ раздѣленія двухъ конечныхъ количествъ одинаковаго знака, означаетъ конечное *положительное* число. Это же самое непосредственно видно и изъ ур. (1), въ самомъ дѣлѣ, будутъ ли a и b оба положительными или оба отрицательными, выраженія ax и b могутъ быть уравнены только выборомъ опредѣленнаго *положительнаго* значенія для x .

По отношенію къ задачѣ положительнаго значенія, получаемыя для неизвѣстнаго, *въ большинствѣ случаевъ* представляютъ вѣроятъ опредѣленный и ясный отвѣтъ на нее, и этимъ самымъ показываютъ возможность задачи. Подтвержденіемъ этому служатъ всѣ задачи, рѣшенныя нами въ §§ 265—272.

Но есть случаи, когда положительныя рѣшенія, удовлетворяя уравненію, не представляютъ, однако, удовлетворительнаго отвѣта на задачу и этимъ обнаруживаютъ ея невозможность. Это бываетъ именно тогда, когда неявный вопросъ, по самому смыслу задачи, должно удовлетворять такимъ условіямъ, которыя не могутъ быть выражены урчненіемъ, напр., когда неизвѣстное должно быть цѣлымъ числомъ, или не должно выходить изъ опредѣленныхъ предѣловъ. Въ такихъ случаяхъ положительное рѣшеніе, не удовлетворяющее этимъ особымъ условіямъ, укажетъ намъ, что задача невозможна.

Въ поясненіе приводимъ слѣдующіе примѣры.

Примѣръ I. *Партія рабочихъ, состоящая изъ мужчинъ и женщинъ, въ числѣ 50 человекъ, заработала въ 6 дней 170 руб., при чемъ каждый мужчина получалъ въ день по 1 рублю, а каждая женщина по 50 копеекъ. Сколько было мужчинъ и женщинъ?*

Пусть мужчинъ было x ; слѣд. число женщинъ равнялось $50 - x$; каждый мужчина получалъ въ день 1 р., слѣд. x мужчинъ въ 6 дней заработали $6x$ р.; $50 - x$ женщинъ, получая въ день по $\frac{1}{2}$ р. каждая, въ 6 дней получили $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (50 - x)$ или $3(50 - x)$ руб. По условію задачи:

$$6x + 3(50 - x) = 170.$$

Рѣшая ур., найдемъ, что число мужчинъ

$$x = \frac{2}{3};$$

а число женщинъ

$$50 - x = 43\frac{1}{3}.$$

Исследование. Эти дробныя рѣшенія суть единственныя рѣшенія, удовлетворяющія уравненію; но уравненіе представляетъ точное и полное выраженіе условія задачи. Слѣд. другихъ рѣшеній задача не можетъ имѣть. Но по смыслу задачи рѣшенія должны быть числами цѣлыми; а какъ уравненіе дало дробныя рѣшенія, то заключаемъ, что задача невозможна.

О невозможности задачи можно судить по самымъ условіямъ; въ самомъ дѣлѣ, суммы, заработанныя мужчинами и женщинами, суть числа кратныя 3, слѣд. и полная сумма должна выражаться числомъ кратнымъ 3, между тѣмъ 170 не имѣетъ этого свойства. Въ этомъ и состоитъ несообразность условій, выразившаяся получениемъ дробныхъ рѣшеній.

Примѣръ II. *Средьдѣлить двузачное число, въ которомъ сумма цифръ равна 14, если извѣстно, что прибавъ къ числу 72, найдемъ число обращенное?*

Пусть цифра единицъ равна u , тогда цифра десятковъ выразится формулою $14 - u$, самое же число формулою $(14 - u) \cdot 10 + u$, обращенное будетъ: $10u + (14 - u)$. По условію:

$$(14 - u) \cdot 10 + u + 72 = 10u + 14 - u.$$

Рѣшая уравненіе, найдемъ: $u = 11$, $d = 3$.

Исследование. Это цѣлое положительное рѣшеніе есть единственное рѣшеніе, удовлетворяющее уравненію; слѣд. задача не можетъ имѣть другого рѣшенія. Но можно еще замѣтить, чтобы и каждая цифра не превышала 9, рѣшеніе не удовлетворяетъ еще требованію, то заключаемъ, что задача невозможна.

О невозможности задачи можно судить по самымъ условіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, если u и d — цифры, то сумма цифръ равна 14, можетъ быть или 59, или 68, или 77, или 86, или 95. Въ какому бы изъ этихъ чиселъ ни прибавили 72, никогда не получится обращеннаго числа, такъ какъ каждый разъ будутъ получаться числа трехзначныя.

351. II. Отрицательныя рѣшенія. Когда a и b конечны и имѣютъ противоположные знаки, то формула $x = \frac{b}{a}$ даетъ для неизвѣстнаго конечное отрицательное число. Это непосредственно видно изъ уравненія $ax = b$; въ самомъ дѣлѣ, пусть напр. $a > 0$, а $b < 0$; очевидно, что ур. не можетъ быть удовлетворено никакимъ положительнымъ значеніемъ x , ибо произведеніе положительныхъ чиселъ a и x не можетъ дать отрицательнаго числа, но обѣ части могутъ быть урѣзаны выборомъ отрицательнаго значенія для x , ибо произведеніе положительнаго a на отрицательное x дастъ отрицательное количество b , при определенномъ числовомъ значеніи x .

По отношенію къ отрицательнымъ рѣшеніямъ покажемъ слѣдующую теорему, примѣненіе которой тотчасъ же найдетъ себѣ мѣсто.

352. Теорема. Два уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, различающіяся между собою только знаками членовъ, содержащихъ неизвѣстное, имѣютъ рѣшенія равныя по величинѣ, но противоположныя по знаку.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ два уравненія

$$ax + b = cx + d \quad (1) \quad \text{и} \quad -ax + b = -cx + d \quad (2).$$

Рѣшая первое, найдемъ

$$x = \frac{d - b}{a - c}.$$

рѣшая второе, имѣемъ:

$$x = -\frac{d-b}{a-c}.$$

Сравнивая обѣ формулы для x , замѣчаемъ, что онѣ имѣютъ одинаковую величину, но противоположные знаки, такъ что если рѣшеніе 1-го ур. положительно, то рѣшеніе 2-го отрицательно, и наоборотъ.

Итакъ, если уравненіе 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ отрицательное рѣшеніе, то такое же точно по абсолютной величинѣ рѣшеніе, но взятое съ положительнымъ знакомъ, удовлетворяетъ уравненію, которое получается изъ перваго уравненія перемѣною x на $-x$.

353. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію вопроса о томъ, какое значеніе можетъ имѣть отрицательное рѣшеніе по отношенію къ задачѣ, отвѣтомъ на которую оно служить. Разборъ нижеприведенныхъ задачъ покажетъ намъ, что отрицательное рѣшеніе всегда служитъ указаніемъ на одно изъ слѣдующихъ обстоятельствъ: 1) или на некоторую несообразность въ условіяхъ задачи, — несообразность, которую, впрочемъ, можно исправить; 2) или на неправильную постановку вопроса; 3) или на неправильное предположеніе, слѣзанное при составленіи уравненія изъ условій задачи и обусловленное не вполнѣ опредѣленною формою вопроса; или, наконецъ, 4) на абсолютную невозможность задачи.

354. *Примѣръ I. Найдти цѣну одного фунта некотораго товара, зная, что цѣна 3 фунтовъ его, уменьшенная 5-ю рублями, равна цѣнѣ 7 фунтовъ, увеличенной двумя рублями?*

Пусть цѣна фунта будетъ x руб. Изъ условія задачи непосредственно получаемъ уравненіе

$$3x - 5 = 7x + 2,$$

рѣшивъ которое, получаемъ

$$x = -\frac{7}{4}.$$

Исслѣдованіе. Получили отрицательное рѣшеніе; но некая величина — цѣна фунта товара, по существу своему, положительна; заключаемъ, что отрицательное рѣшеніе должно указывать на несообразность въ самыхъ условіяхъ задачи. Въ данномъ случаѣ эта несообразность прямо бросается въ глаза въ самомъ дѣлѣ, цѣна 3 фунтовъ, уменьшенная 5-ю рублями, никакъ не можетъ равняться большей цѣнѣ (7-ми ф.), да еще увеличенной 2-мя рублями.

Попытаемся исправить несообразныя условія задачи; и для этого замѣтимъ, что если въ уравненіе, составленное по этимъ условіямъ, вмѣсто x подставимъ $-x$, то новое уравненіе

$$-3x - 5 = -7x + 2, \dots (1)$$

будетъ имѣть рѣшеніе, по абсолютной величинѣ равное прежнему, а по знаку положительное, т.-е. новому ур—нію удовлетворять

$$x = +\frac{7}{4}.$$

Оно будетъ представлять прямой отвѣтъ на задачу, соответствующую измѣненному ур—нію (1); поэтому, если окажется возможнымъ слегка измѣнить условія данной задачи, не измѣняя численной величины данныхъ, такъ чтобы новая задача соответствовала ур—нію (1), то положительное рѣшеніе и будетъ служить прямымъ отвѣтомъ на измѣненную задачу. Помноживъ обѣ части ур—нія (1) на -1 , дадимъ ему видъ

$$3x + 5 = 7x - 2, \dots (2).$$

Такъ какъ здѣсь къ $3x$ *придается* 5, а не вычитается 5, какъ было въ первоначальномъ ур—ніи; затѣмъ изъ $7x$ *вычитается* 2, а не *придается*, какъ въ перво-

начальномъ ур—ніи, то очевидно, что ур. (2) есть алгебраическое выражение условий слѣдующей задачи:

„Найти цѣну фунта нѣкотораго товара, зная, что цѣна 3 фунтовъ его, *увеличенная 5 ю рублями*, равна цѣнѣ 7 фунтовъ, *уменьшенной 2-мя рублями*.“

Отвѣтъ: 1 р. 75 к. удовлетворяетъ этой задачѣ, какъ нетрудно убѣдиться повѣркою.

Возможность исправленія задачи въ данномъ случаѣ обусловливалась тѣмъ, что хотя искомое и есть здѣсь величина положительная, но данныя (5 р. и 2 р.) могутъ быть принимаемы въ двухъ противоположныхъ значеніяхъ — въ смыслѣ придаваемыхъ и вычитаемыхъ величинъ.

Примеръ II. *Найти лѣта нѣкотораго лица, зная, что если изъ пяти разъ взятаго числа его лѣтъ вычесть удвоенный возрастъ, который оно имѣло 20 лѣтъ тому назадъ, то въ остатокъ получится число лѣтъ, какое оно будетъ имѣть черезъ 12 лѣтъ?*

Пусть будетъ x — требуемый возрастъ. Изъ условий задачи непосредственно получаемъ уравненіе

$$5x - (x - 20) \cdot 2 = x + 12 \dots (1).$$

Рѣшивъ уравненіе, находимъ

$$x = -14.$$

Послѣдованіе. Какъ малая величина — число лѣтъ лица, по существу своему, не можетъ быть отрицательна, поэтому триггетное рѣшеніе указываетъ на невозможность задачи. Слѣдуетъ слѣдующимъ образомъ. Если лѣтъ x — возрастъ лица, то лѣтъ $x - 20$ было въ x лѣтъ, которое лицо имѣло 20 лѣтъ тому назадъ, то имѣетъ $2(x - 20) \cdot 2$ или $3x + 40$; при положительномъ x , каково это количество и должно быть по существу своему, $3x + 40$ никакимъ образомъ не можетъ равняться $x + 12$, т.-е. условия задачи невозможны. Попробуемъ теперь измѣнить условия задачи, не мѣняя величины данныхъ, такъ, чтобы задача слѣдующая была возможна и имѣла рѣшеніемъ положительное число 14. Съ этою цѣлью измѣнимъ въ уравненіи (1) x въ $-x$, найдемъ:

$$-5x - (-x - 20)2 = -x + 12,$$

или, помноживъ обѣ части на -1 :

$$5x - (x + 20)2 = x - 12.$$

По извѣстной теоремѣ, рѣшеніе этого ур—нія есть $x = +14$; оно представляетъ прямой отвѣтъ на задачу, соответствующую этому ур—нію. Задача эта, очевидно, такова:

„Найти возрастъ лица, зная, что если изъ упятереннаго числа его лѣтъ вычесть удвоенное число лѣтъ, какое оно будетъ имѣть черезъ 20 лѣтъ (а не: какое оно имѣло 20 л. тому назадъ, какъ было въ условиіи данной задачи), то въ остатокъ получится число лѣтъ, какое это лицо имѣло 12 л. тому назадъ (вмѣсто: будетъ имѣть черезъ 12 л., какъ дано было въ условиіи задачи).“

Легко проверить, что число 14 удовлетворяетъ условіямъ этой измѣненной задачи.

Примеръ III. *Отцу 40 лѣтъ, а сыну 13; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ четверо старше сына?*

Положимъ, что черезъ x лѣтъ отъ настоящаго времени отецъ будетъ четверо старше сына; сгбѣ. отцу будетъ $40 + x$, а сыну $13 + x$ лѣтъ; и по условию задачи имѣемъ ур—ніе

$$40 + x = 4(13 + x) \dots (1).$$

Рѣшивъ это ур., найдемъ

$$x = -4$$

Исследование. Прямой ответ на вопрос должно бы было служить положительное решение; отрицательное решение указывает, что вопрос невозможен в том смысле, в каком он задан. Невозможность вопроса можно обнаружить следующим образом. Отношение лет отца к летам сына в настоящее время выражается неправильной дробью $\frac{40}{13}$, которой величина *меньше* 4, и требуется узнать, сколько нужно приписать к числителю и знаменателю, чтобы дробь сделалась равна 4, т.-е. чтобы она *увеличилась*. Но легко видеть, что от прибавления по-ровну к членам неправильной дроби величина ее не увеличивается, а уменьшается; в самом деле, взяв неправильную дробь $\frac{a}{b}$ (где, след., $a > b$),

и прибавив к членам ее по m , получим дробь $\frac{a+m}{b+m}$; приведя обе дроби к общему знаменателю, найдем, что первая $= \frac{ab + am}{b(b+m)}$ а вторая $\frac{ab + bm}{b(b+m)}$; сравняв числители и замечая, что $am > bm$, так как $a > b$, находим, что дробь действительно уменьшилась. Итак, постановка вопроса сделана неправильно, что и обнаружилось в решении получением отрицательного ответа.

Это отрицат. решение указывает вместе с тем, как следует правильно поставить вопрос, именно, что следует спросить: сколько лет тому назад отец был вчетверо старше сына?

Что вопрос должен быть изменен в этом смысле, — это показывает и тот прием, который служил для исправления несообразных условий в двух предыдущих задачах. Подставив в ур. (1) $-x$ вместо x , найдем ур.

$$40 - x = 4(13 - x),$$

которое, очевидно, служит алгебраическим выражением условий вопроса:

„В настоящее время отцу 40, а сыну 13 лет; сколько лет тому назад отец был вчетверо старше сына?“ Положительное решение $x = 4$ и служит прямым ответом на эту задачу, как легко убедиться в этом проверкой.

Пример IV. Из двух игроков А и В первый имеет 400 р., а второй 120 р; после нескольких игр у А оказалось втрое больше, чем у В. Сколько выиграл А?

Пусть А выиграл x рублей; ур-ние будет

$$400 + x = 3(120 - x),$$

откуда

$$x = -10.$$

Исследование. Прямой ответ на вопрос служило бы положительное решение; отрицательное решение показывает, что вопрос невозможен в том смысле, в каком он задан. Невозможность вопроса легко обнаружить. Лицо А, имея до начала игры больше чем втрое лица В, после выигрыша, очевидно, не может иметь втрое больше денег чем у В. Поэтому, вопрос: „сколько выиграл А“ поставлен неправильно. Отрицательный знак решения указывает — как должно правильно поставить вопрос, именно, что нужно спросить: „сколько руб. А проиграл?“ К тому же заключению приведет и указанный выше прием истолкования отрицательных решений; в самом деле, подставив в ур-ние $-x$ вместо x , найдем.

$$400 - x = 3(120 + x);$$

положительное решение $x = +10$ этого ур-ния и служит прямым ответом на вопрос, ему соответствующий: „после двух игроков А имел 400 руб., В — 120 руб.; после нескольких игр у А оказалось втрое больше чем у В. Сколько проиграл А?“

Примѣръ V. Два поезда идутъ равномерно въ одномъ направленіи къ станціи, отстоящей отъ мѣста выхода перваго поезда на 200 верстъ, а отъ мѣста выхода втораго на 90 верстъ. Первый поездъ проходитъ 25 верстъ въ часъ, второй 14 верстъ. Определить расстояние точки встрѣчи поездовъ отъ станціи, полагая, что оба поезда выходятъ въ одно время?



Черт. 18.

Пусть поездъ выходитъ изъ А и В и идетъ къ станціи С; такъ какъ поездъ заранее сказать, встрѣтятся ли поезда на какой-нибудь станціи С, или прѣблизились, то для составленія уравненія необходимо сдѣлать то или другое допущеніе. Итакъ, предположимъ, что точка встрѣчи находится въ разстояніи x верстъ не отъ станціи С, но въ некоторой точкѣ R. Первый поездъ, выходящій изъ А, проходитъ разстояние AR, равное $200 - x$ вер., идя по 25 верстъ въ часъ, а потому пройдетъ все разстояние AR въ $\frac{200 - x}{25}$ часовъ; второй, идя въ часъ по 14 в., пройдетъ разстояние BR = $90 - x$ в., въ $\frac{90 - x}{14}$ час. Выходя со станцій А и В въ одно время, они употребляютъ на прохожденіе разстояній AR и BR одинаковое число часовъ, а потому

$$\frac{200 - x}{25} = \frac{90 - x}{14} \quad . . . (1)$$

откуда $x = -50$ верстамъ.

Исследование. Прямой отвѣтъ на вопросъ служило бы положительное рѣшеніе; посмотримъ, какъ объяснить въ данномъ случаѣ происхожденіе отрицательнаго отвѣта? Обращаясь къ условіямъ задачи, не находимъ въ нихъ никакой несообразности: поезда, выходящій со станціи А, движется скорѣе поезда, выходящаго изъ В, долженъ догнать его гдѣ-нибудь вправо отъ точки В. Слѣд., не въ условіяхъ задачи должно искать источникъ отрицательнаго отвѣта. Обращаясь затѣмъ къ вопросу, замѣчаемъ, что онъ поставленъ не вѣрно: опредѣленно, такъ какъ въ немъ не указано гдѣ искать точку встрѣчи — не вѣдѣвая станціи С, или за нею. Въ виду этой неопредѣленности требованія, пришлось при составленіи уравненія сдѣлать одно изъ двухъ предположеній: или что поездъ встрѣтятся вправо отъ С, или что встрѣча ихъ произойдетъ вправо отъ С. Мы сдѣлали первое предположеніе, и получили отрицательный отвѣтъ, который и указываетъ, что слѣдовало сдѣлать противное этому предположенію. Предположивъ, что встрѣча произойдетъ вправо отъ С, въ некоторой точкѣ R', отстоящей отъ С на x верстъ, получимъ уравненіе

$$\frac{200 + x}{25} = \frac{90 + x}{14} \quad . . . (2)$$

котораго положительное рѣшеніе $x = +50$ и служить прямымъ отвѣтомъ на вопросъ „въ какомъ разстояніи за станціей С оба поезда встрѣтятся?“ Замѣтимъ, что изъ урав. (2) получается изъ (1) переменную x въ $-x$.

Въ данномъ примѣрѣ отрицательное рѣшеніе получилось не отъ несообразности задачи, но отъ ложнаго предположенія, сдѣланнаго при составленіи уравненія. Мы сдѣлали ошибку, взявъ съ отрицательнымъ знакомъ, предположеніе, идущее на задуму, но представляющее неимѣстность съ значеніемъ, прямо противоположнымъ тому, какое ему придавали при составленіи уравненія.

Примѣръ VI. Три точки А, В и С находятся на одной прямой, причемъ между А и В лежатъ между двумя другими разстояніе АВ = 2 фут., АС = 5 ф. На

продолжении прямой, соединяющей точки А и С, найти такую точку М, которой расстояние от точки В было бы средним пропорциональным между ее расстояниями от точек А и С?



Черт. 19.

Точка М может находиться или вправо от точки С, или влево от точки А, и в priori нельзя сказать, какое из этих двух положений она должна занимать. Допустимъ, что она должна находиться вправо отъ С, и обозначимъ расстояние ее отъ А буквою x . Уравнение задачи будетъ

$$(x - 2)^2 = x(x - 5) \quad . \quad (1).$$

Решивъ уравнение, найдемъ: $x = -4$.

Исследование. Прямимъ отвѣтомъ на вопросъ было бы положительное рѣшеніе, затѣмъ, такъ какъ условия задачи не содержатъ никакой неловобразности, то заключаемъ, что отрицательное рѣшеніе обуславливается единственно ложнымъ предположеніемъ, сдѣланнымъ при составленіи уравненія. Поэтому, положимъ, что искома точка находится влево отъ А, и обозначимъ по прежнему расстояние АМ буквою x . Уравненіе задачи будетъ въ этомъ предположеніи такое:

$$(x + 2)^2 = x(x + 5) \quad . \quad (2).$$

Но если въ ур. (1) переимѣнимъ x въ $-x$, то найдемъ

$$(-x - 2)^2 = -x(-x - 5), \text{ или } (x + 2)^2 = x(x + 5),$$

т.-е. ур. (2). Изъ этого прямо заключаемъ, что корни ур-нія (2) отличаются отъ корней ур-нія (1) только знаками, и потому равенъ $+4$. Итакъ, искома точка находится влево отъ А, въ разстояніи $= 4$ ф. отъ этой точки.

Такимъ образомъ и въ этой задачѣ отрицательное рѣшеніе указывало только на ложное предположеніе, сдѣланное относительно положенія искома точки при составленіи уравненія.

Примѣръ VII. Имѣемъ двухъ сортовъ чай, въ 5 руб. и въ 8 руб. фунтъ. Сколько нужно взять каждаго сорта, чтобы составить 6 фунт. смѣси въ 10 р. за фунтъ?

Если перваго сорта возьмемъ x ф., то втораго нужно взять $6 - x$ ф. Цѣна перваго будетъ 5 x р., цѣна втораго 8(6 - x) р., цѣна всей смѣси 5 x + 8(6 - x); по условію:

$$5x + 8(6 - x) = 60,$$

откуда

$$x = -4.$$

Исследование. Искомое данной задачи есть величина существенно положительная, а потому отрицательное рѣшеніе здѣсь не имѣетъ смысла. Измѣнивъ въ ур-ніи x на $-x$, найдемъ ур., котораго рѣшеніе будетъ $+4$, но подобравъ задачу, соответствующую измѣненному ур-нію, и однородную съ данной, въ этомъ случаѣ нельзя. Обстоятельство это указываетъ на то, что задача абсолютно невозможна. И дѣйствительно, изъ двухъ сортовъ чаю — въ 5 и въ 8 р. за фунтъ нельзя составить смѣси, цѣна одного фунта которой превышала бы эти цѣны.

Примѣръ VIII. За входъ въ музей взимается плата двойкаго рода а именно: постоянная въ 20 коп., назначаемая на содержаніе болатыни, и переменная, пропорциональная числу часовъ, проведенныхъ посетителемъ въ музей.

причем на каждый час берется по 5 коп. этого сбора назначаются на новые приобретения. Отпущены 60 человек вошли в музей в полдень, и вышли все в одно время. Во сколько часов они оставили музей, если весь сбор был равен 9 рублям?

Пусть x — будет число часов от полуночи до момента выхода посетителей из музея. Сбор равен, с одной стороны, 900 коп., а с другой $(20 + 5x) \cdot 60$ к. Уравнение задачи есть

$$(20 + 5x) \cdot 60 = 900,$$

откуда

$$x = -1.$$

Последование. Хотя неизвестное в данной задаче есть время, которое можно считать в двух противоположных направлениях (до полуночи и по полуночи), но очевидно, что из предложенной задачи р-ня идти об абсолютном количестве часов, проведенных посетителями в музее. Поэтому задача требует положительного решения. Подставив в ур-ние x вместо x , мы конечно получим ур-ние, которое будет иметь положительное решение $x = +1$; но изменить задачу так, чтобы она соответствовала измененному ур-нию, оказывается невозможным. Таким образом, отрицательное решение указывает, в данном случае, на абсолютную невозможность задачи. Невозможность задачи состоит в том, что полный сбор (9 руб.) меньше даже суммы, получаемой от одного 20-ти часового сбора со всех 60 лиц, составляющей 12 р., а это, очевидно, нелогично.

355. Заключение. Разобранные примеры приводят к тому заключению, что подучение отрицательных решений указывает или 1) на несоборность самих условий задачи, как в примерах I и II; или 2) на неправильную постановку вопроса, как в примерах III и IV, или 3) на неправильное предположение, сделанное при составлении ур-ния, как в примерах V и VI; или, наконец, 4) на абсолютную невозможность задачи (примеры VII и VIII).

Для истолкования смысла отрицательного решения всегда употребляется один и тот же прием: в уравнение, вытекающее из условий задачи, вместо x подставляются $-x$, и получают таким образом новое ур-ние, корень которого имеет прежнюю абсолютную величину, но положительный знак. Затем вытывают, не имея численного значения x , подобрать задачу, которая соответствовала бы измененному уравнению. Если эта попытка будет иметь успех, то следует заключить, что отрицательное решение означало только некоторую неправильность в условиях, либо в постановке вопроса, либо в предположении при составлении ур-ния, и положительное решение измененного ур-ния будет служить прямым ответом на неправильною задачу. Если же сказанная попытка будет безуспешна, то следует заключить, что задача абсолютно невозможна.

356. III. Нулевые решения. Когда a конечно, а $b = 0$, тогда $x = \frac{0}{a}$; а так как частное от разделения нуля на конечное количество есть нуль, то

$$x = 0.$$

Обращаясь к уравнению, находим, что при $b = 0$, оно принимает вид $ax = 0$; но чтобы произведение двух множителей, один из которых конечно, равнялся 0, необходимо, чтобы другой множитель равнялся 0. Итак, ур. не может быть удовлетворено никаким иным значением неизвестного, кроме нуля. Такое решение называется нулевым.

Если по смыслу задачи неизвестное может быть нулем, то нулевое решение имеет удовлетворительный ответ на вопрос; если же некое, по смыслу вопроса, значение число не равно нулю, то подучение нулевого решения указывает на невозможность задачи.

Пример 1. Отцу 57 лет, а сыну 19, через сколько лет отец будет втрое старше сына?

Означив искомое буквою x , будемъ имѣть ур—ніе

$$57 + x = 3(19 + x),$$

или

$$57 + x = 57 + 3x, \text{ или } 2x = 0, \text{ откуда } x = 0.$$

Отвѣтъ этотъ даетъ удовлетворительное рѣшеніе вопроса, показывая, что уже въ настоящее время отецъ вътрое старше сына; дѣйствительно: $57 = 19 \times 3$.

Примѣръ II. *Значеніе дроби равно $\frac{7}{3}$ ея числителя; если же къ числителю приписать 5, а къ знаменателю 10, то дробь обратится въ $\frac{1}{2}$. Найдти дробь?*

Означивъ числителя искомой дроби буквою x , имѣемъ ур—ніе

$$\frac{x+5}{3x+10} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } x = 0.$$

Этотъ отвѣтъ обнаруживаетъ, что такой дроби, какъ требуется въ задачѣ, не существуетъ.

357. IV. Безконечныя рѣшенія. Если $a = 0$, $b \leq 0$, общая формула принимаетъ видъ

$$x = \frac{b}{0} = \infty;$$

это значитъ, что x безконечно-велико; обращаясь къ уравненію, находимъ, что оно въ данномъ случаѣ принимаетъ видъ

$$0 \cdot x = b,$$

и требуетъ нахождения такого числа, которое, будучи умножено на нуль, давало бы конечное произведение b . Но мы знаемъ, что нуль, умноженный на конечное количество, даетъ всегда нуль; а между тѣмъ вторая часть ур—нія отлична отъ нуля, и слѣд. *невозможно удовлетворить уравненію никакими конечными значеніями x* . Итакъ, безконечныя рѣшенія служатъ признакомъ невозможности удовлетворить ур—нію конечнымъ значеніемъ неизвѣстнаго.

Но не всегда такія рѣшенія означаютъ невозможность задачи. Когда, по смыслу задачи, неизвѣстное должно быть конечнымъ количествомъ, то безконечное рѣшеніе укажетъ невозможность задачи.

Примѣръ. *Найти число, которое половина, сложенная съ его третьей, превратилась бы на 6 единицъ пяти разъ взятый избытокъ четверти этого числа надъ его двенадцатую долю.*

Называя искомое число буквою x , получимъ уравненіе

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5\left(\frac{x}{4} - \frac{x}{12}\right) + 6.$$

Освобождая это ур. отъ дробей, находимъ

$$10x - 10x \div 72, \text{ или } (10 - 10)x = 72, \text{ откуда } x = \frac{72}{10 - 10} = \frac{72}{0} = \infty.$$

Полученное безконечное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи. О невозможности задачи можно заключить а priori, имѣнивъ нѣсколько формулѣ задачи. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ какого-нибудь числа составляютъ выѣтъ $\frac{5}{6}$ его, а избы-

токъ $\frac{1}{4}$ halb $\frac{1}{12}$ числа составлять $\frac{1}{6}$ этого числа; а потому задача можетъ быть выражена такъ: „найти число, $\frac{5}{6}$ котораго превышаютъ на 6 единицъ $\frac{5}{6}$ того же числа?“

Въ этой формѣ полнота задачи становится очевидною.

Когда неизвѣстное есть величина *невозможная*, то случается, и именно въ простыхъ геометрическихъ, что безконечное значение x не указываетъ возможности задачи. Такъ, когда для опредѣленія положенія прямой, удовлетворяющей различнымъ геометрическимъ условиямъ, принимаютъ за неизвѣстное расстояние между точкою пересѣченія этой прямой съ данною прямою и точкою, взятою на этой второй прямой, то очевидно, что безконечное значение величества указать на параллельность обѣихъ прямыхъ.

Примѣръ. Къ двумъ кругамъ, которыхъ радиусы равны R и r , провести общую внешнюю касательную (черт. 23).

Задача будетъ рѣшена, если мы опредѣлимъ положеніе точки T , въ которой некая касательная встрѣчаетъ линію центровъ. Примемъ за неизвѣстное расстояние точки T отъ центра O ; въ подобахъ треугольниковъ OOT и oot имѣемъ пропорцію

$$TO : To = OA : oa,$$

или, положивъ: $OA = R$, $oa = r$, $Oo = d$ и $OT = x$:

$$x : (x - d) = R : r, \text{ откуда } x = \frac{dR}{R - r}.$$

Сдѣлавъ $R = r$, найдемъ: $x = \frac{dR}{0} = \infty$. Но это безконечное рѣшеніе отнюдь не означаетъ невозможности задачи: оно показываетъ только, что при данномъ условіи ($R = r$) точка T удалится въ безконечность, иными словами, что обѣи касательныя приняла особое положеніе относительно линіи центровъ, а именно сдѣлалась параллельна этой линіи. И въ самомъ дѣлѣ, при $R = r$, фигура $AOoa$ обращается въ прямоугольникъ, и слѣдовательно линія Aa дѣлается параллельна Oo .

358. V. Неопредѣленные рѣшенія. При $a = 0$ и $b = 0$ общая формула принимаетъ видъ

$$x = \frac{0}{0},$$

означающей *неопредѣленность*. Обращаясь къ ур—нію, находимъ, что оно беретъ видъ $0 \cdot x = 0$. Какова бы ни была величина x , лѣвая часть всегда равна нулю, а слѣд. ур—ніе обращается въ тождество при всякомъ x , а потому оно дѣйствительно неопредѣленно.

Неопредѣленные рѣшенія указываютъ на неопредѣленность задачи, т. е. на то, что условия вопроса не ограничиваютъ произвола неизвѣстнаго.

Примѣръ. Найти возрастъ лица, зная, что если изъ утроеннаго числа его лѣтъ вычесть увеличенное число лѣтъ, какое лицо это будетъ имѣть черезъ 10 лѣтъ, то въ результатѣ получится то число лѣтъ, какое лицо имѣло 20 лѣтъ тому назадъ.

Обозначивъ искомое число лѣтъ буквою x , прямо имѣемъ ур—ніе

$$3x - 2(x + 10) = x - 20,$$

$$\text{или } x - 20 = x - 20, \text{ или } (1 - 1)x = 20 - 20, \text{ откуда } x = \frac{20 - 20}{1 - 1} = \frac{0}{0}.$$

Это рѣшеніе указываетъ на полную неопредѣленность задачи: въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что условія данной задачи—только кажущіяся и не ограничиваютъ произвола неизвѣстнаго. Дѣйствительно, такъ какъ $3x \rightarrow 2(x+10)$, по упрощеніи, обращается въ $x=20$, то задачу можно выразить такъ: „найти возрастъ лица, зная, что число лѣтъ, какое это лицо имѣло 20 л. тому назадъ, равно возрасту, какой оно имѣло 20 л. тому назадъ“. Очевидно, что этому условию удовлетворяетъ всякое число, и что задача ничѣмъ не ограничиваетъ величины неизвѣстнаго.

Если въ формулѣ $x = \frac{b}{a}$ выраженія a и b суть цѣлыя полиномы относительно одной и той же буквы y , то можетъ случиться, что при нѣкоторомъ частномъ значеніи y' этой буквы полиномы b и a обращаются въ нули, тогда x представится подъ видомъ неопредѣленности $\frac{0}{0}$. Но отсюда не слѣдуетъ заключать, что

въ этомъ частномъ случаѣ задача неопредѣленна. Неопредѣленность эта, какъ мы уже знаемъ, только кажущаяся, и зависитъ отъ того, что въ уравненіе $ax = b$ введенъ множитель, обращающійся въ нуль въ рассматриваемомъ частномъ случаѣ, вслѣдствіе чего окончательное уравненіе, изъ котораго выведенъ x , не эквивалентно первоначальному уравненію. Поэтому нужно вернуться къ первоначальному выведенію и уничтожить этотъ обращающійся въ нуль множитель, прежде чѣмъ будетъ сдѣлано частное предположеніе.

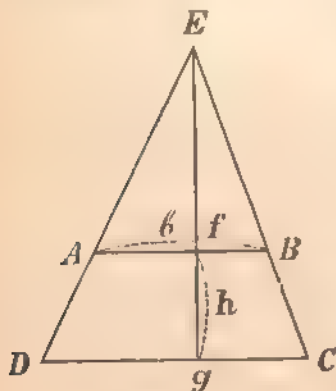
Впрочемъ, можно это сдѣлать и въ самой формулѣ x , т. е. раскрыть ея неопредѣленность. Мы знаемъ, что если b обращается въ 0 при $y = y'$, то онъ дѣлится на $y - y'$, такъ что можно его представить въ видѣ $(y - y') \cdot b'$, полагая, что b' уже не обращается въ 0 при $y = y'$; точно такимъ же образомъ $a = (y - y') \cdot a'$, гдѣ уже a' не содержитъ множителя $y - y'$. Такимъ образомъ

$$x = \frac{(y - y')b'}{(y - y')a'} = \frac{b'}{a'}.$$

Положивъ теперь $y = y'$, мы и найдемъ истинное значеніе кажущейся неопредѣленности формулы x .

Если бы оказалось, что b и a содержатъ $y - y'$ въ степени вышшей первой, то должны бы были выдѣлить эту степень въ обоихъ членахъ дроби, сдѣлать сокращеніе и потомъ уже положить $y = y'$.

Примѣръ. Вычислить площадь трапеціи, которой основанія равны соответственно a и b , а высота $= h$, рассматривая ее какъ разность площадей двухъ треугольниковъ, составленныхъ основаніями трапеціи и продолженными до пересѣченія истинными ея боками.



Черт. 20.

Обозначивъ искомую площадь буквою S , имѣемъ:

$$S = \frac{a \times EG}{2} - \frac{b \times EF}{2}.$$

Изъ подобія треугольниковъ DEC и FEB находимъ

$$\frac{EG}{EF} = \frac{a}{b}, \text{ или } \frac{EF + h}{EF} = \frac{a}{b}, \text{ откуда } EF = \frac{bh}{a - b};$$

субст.

$$EG = EF + h = \frac{bh}{a - b} + h = \frac{ah}{a - b}.$$

Такимъ образомъ:

$$S = \frac{h}{2} \left(\frac{a^2}{a - b} - \frac{b^2}{b - a} \right).$$

Пока a отлично от b , эта формула дает для площади трапеции вполне определенную величину. Но если положить $a = b$, формула принимает вид $S = \frac{0}{0}$, и задача, повидимому, дѣлается неопредѣленною. Но эта неопредѣленность только кажущаяся, и зависитъ отъ того, что числитель и знаменатель S содержатъ общаго множителя $a - b$, который въ частномъ предположеніи $a = b$ обращается въ нуль. Сокративъ предварительно дробь $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ на $a - b$, найдемъ $S = \frac{1}{2}(a + b)$; положивъ, затѣмъ, $a = b$, найдемъ $S = ah$ — величину вполне определенную. И действительно, при $a = b$ трапеція превращается въ параллелограммъ, котораго площадь равна ah .

359. Заключение. Уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$ax = b$$

имѣетъ единственное и конечное рѣшеніе, когда a отлично отъ нуля, когда $a \neq 0$, а $b \geq 0$, уравненіе невозможно, въ томъ смыслѣ, что оно не имѣетъ конечныхъ рѣшеній; наконецъ, когда $a = b = 0$, уравненіе неопредѣленно, при чемъ неопредѣленность можетъ быть или действительная, или только кажущаяся.

Методъ изслѣдованія вопросовъ 1-й степени.

360. При изслѣдованіи вопросовъ 1-й степени полезно держаться слѣдующаго порядка:

1) Дѣлаютъ всевозможныя предположенія относительно знака знаменателя: знаменатель положительный, отрицательный, равный нулю.

2) Къ каждому изъ этихъ предположеній относительно знаменателя присоединяемъ всевозможныя предположенія относительно числителя, лишь бы они не противорѣчили извѣстному предположенію о знаменателѣ.

Такъ обр. мы рассмотримъ всевозможные случаи относительно знака неизвѣстнаго или неизвѣстныхъ.

3) Слѣдуетъ дать истолкованіе отрицательныхъ значений неизвѣстныхъ.

4) Если, какъ въ вопросахъ геометрии, свойство задачи налагаетъ на неизвѣстныя тѣ или другіе предѣлы, нужно подвергнуть разсмотрѣнію и это обстоятельство.

5) Наконецъ, нужно построить неизвѣстное, пользуясь его формулою; послѣднее, очевидно, имѣетъ мѣсто въ случаѣ задачъ геометрическихъ.

Первый примѣръ изслѣдованія.

361. Отцу a , а сыну b лѣтъ; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ n разъ старше сына?

Пусть это случится черезъ x лѣтъ отъ настоящаго времени, уравненіе задачи, очевидно, будетъ:

$$a + x = n(b + x);$$

откуда

$$x = \frac{a - nb}{n - 1} \quad (1).$$

Изслѣдованіе. n есть число большее 1; слѣд. знаменатель всегда отличенъ отъ нуля и положителенъ. Относительно числителя возможны три предположенія: $a > nb$; $a = nb$; $a < nb$.

1) $a > nb$. При этомъ условіи и числитель, а слѣд. и x , положительны.

Это положительное значеніе x даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ, т.-е. что въ

будущемъ, по течении числа лѣтъ, выражаемаго формулою x , отецъ будетъ въ n разъ старше сына. И въ самомъ дѣлѣ, отношение лѣтъ отца къ лѣтамъ сына въ настоящее время равно $\frac{a}{b}$ (непр. дроби); требуется чтобы это отношение уменьшилось, ибо изъ условия $a > nb$ находимъ $n < \frac{a}{b}$, но отъ приращенія поровну къ членамъ неправильной дроби величина ея дѣйствительно уменьшается.

2) $a = nb$. Въ этомъ случаѣ числитель формулы x обращается въ нуль, а имѣетъ съ лѣтми n $x = 0$. Это рѣшеніе показываетъ, что искомое событіе имѣетъ мѣсто въ настоящее время, что очевидно, такъ какъ изъ даннаго условия имѣемъ $\frac{a}{b} = n$, т. е. что уже теперь отношение лѣтъ отца и сына имѣетъ требуемую величину n .

3) $a < nb$. Числитель x , а слѣд. и x въ этомъ случаѣ отрицателенъ.

Отрицательное рѣшеніе означаетъ, что подростъ въ примомъ смыслѣ невозможенъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ настоящее время отношение лѣтъ отца и сына равно $\frac{a}{b}$;

изъ условия же имѣемъ, что $n > \frac{a}{b}$, т. е. требуется, чтобы это отношение увеличилось; очевидно, что это невозможно въ будущемъ, потому что отъ приращенія поровну къ членамъ непр. дроби ея величина не увеличивается, а уменьшается.

Абсолютная величина отрицательнаго рѣшенія удовлетворяетъ уравненію, полученному изъ первоначальнаго перемѣною x на $-x$, т. е. ур-нію:

$$a - x = n(b - x),$$

а потому служить примамъ отвѣтомъ на задачу: „отцу a , а сыну b лѣтъ; сколько лѣтъ тому началъ отецъ быть въ n разъ старше сына?“

Въ этомъ формѣ, при данномъ условии, $n > \frac{a}{b}$, задача возможна, потому что отъ вычитанія поровну изъ членовъ неправ. дроби величина ея дѣйствительно увеличивается.

Заключеніе. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что если дать предложенной задачѣ наиболѣе общую форму: „отношеніе лѣтъ отца къ лѣтамъ сына есть $\frac{a}{b}$ “; определить эпоху, въ которую это отношеніе имѣетъ величину n “ то формула (1) даетъ для всѣхъ случаевъ рѣшеніе задачи, если найденное число лѣтъ считать: въ *будущемъ*, когда оно *положительно*, и въ *происшедшмъ*, когда оно *отрицательно*.

Второй примѣръ изслѣдованія.

362. Три точки А, В и С лежатъ на прямой, при чемъ точка В находится между двумя другими; расстоянія $AB = a$, $AC = b$. Найти на продолженіи прямой АС такую точку М, которой расстояніе отъ точки В было бы среднимъ пропорціональнымъ между ея расстояніями отъ точекъ А и С? (черт. 19 и 21.)

Обозначимъ разстояніе АМ буквою x и положимъ, что искомая точка лежитъ вправо отъ С; въ этомъ предположеніи уравненіе будетъ

$$(x - a)^2 = x(x - b) \dots (1).$$

Предполагая же, что точка М находится влѣво отъ А, получимъ ур.

$$(x + a)^2 = x(x + b) \dots (2).$$

Ур. (2) выводится изъ (1) перемѣною x въ $-x$; слѣд. можно ограничиться рѣшеніемъ ур-нія (1), помня, что если оно имѣетъ отрицательныя корни, то

этот корень, по переменѣ у него знака, будетъ корнемъ ур—ня (2), и слѣд. дастъ точку, лежащую влѣво отъ А; однимъ словомъ, корень ур—ня (1) всегда представляетъ разстояние некоей точки отъ А, при чемъ это разстояние нужно брать *справа отъ А*, если корень *положителенъ*, и *влѣво отъ А*, если онъ *отрицателенъ*.

Сдѣлавъ эти подготовительныя замѣчанія, рѣшаемъ ур. (1) и находимъ

$$x = \frac{a^2}{2a - b}.$$

Исследование. Формула x даетъ мѣсто слѣдующимъ случаямъ.

$$2a - b > 0; \quad 2a - b < 0; \quad 2a - b = 0.$$

1) Если $2a - b > 0$, корень ур—ня *положителенъ*, а потому некая точка находится *справа отъ А*; но *линия* требуетъ, кромѣ того, чтобы эта точка была *выше* и *отъ С*, т. е. чтобы величина x была больше b . Итакъ, нужно рассмотреть, удовлетворяется ли неравенство

$$\frac{a^2}{2a - b} > b;$$

такъ какъ $2a - b$ *положительно*, то умноживъ обѣ части неравенства на $2a - b$ и не переменяя знакъ неравенства, замѣняемъ последнее ему эквивалентнымъ

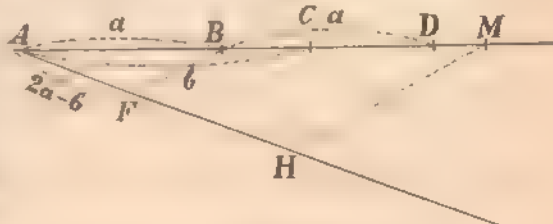
$$a^2 > 2ab - b^2, \quad \text{или} \quad a^2 - 2ab + b^2 > 0, \quad \text{или} \quad (a - b)^2 > 0;$$

последнее неравенство всегда удовлетворено, потому что квадратъ всегда *положителенъ*, слѣд. справедливо и эквивалентное ему первое неравенство. Такимъ образомъ, при условии $2a - b > 0$, ур—не имѣетъ *положительный* корень *большій* b , определяющій точку М *справа отъ С*, какъ того требуетъ задание.

2) Если $2a - b < 0$, корень ур—ня (1) *отрицателенъ*, и согласно выше-сказанному, определяется точка, находящаяся на продолженіи линіи АС, *влѣво* отъ точки А и въ разстояніи отъ нея, равномъ $\frac{a^2}{b - 2a}$.

3) Наконецъ, если $2a - b = 0$, количество x обращается въ ∞ . Это значить, что x неограниченно возрастаетъ по мѣрѣ того какъ b приближается къ $2a$; точка М удаляется отъ А, и когда b дѣлается равнымъ $2a$, точка М дѣлается безконечно далеко отъ А, и задача о нахожденіи такой точки невозможна.

Построеніе. Пусть $2a - b > 0$. Отложивъ отъ точки В линію $BD = a$, найдемъ, что длина линіи $CD = 2a - b$. Проведя подъ произвольнымъ угломъ къ прямой АС линію АН, отложимъ на ней $AF = 2a - b$ и $АН = a$; соединивъ затѣмъ точки F и В, проводимъ изъ точки Н прямую $HM \parallel FB$; точка М будетъ требуемая. Въ самомъ дѣлѣ, подобіе $\Delta \Delta ABF$ и AMH даетъ:



Черт. 21.

$$AF : AH = AB : AM, \quad \text{или} \quad (2a - b) : a = a : AM, \quad \text{откуда}$$

$$AM = \frac{a^2}{2a - b} = x.$$

Примѣчаніе. Если $2a - b$ уменьшать, приближая къ нулю, линія BF приближается къ совпаденію съ ВА, а линія НМ — къ параллельности съ АВ,

вслѣдствіе этого точка М удаляется отъ С, и когда $2a - b$ обратится въ 0, НМ сдѣлается параллельна АВ, и точка М удалится въ безконечность.

Третій примѣръ изслѣдованія.

363. Задача о фонтанахъ. Два фонтана наполняютъ бассейнъ: первый, действуя одинъ, можетъ наполнить бассейнъ въ a часовъ; другой, будучи открытъ одинъ, наполнитъ бассейнъ въ b часовъ. Кранъ, находящійся въ днѣ, можетъ опорожнить бассейнъ въ c часовъ. Во сколько часовъ бассейнъ, вначалѣ пустой, будетъ наполненъ, если оба фонтана и кранъ будутъ открыты одновременно?

Пусть бассейнъ наполняется въ x часовъ. Первый фонтанъ, наполняя бассейнъ въ a часовъ, въ 1 часъ наполнитъ $\frac{1}{a}$ часть бассейна, а въ x час. $\frac{x}{a}$ частей его.

Другой фонтанъ въ то же самое время наполнитъ $\frac{x}{b}$ частей бассейна. Наконецъ, кранъ выпуститъ въ x час. $\frac{x}{c}$ частей бассейна. Такъ какъ разность между приходомъ воды и ея расходомъ въ x часовъ, по условію, равна емкости бассейна, то имѣемъ уравненіе

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x}{c} = 1,$$

откуда

$$x = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}}.$$

Изслѣдованіе. Здѣсь слѣдуетъ рассмотреть три случая:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

1) Когда $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$, величина x конечна и положительна. Это значить, что задача возможна, т.-е. что бассейнъ черезъ нѣсколько часовъ действительно будетъ наполненъ. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ есть часть бассейна, наполняемая въ 1 часъ обоими фонтанами, а $\frac{1}{c}$ — количество воды, уносимой въ 1 ч. краномъ; такъ какъ первое количество, по условію, больше второго, то очевидно, что по истеченіи нѣсколькихъ часовъ бассейнъ наполнится.

Сверхъ того, если увеличивать c , т. е. уменьшать отверстіе крана, величина x также будетъ уменьшаться, стремясь къ предѣлу $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, котораго она достигаетъ при $c = \infty$, т.-е. когда кранъ будетъ закрытъ.

2) Когда $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$, величина x становится отрицательной. Это отрицательное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи, т.-е. что бассейнъ не можетъ наполниться. Въ самомъ дѣлѣ, неравенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$ означаетъ, что количество воды, доставляемое въ 1 часъ обоими фонтанами, меньше количества воды, котораю отводящій кранъ можетъ унести въ часъ. Очевидно, слѣд., что бассейнъ не можетъ быть наполненъ: задача невозможна въ томъ смыслѣ, въ какомъ она

предложена. Для истолкованія отрицательнаго рѣшенія, перемѣняемъ x въ уравненія задачи, и получаемъ.

$$-\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}, \text{ или } \frac{1}{x} = \frac{1}{c} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (1), \text{ откуда } x = \frac{1}{\frac{1}{c} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

Ур. (1) соответствуетъ слѣдующей задачѣ: бассейнъ наполняется краномъ, который, действуя отдельно, наполнилъ бы бассейнъ въ c часовъ; изъ одного крана, находящагося въ днѣ бассейна, одинъ бранчикъ открытъ, можетъ опорожнить бассейнъ въ a часовъ, а другой, действуя отдельно, въ b часовъ. Во сколько часовъ наполняется бассейнъ, вначалѣ пустой, если будутъ открыты оба три крана? Такимъ образомъ, для исправленія задачи слѣдуетъ предположить, что питающіе краны становятся опоражнивающими, и наоборотъ.

3) Если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, то $x = \frac{1}{0} = \infty$ и задача невозможна. Въ самомъ дѣлѣ, равенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ означаетъ, что количество воды, приносимой въ часъ обоими фонтанами, равно количеству воды, уносимой въ то же самое время краномъ, слѣд. бассейнъ никогда не можетъ наполниться. задача абсолютно невозможна.

Четвертый примѣръ изслѣдованія.

364. Какое число нужно прибавить къ четыремъ даннымъ числамъ a, b, c, d , чтобы составить критичную пропорцію?

Пусть некое число будетъ x ; ур. нѣе будетъ, очевидно:

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{c+x}{d+x} \dots (1);$$

рѣшая его, находимъ:

$$x = \frac{bc - ad}{(a+d) - (b+c)} \dots (2).$$

Члены искомой пропорціи суть:

$$a+x = \frac{(a-b)(a-c)}{a+d-(b+c)}; \quad b+x = \frac{(a-b)(b-d)}{a+d-(b+c)}; \quad c+x = \frac{(a-c)(c-d)}{a+d-(b+c)}; \quad d+x = \frac{(c-d)(b-d)}{a+d-(b+c)}.$$

Изслѣдованіе. Слѣдуетъ различать два главныхъ случая: знаменатели формулы x отличенъ отъ нуля, или же этотъ знаменатель равенъ нулю; и въ каждомъ изъ этихъ главныхъ случаевъ дѣлать возможные предположенія относительно числителя.

I. Если $a+d > b+c$ и при этомъ $bc > ad$, или же $a+d < b+c$ и при этомъ $bc < ad$, то для x найдемъ величину положительную, которою вопросъ рѣшается въ прямомъ смыслѣ.

II. Если $a+d > b+c$ и $bc < ad$, или же $a+d < b+c$ и $bc > ad$, то для x получится величина отрицательная, представляющая, очевидно, отнѣтъ на вопросъ, какое число нужно вычесть изъ чиселъ a, b, c и d , чтобы остатки образовали кратную пропорцію?

III. Если $a+d \geq b+c$, но $ad = bc$, то $x = 0$.

По условіе $ad = bc$ то же, что пропорція: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; откуда имѣемъ теорему: если четыре числа составляютъ пропорцію, то нѣтъ такого числа, которое, будучи придано къ каждому изъ нихъ, даде бы пропорцію.

IV. Если $a + d - b + c$ и $bc > ad$, то $x = \frac{m}{0} = \infty$ и задача невозможна, т. е. не существует конечного числа, рѣшающаго вопросъ. Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы четыре числа $a + x$, $b + x$, $c + x$, $d + x$ составляли пропорцію, необходимо, чтобы произведение крайнихъ равнялось произведению средних, т. е.

$$(a + x)(d + x) = (b + x)(c + x)$$

или

$$ad + (a + d)x = bc + (b + c)x.$$

Но, по условию, ad отлична отъ bc , а $a + d = b + c$, слѣд. ни при какомъ конечномъ значеніи x равенство невозможно.

V. Если, наконецъ, $a + d - b + c$ и $ad = bc$, то $x = \frac{0}{0}$, т. е. задача неопредѣлена. Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы четыре числа $a + x$, $b + x$, $c + x$ и $d + x$ составляли краткую пропорцію, необходимо, чтобы произведение крайнихъ равнялось произведению средних; т. е. какъ выше указано, чтобы

$$ad + (a + d)x = bc + (b + c)x;$$

но какъ $ad = bc$ и $a + d = b + c$, это уравненіе есть тождество, а потому удовлетворяется при всякомъ значеніи x неопредѣленность полная.

Неопредѣленность задачи при данныхъ условіяхъ можно обнаружить еще слѣдующимъ образомъ.

Изъ условия $a + d = b + c$ имѣемъ $d = b + c - a$; подставляя эту величину d въ другое условіе $ad = bc$ или $ad - bc = 0$, имѣемъ: $a(b + c - a) - bc = 0$, или

$$a^2 - a(b + c) + bc = 0, \text{ или } (a - b)(a - c) = 0.$$

Этому равенству можно удовлетворить двояко: или положивъ $a = b$, или $a = c$. При $a = b$, имѣемъ $d = c$, и искома пропорція беретъ видъ

$$\frac{a + x}{a + x} = \frac{d + x}{d + x},$$

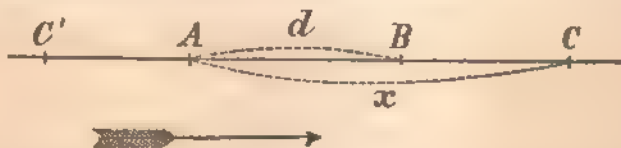
При $a = c$ имѣемъ $d = b$; и искома пропорція будетъ

$$\frac{a + x}{d + x} = \frac{a + x}{d + x}.$$

И та, и другая пропорціи ничто иное какъ тождества, и стало быть удовлетворяются при всякомъ x .

Пятый примѣръ изслѣдованія.

365. Задача о курьерахъ. Два курьера выѣхали въ одно время изъ мѣстъ А и В, расположеніе между которыми равно d верстамъ, и поѣхали равномерно въ направленіи АВ, при чемъ первый ѣдетъ v верстъ, второй v' верстъ въ часъ. Въ какомъ разстояніи отъ точки А они встрѣтятся?



Черт. 22.

Пусть точка встрѣчи находится на разстояніи x верстъ отъ А. Такъ какъ, по условію, курьеры выѣзжаютъ изъ точекъ А и В одновременно, то время, въ

которое первый проѣзжаетъ разстояніе AC , равно времени, въ которое второй проѣзжаетъ BC . Первый, дѣлая v верстъ въ часъ, проѣдетъ разстояніе $AC = x$ въ $\frac{x}{v}$ часовъ; второй, проѣзжая по v' верстъ въ часъ, на проѣздъ всего разстоянія $BC = x - d$, употребитъ $\frac{x-d}{v'}$ часовъ. Уравненіе будетъ

$$\frac{x}{v} = \frac{x-d}{v'} \dots (1)$$

откуда

$$x = d \times \frac{v}{v-v'} \dots (2).$$

Послѣдованіе. Замѣтивъ, что d , какъ разстояніе между двумя точками, есть величина положительная, могущая въ частіи-мъ случаи равняться нулю, заключаемъ, что между данными величинами могутъ быть слѣдующія соотношенія:

- 1) $d > 0, v > v'$; 2) $d > 0, v < v'$; 3) $d = 0, v \geq v'$; 4) $d > 0, v = v'$;
5) $d = 0, v = v'$.

I. Когда $d > 0$ и $v > v'$, оба члена дроби $\frac{dv}{v-v'}$ положительны, сл. и x есть величина *положительная*; кромѣ того, $x > d$, потому что d умножается на дробь $\frac{v}{v-v'}$ большую 1, ибо $v > v - v'$. Это положительное и большее d значеніе x означаетъ, что встрѣча курьеровъ произойдетъ вправо отъ точки В, т.е. оно даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ. II въ самомъ дѣлѣ, оба курьера выѣзжаютъ изъ точекъ А и В одновременно и догоняющіе ѣдутъ быстрее передняго ($v > v'$), слѣд. первый непременно догонитъ второго.

II. Когда $d > 0$ и $v < v'$, числитель $dv > 0$, а знаменатель $v - v' < 0$, слѣд. величина x *отрицательная*. Это отрицательное рѣшеніе указываетъ на то, что при данныхъ условіяхъ задача невозможна въ томъ смыслѣ, въ какомъ она предложена, т.е. что встрѣча не можетъ произойти въ направленіи АВ (вправо отъ В). Дѣйствительно, такъ какъ оба курьера выѣзжаютъ въ одно время и первый ѣдетъ медленнѣе второго, то они никогда не догонятъ послѣдняго.

Чтобы исправить задачу, подставимъ въ ур. (1) $-x$ вмѣсто x ; найдемъ

$$\frac{-x}{v} = \frac{-x-d}{v'} \text{ или } \frac{x}{v} = \frac{x+d}{v'} \dots (3).$$

Рѣшеніе уравненія (3) по абсолютной величинѣ таково же какъ и (1), но по знаку положительно, и потому даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ, соотвѣтствующій ур-нію (3). Но послѣднее можетъ служить алгебраическимъ выраженіемъ слѣдующихъ двухъ задачъ.

1. x есть разстояніе, проѣзжаемое курьеромъ А; $x + d$ — курьеромъ В, такъ что второй проѣзжаетъ d верстами больше перваго. Это возможно, если предположить, что оба ѣдутъ не въ направленіи АВ, а въ направленіи ВА, такъ что курьеръ, выѣзжающій изъ В, догоняетъ курьера, выѣзжающаго изъ А. Обозначивъ точку встрѣчи буквою С' и положивъ $AC' = x$, найдемъ ур. (3), котораго корни и будутъ служить отвѣтомъ на новую задачу.

Дѣйствительно, такъ какъ $v' > v$, то при движеніи въ направленіи ВА, курьеръ В и догонитъ курьера А въ некоторой точкѣ С', лежащей влѣво отъ А. Такимъ образомъ, для истолкованія отрицательнаго рѣшенія, мы измѣнили направленіе движенія курьеровъ.

2. Не легко видѣть, что ур. (3) можно также разсматривать какъ выраженіе условія задачи, отличающейся отъ данной не направленіемъ движенія а допущеніемъ, что движеніе имѣетъ мѣсто неопредѣл. время, и что встрѣча произойдетъ не въ будущемъ, а что она уже имѣла мѣсто раньше того момента, въ который курьеры проѣзжаютъ — одинъ черезъ А, а другой чрезъ В, въ некоторой

точек C' , отстоящей влево от A на $x = \frac{dv}{v' - v}$ верст. Что задача и в этом смысле возможна, прямо следует из того, что при $v' > v$, курьер B , догнав A в точке C , обгоняет последнего и идет впереди его.

III. Когда $d = 0$ и $v \geq v'$, то $x = \frac{0 \times v}{v - v'} = 0$.

Так как $d = 0$, то оба курьера выезжают из одного места, причем одновременно; но они идут с разными скоростями ($v \geq v'$), след. один постоянно будет впереди другого, так что никакая точка пути, кроме места выезда, не может быть их общим местом. Это и выражается решением $x = 0$.

IV. Когда $d > 0$, а $v = v'$, то $x = \frac{dv}{0} = \infty$.

Безконечное решение служить в данном случае признаком полной невозможности задачи, т. е. невозможности встречи курьеров. Действительно, они выезжают одновременно из двух разных точек и идут с одинаковою скоростью, понятно, что расстояние между ними всегда $= d$, и след. встреча их невозможна.

V. При $d = 0$ и $v = v'$

$$x = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}.$$

Это решение означает полную неопредѣленность задачи. Действительно, условия $d = 0$ и $v = v'$ означают, что курьеры выезжают из одного места (одновременно) и идут с одинаковою скоростью; очевидно, что они всегда будут вместе; каждая точка пути будет служить местом встречи.

Примечание. Если положить, что курьеры идут не в одну сторону, а навстрѣчу другъ другу, то направления скоростей будутъ противоположны; след. если одну из них, напр. v , будемъ считать положительною, то другую следуетъ принять за отрицательную; обозначивъ ее черезъ $-v'$, найдемъ

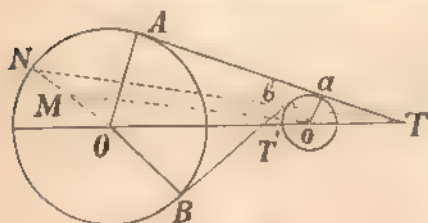
$$x = \frac{dv}{v - (-v')} = \frac{dv}{v + v'}.$$

Не трудно было бы вывести эту формулу и непосредственно. Заключаемъ, что формула (2) прилагается и къ этому случаю, а потому она — вполне общая.

Шестой примѣръ изслѣдованія.

366. Провести общую касательную къ двумъ кругамъ.

A. Проведение общей внешней касательной.



Черт. 23.

Пусть расстояние OT точки встречи общей внешней касательной съ линіей центровъ отъ центра O перваго круга будетъ x , радиусъ $OA = R$; $oa = R'$; $Oo = d$. Изъ подобія треугольниковъ OAT и oat находимъ пропорцію: $OT : oT = OA : oa$ или $x : (x - d) = R : R'$, откуда

$$x = \frac{d \cdot R}{R - R'} \dots (1).$$

Изслѣдованіе подраздѣляется на три главные случая, смотря по тому, будетъ ли знаменатель $R - R'$ положительнъ, отрицателенъ или равенъ нулю.

I. $R - R' > 0$, или $R > R'$. Величина x въ этомъ случаѣ положительна, конечна и $> d$, потому что $\frac{R}{R - R'} > 1$, а след. точка T находится на продолженіи

линии Oo . Сверх того, необходимо, чтобы $x > d + R'$, или $\frac{dR}{R-R'} > d + R'$. Такъ какъ $R - R' > 0$, то, умножая обѣ части на эту разность, мы не измѣнимъ знака неравенства, сѣд. $dR \geq (d + R')(R - R')$, откуда

$$d > R - R'.$$

Неравенство удовлетворяется, когда: 1) круги расположены одинъ вѣ другомъ, не имѣя общихъ точекъ, ибо тогда $d >$ даже $R + R'$; 2) круги имѣютъ внѣшнее касаніе; 3) они пересѣкаются. Равенство же удовлетворяется при внутреннемъ касаніи; въ послѣднемъ случаѣ $x = \frac{(R-R')R}{R-R'} = R$, и точка T совпадаетъ съ точкою касанія круговъ.

Когда $R' = 0$, т.-е. малая окружность сводится къ своему центру, условіе возможности приводитъ къ $d < R$, а $x = d$, — результаты сами собою понятныя.

II. $R - R' < 0$, или $R < R'$. Въ этомъ случаѣ x отрицателенъ, слѣдовательно точка T находится влѣво отъ O . Въ этомъ случаѣ безпечно повторить изслѣдованіе, приведенное выше; ибо для опредѣленія различныхъ положеній точки T , очевидно, достаточно перевернуть предыдущій чертежъ, такъ чтобы меньшій кругъ помѣщался влѣво отъ большаго.

III. $R - R' = 0$, или $R = R'$, т.-е. оба круга равны. При этомъ возможны слѣдующіе случаи:

а) Если $d > 0$, $x = \frac{dR}{0} = \infty$, т.-е. точка T удаляется въ безконечность. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ линіи OA и oa равны и параллельны, слѣдоват. прямая Aa $\perp Oo$ и не встрѣчается ес. Безконечное рѣшеніе означаетъ, такимъ образомъ, параллельность общей касательной линіи центровъ. Разсматривая попросту съ другой точки зрѣнія, можно замѣтить, что если бы радиусы, будучи сначала неравными, различіе бы незначительно, точка T находилась бы на очень большомъ разстояніи отъ точки O , и что если радиусы будутъ стремиться къ равенству, разстояніе OT будетъ неопредѣленно возростать, слѣд. когда радиусы будутъ строго равны, точка T удалится въ безконечность и $x = \infty$.

б) Если, при $R - R' = 0$, и $d = 0$, тогда $x = \frac{0}{0}$, и задача становится дѣйствительно неопредѣленною. Въ самомъ дѣлѣ, оба круга имѣютъ въ этомъ случаѣ одинъ центръ и равные радиусы, сл. они сливаются; ни линія Aa , ни Oo не имѣютъ въ такомъ случаѣ опредѣленнаго положенія, а потому и точка ихъ встрѣчи абсолютно неопредѣлена.

в) Наконецъ, если $R - R' = 0$, x также принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. Неопредѣленность — опять дѣйствительная, и легко объясняется: оба круга сводятся къ своимъ центрамъ, линія Aa сливается съ Oo и точка T можетъ быть взята произвольно на линіи Oo .

Построеніе. Формула (1) даетъ пропорцію: $(R - R') : R = d : x$, изъ которой видно, что x есть четвертая пропорциональная къ тремъ линіямъ $R - R'$, R и d . Проведя произвольный радиусъ OM въ кругъ центра O , откладываемъ на немъ линію $NM = R$; получимъ $OM = R = R'$. Соединивъ точку M съ o , проводимъ линію $NT \parallel Mo$; точка T будетъ требуемая. Проведя изъ нея касательную TA къ кругу O , убѣдяся, что эта линія касается и круга o .

В. Проведеніе общей внутренней касательной.

Обозначивъ разстояніе OT' буквою x , изъ подобія треугольниковъ $OB'T'$ и $ob't'$ имѣемъ: $\frac{x}{R} = \frac{d - x}{R'}$, откуда

$$x = \frac{dR}{R + R'} \dots (2).$$

Изслѣдованіе. Такъ какъ $\frac{R}{R + R'} < 1$, то всегда $x < d$, т.-е. точка T' находится между центрами. Кроме того, разстояніе точки T' отъ O не должно

быть $< R$, т.-е. должно имѣть $dR \geq R$, откуда $d \geq R + R'$, т.-е. окружности должны быть одна внѣ другой. Въ крайнемъ случаѣ, т.-е. при внѣшнемъ касаніи, $d = R + R'$, и $x = R$, т.-е. точка T' совпадаетъ съ точкою касанія круговъ.

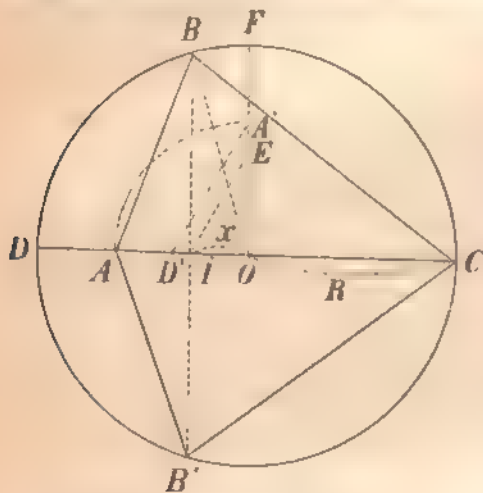
Когда $R' = 0$, $x = d$, т.-е. точка T' совпадаетъ съ центромъ o , къ которому, въ данномъ случаѣ, приводится второй кругъ.

Наконецъ, если $R = R' = 0$, $x = 0$, точка T' неопредѣленная, и въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ прямая At совпадаетъ съ линіей центровъ.

Построеніе аналогично предыдущему.

Седьмой примѣръ изслѣдованія.

367. Въ точку A , данной внутри круга бильярда, помѣщенъ упругій шарикъ. Въ какомъ направленіи нужно его пустить, чтобы, отразившись три раза отъ бортовъ, онъ возвратился снова въ точку A ?



Черт. 24

По закону отраженія, уголъ паденія равенъ углу отраженія, при чемъ угломъ паденія будетъ уголъ, составленный направленіемъ паденія (напр. AB) съ радиусомъ, проведеннымъ въ точку B , а угломъ отраженія—уголъ, образуемый направлениемъ отраженного движенія (BC) съ тѣмъ же радиусомъ. Зная это, и замѣчая, что фигура расположена симметрично относительно диаметра DC , проходящаго черезъ точку A , усматриваемъ, что задача приводится къ слѣдующей: съ какомъ направленіи надо пустить шарикъ A , чтобы, отразившись отъ бортовъ, онъ ударился въ конечную точку C диаметра DC ?

Пусть $OC = R$, $OA = a$, B — искомая точка; проведемъ хорду BB' перпендикулярно къ диаметру DC , замѣчаемъ, что какъ скоро извѣстно будетъ разстояние O этой хорды отъ центра, то будетъ извѣстно и

положеніе искомой точки B . Поэтому за неизвѣстное принимаемъ $Ol = x$. Углы: паденія ABO , и отраженія— CB' , равны, слѣд. OB есть биссектриса угла ABC треугольника ABC , по свойству ея, имѣемъ пропорцію:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{OC},$$

возвысивъ обѣ части въ квадратъ, находимъ:

$$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{a^2}{R^2};$$

затѣмъ, на основаніи теоремъ о квадратѣ стороны треугольника, имѣемъ:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot Ol = a^2 + R^2 - 2a \cdot x;$$

$$BC^2 = OC^2 + OB^2 - 2OC \cdot Ol = R^2 + R^2 - 2R \cdot x;$$

подставивъ эти величины въ предыдущую пропорцію, находимъ:

$$\frac{a^2 + R^2 - 2ax}{2R^2 - 2Rx} = \frac{a^2}{R^2} \dots (1)$$

изъ этого уравненія, по сокращеніи сначала на R , а затѣмъ на $R - a$, имѣемъ:

$$x = \frac{R(R - a)}{2a}.$$

Рѣшеніе задачи. Такъ какъ $a < R$ (точка A находится внутри круга O), то выражение даетъ для x всегда величину положительную; но для вѣрности задачи этого недостаточно, необходимо еще, чтобы было $x \leq R$, или

$$\frac{R(R - a)}{2a} \leq R, \text{ откуда } a \geq \frac{R}{3}.$$

Такъ, чтобы задача была возможна, нужно, чтобы a имѣло величины въ промежуткѣ между R и $\frac{R}{3}$; слѣд. задача невозможна, когда шарикъ A находится въ кругу, концентричнаго билларду и описаннаго радиусомъ, равнымъ трети радиуса билларда.

Поскольку a измѣняется непрерывно отъ R до $\frac{R}{3}$, x измѣняется непрерывно отъ 0 до R ; въ частности:

при $a = R$, $x = 0$: шарикъ опишетъ половину контура квадрата;

при $a = \frac{R}{2}$, $x = \frac{R}{2}$: шарикъ опишетъ полупериметръ равносторонняго треугольника;

при $a = \frac{R}{3}$, $x = R$, шарикъ опишетъ діаметръ DC .

Построеніе. Формула x даетъ пропорцію:

$$a : \frac{R}{2} = (R - a) : x,$$

такъ что нужно построить четвертую пропорциональную къ тремъ линіямъ: a , $\frac{R}{2}$ и $R - a$. Взявъ на діаметрѣ OF , перпендикулярномъ къ OA , часть $OA' =$

$OA = a$, и $OE = \frac{R}{2}$, затѣмъ на діаметрѣ DC часть $OD' = AD = R - a$, соединимъ точки D' и A' и черезъ точку E проведемъ линію EI параллельную $A'D'$: эта линія и дастъ искомую точку I . Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треугольниковъ $A'OD'$ и EOI имѣемъ:

$$OA' : OE = OD' : OI, \text{ или } a : \frac{R}{2} = (R - a) : OI, \text{ откуда и видно, что } OI = x$$

Обобщеніе задачи. Когда шарикъ A находится внѣ круга, напр. въ A' (черт. 25) задача будетъ возможна, если удалить матеріальную полуокружность EDG , обращенную своею выпуклостью къ шарiku. Въ самомъ дѣлѣ, въ такомъ случаѣ шарикъ A' можетъ удариться въ такую точку B другой половины круга, что по отраженіи попадетъ въ точку C , а слѣдовательно отсюда, по симметрии

Рѣшеніе. Ищемъ, нѣтъ ли на линіи центровъ точки, удовлетворяющія требованію задачи. Если такая точка существуетъ, то пусть она будетъ M ; въ такомъ случаѣ касательныя MA и MA' равны. Примемъ за неизвѣстное разстояніе точки M отъ центра O , положивъ $OM = x$; будетъ $MO' = d - x$. Прямоугольные треугольники AOM и $A'O'M$ дадутъ: $AM^2 = R^2 - x^2$, $A'M^2 = (d - x)^2 - r^2$; по условію,

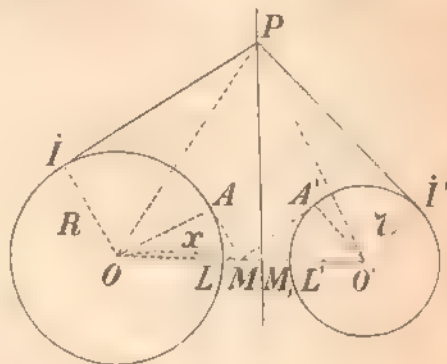
$$x^2 - R^2 = (d - x)^2 - r^2,$$

откуда

$$x = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d} \dots (1).$$

Этой формулой и опредѣляется разстояніе искомой точки отъ центра круга O .

Ищемъ, нѣтъ ли также въ линіи центровъ точекъ, удовлетворяющихъ требованію задачи. Пусть одна изъ такихъ точекъ будетъ P . Опустивъ перпендикуляръ PM , на линію цент-



Черт. 26.

ровъ. Пусть точка P будетъ найдена, какъ скоро будутъ извѣстны радиусы R и r , перпендикуляръ PM , отъ центра O и отръзокъ MP , показывающій разстояніе точки P отъ линіи центровъ. Пусть $OM = x'$ и $PM = y$. Проведемъ касательныя PA и PA' , линіи PO , PO' , OO' и $O'P$, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ въ POA и $PO'A'$ найдемъ: $PA^2 = PO^2 - R^2$, или, какъ $PO^2 = x'^2 + y^2$, т. е. $R^2 = x'^2 + y^2 - R^2$. Подобно этому, найдемъ $PA'^2 = (d - x')^2 + y^2 - r^2$. По требованію задачи, имѣемъ уравненіе

$$x'^2 + y^2 - R^2 = (d - x')^2 + y^2 - r^2, \text{ откуда } x' = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d} \dots (2)$$

Сравненіе (1) со (2) показываетъ, что $x = x'$, т. е. что всякая точка искомага геометрическаго мѣста принадлежитъ въ точку M , а это значитъ, что всѣ искомыя точки находятся на одной и той же прямой — на перпендикулярѣ къ линіи центровъ, разстояніе котораго отъ центра O опредѣляется формулою $\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}$.

Этотъ перпендикуляръ и есть, сдѣд., *геометрическое мѣсто точекъ* плоскости, что касательныя, проведенныя изъ каждой къ даннымъ кругамъ, равны между собою.

Исслѣдованіе. I. *Данные круги неравны между собою, и пусть $R > r$.* Разберемъ задачу для всякихъ относительныхъ положеній данныхъ круговъ

1) $d > R + r$: круги лежатъ одинъ внѣ другого, не имѣя общихъ точекъ. Сравнимъ x съ R : не будетъ ли, напр., $x > R$? Отвѣтъ найдемъ, испытавъ, вѣрно ли будетъ неравенство

$$\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d} > R.$$

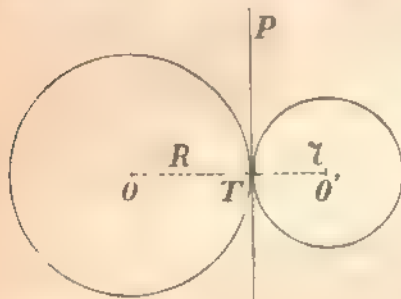
Умноживъ отъ знаменателя, легко найдемъ: $d^2 - R^2 - r^2 > 2dR$, или $d^2 - 2dR + R^2 > r^2$, или $(d - R)^2 > r^2$, откуда $d - R > r$, и, наконецъ, $d > R + r$. Это преобразованіе приводило къ неравенству, эквивалентному предшествующему, такъ какъ послѣднее совпадаетъ съ условіемъ, которое намъ дано, то заключаемъ, что испытываемое соотношеніе вѣрно, и $x > R$. Сравнимъ теперь x съ отръзкомъ $d - r$, или $d - r$, и посмотримъ, не будетъ ли $x < d - r$, т. е. испытаемъ неравенство

$$\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d} < d - r.$$

Послѣдовательно имѣемъ: $d^2 - 2dr + r^2 > R^2$, или $(d-r)^2 > R^2$, откуда $d-r > R$, и наконецъ, $d > R+r$ — что намъ дано. заключаемъ, что радикальная ось проходитъ между данными кругами, пересѣкаетъ дугу центровъ на отрезкѣ LL' .

Остается рассмотреть, къ какому изъ обоихъ круговъ она ближе, и для этого надо сравнить LM_1 съ $L'M_1$, или $x=R$ съ $d-x=r$. Не будетъ ли, напр., $x=R < d-x=r$, или, что то же, $2x < d+R-r$, или, наконецъ, $d^2 + R^2 - r^2 < d + R - r$?

Проверка этого неравенства приводится къ проверкѣ неравенства $d^2 + R^2 - r^2 < d^2 + d(R-r)$, или $(R+r)(R-r) < d(R-r)$, или $R+r < d$, а это намъ дано. Итакъ:



Черт. 27.

Когда круги лежатъ одинъ вѣтъ другому, не имѣя общихъ точекъ, то радикальная ось не проходитъ между обоими кругами, ближе къ большему кругу.

2) $d=R+r$: круги имѣютъ внешнее касаніе.

Поставивъ въ формулу (1) $R+r$ вмѣсто d , найдемъ

$$x=R.$$

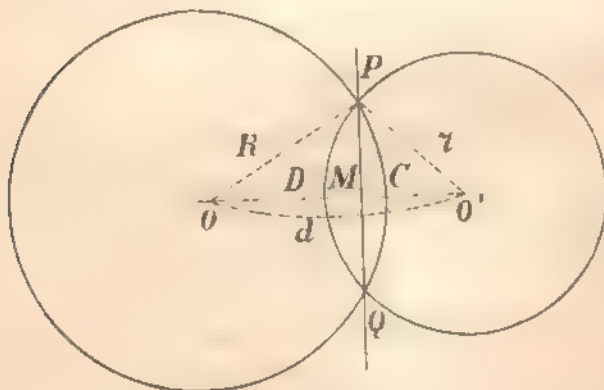
Это значитъ, что въ данномъ случаѣ радикальная ось отстоитъ отъ центра круга O на разстояніе = его радиусу. Слѣдовательно:

Въ случаѣ внешнего касанія радикальная ось совпадаетъ съ общою внутреннею касательною изъ данныхъ круговъ.

3) $R-r < d < R+r$: круги пересѣкаются.

Въ треугольникѣ OPO' имѣемъ: $r^2 = R^2 + d^2 - 2d \cdot OM$, откуда

$$OM = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}.$$



Черт. 28.

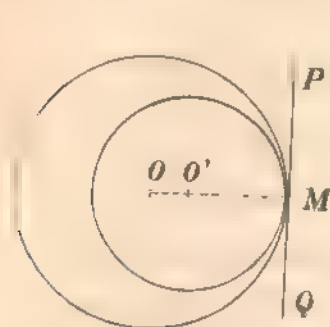
Сравнивая это выраженіе съ (1), находимъ: $x=OM$. Слѣдовательно, въ данномъ случаѣ радикальная ось совпадаетъ съ общою хордою круговъ, что можно было предвидѣть, ибо точки P и Q , очевидно, принадлежатъ искомому мѣсту.

4) $d = R - r$: круги имѣютъ внутреннее касаніе.

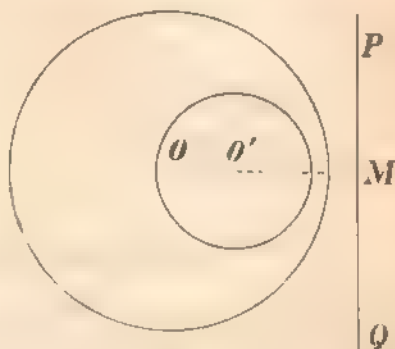
Вводя $R - r$ вмѣсто d въ формулу (1), находимъ

$$x = R,$$

Заключаемъ, какъ и во 2-мъ случаѣ, что *радикальная ось совпадаетъ съ общою касательною данныхъ круговъ*.



Черт. 29.



Черт. 30.

5) $d < R - r$: меньшій кругъ находится внутри большаго, не имѣя съ нимъ общихъ точекъ.

Въ этомъ случаѣ опять имѣемъ $x > R$: въ самомъ дѣлѣ, проверка неравенства $R < \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}$ приводитъ послѣдовательно къ: $r^2 < (R - d)^2$, $r < R - d$, $d < R - r$, а это намъ дано. Въ разсматриваемомъ случаѣ, значить, *рад. ось расположена внѣ обоихъ круговъ*. Здѣсь само собою очевидно, что она ближе къ большому кругу.

Такимъ образомъ, въ двухъ послѣднихъ случаяхъ, когда одинъ кругъ находится внутри другого, замѣчаемъ, что рад. ось не встрѣчаетъ расстоянія центровъ, т. е. отрезка OO' , а пересекаетъ линію центровъ на продолженіи его, при чемъ разстояніе точки M отъ O , бывшее сначала $= R$, дѣлается затѣмъ $> R$: значить, точка пересѣченія M движется въ направленіи воображаемой точки, которая перемѣщалась бы отъ центра большаго круга къ центру меньшаго.

6) $d = 0$: окружности концентричны. Находимъ

$$x = \frac{R^2 - r^2}{0} = \infty,$$

т. е. по мѣрѣ сближенія центровъ x растетъ, рад. ось болѣе и болѣе удаляется вправо, и при $d = 0$ отбрасывается въ безконечность.

II. Пусть круги равны между собою: $R = r$. Формула (1) даетъ

$$x = \frac{d}{2}.$$

Значить, *рад. ось перпендикулярна къ разстоянію центровъ въ его срединѣ*.

Если при этомъ положить $d = 0$, то окружности совпадутъ, при этомъ $x = 0$. Значить, что рад. ось проходить чрезъ общій центръ, и положеніе ея ничѣмъ болѣе не предѣляется; неопредѣленность эта очевидна, ибо изъ какой бы точки ни възяли кругъ въ немъ провести касательную къ одному кругу, она вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ касательна и къ другому.

Частные случаи. 1) Если круг r обращается в точку, $r = 0$, то

$$x = \frac{d^2 + R^2}{2d}:$$

по условию задачи, эта формула определяет расстояние от O проекции такой точки M , чтобы было

$$\overline{AM}^2 = \overline{MO}^2, \text{ или } \overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO}^2, \text{ или } \overline{MO}^2 - \overline{MO}^2 = R^2,$$

след., рад. ось круга O и точка O' есть геометрическое место таких точек, что разность квадратов их расстояний от центра данного круга и от данной точки O' равна квадрату R^2 .

2) Если $r = 0$ и $R = 0$, тогда $x = \frac{d}{2}$, т.-е. радикальная ось двух точек O и O' есть перпендикуляр в средине прямой OO' .

Девятый примеръ исследования.

369. Тѣло, состоящее изъ двухъ призмъ, сложенныхъ равными основаниями, погружено въ ванну, состоящую также изъ двухъ жидкостей, находящихся одна поверхъ другой. Спрашивается, въ какомъ разстояніи надъ поверхностью разделяющей жидкостей находится площадь соприкосновения призмъ? Плотности и высоты призмъ равны въ верхней призме D и H , въ нижней D' и H' , плотность верхней жидкости равна d , нижней d' .

Пусть требуемая высота будетъ x . По закону Архимеда: „вѣсъ плавающего тѣла равенъ вѣсу вытѣсненной жидкости“. Зная это и припоминая, что $P = U \cdot Dq$ (здѣ P — вѣсъ тѣла, U — его объемъ, D — плотность и q — вѣсъ кубической единицы воды), мы, обозначивъ буквою S площадь основания каждой призмы, имѣемъ уравненіе

$$S(HD + H'D') = S(H + x)d + S(H' - x)d', \dots (1)$$

откуда

$$x = \frac{H(d - D) + H'(d' - D')}{d' - d}.$$

Исследование. Величина x можетъ быть или положительною, или отрицательною: если она положительна, то можетъ быть рѣшеніемъ предложенной задачи, если же отрицательна, то дастъ отвѣтъ на слѣдующій вопросъ „въ какомъ разстояніи подъ поверхностью, . . .“?

Съ другой стороны, никогда количество x , по абсолютной величинѣ, не можетъ быть больше

H' , если x положительно,

и

H , если x отрицательно:

иначе тѣло не погружалось бы заразъ въ обѣ жидкости, и ур—ніе (1) не было бы уже уравненіемъ задачи.

Наконецъ, по законамъ равновѣсія жидкостей, d' не можетъ быть меньше d , такъ что относительно знаменателя можетъ быть только два предположенія: $d' - d > 0$ и $d' - d = 0$. Итакъ:

I. $d' - d > 0$. При этомъ относительно числителя возможны 3 предположенія:

1) $H(d - D) + H'(d' - D') > 0$. Въ этомъ случаѣ, для того чтобы величина x дѣйствительно служила рѣшеніемъ задачи, необходимо, чтобы она была $< H'$, след., нужно чтобы

$$H(d - D) + H'(d' - D') < H'(d' - d),$$

т.-е.

$$HD + H'D' \geq (H + H')d.$$

2) $\Pi(d-D) + \Pi'(d'-D) < 0$. Въ этомъ случаѣ x отрицателенъ, и для того, чтобы онъ служилъ рѣшеніемъ задачи, необходимо чтобы абсолютная величина его была $\leq H$, т.-е. чтобы

$$-\frac{\Pi(d-D) + \Pi'(d'-D)}{d'-d} \leq H,$$

или

$$HD + H'D' \leq (H + H')d'.$$

3) $\Pi(d-D) + \Pi'(d'-D) = 0$. Въ такомъ случаѣ $x = 0$, и площадь соприкосновения призмы совпадаетъ съ поверхностью раздѣла жидкостей.

II. $d' - d = 0$. Если при этомъ числитель не $= 0$, то $x = \frac{m}{0}$: эта форма означаетъ дѣйствительную невозможность: тѣло не можетъ быть въ равновѣсіи внутри жидкостей.

Если же $HD + H'D' = d(\Pi + \Pi')$, то $x = \frac{0}{0}$. Эта форма означаетъ дѣйствительную неопредѣленность: такъ и должно быть, ибо въ данномъ случаѣ тѣло будетъ въ равновѣсіи въ какомъ угодно положеніи.

ГЛАВА XXVI.

Исслѣдованіе уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

Исслѣдованіе двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными въ общемъ видѣ. — Примѣры исслѣдованія буквенныхъ вопросовъ.

370. Рѣшая два уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными

$$\left. \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned} \right\}$$

мы нашли формулы:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad \text{и} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \quad (1)$$

предполагая, что коэффиціенты a и a' , или b и b' отличны отъ нуля, и что при этомъ $ab' - ba'$ отлично отъ нуля. Иѣль исслѣдованія заключается въ томъ, чтобы показать, во всѣхъ ли случаяхъ эти формулы дадутъ рѣшенія уравній, или же, напротивъ, есть такіе случаи, когда онѣ непримѣнимы.

Мы должны рассмотреть два случая, смотря по тому, будетъ ли знаменатель въ формулахъ x и y . 1) отличенъ отъ нуля, или 2) равенъ нулю, при чемъ или одинъ изъ числителей, или оба — равны нулю.

Это раздѣленіе основывается на слѣдующихъ свойствахъ биномовъ $ab' - ba'$, $cb' - bc'$ и $ac' - ca'$.

Первое свойство. Если коэффиціенты при одномъ и томъ же неизвѣстномъ, или свободные члены c и c' не равны нулю одновременно, и если два изъ биномовъ $ab' - ba'$, $cb' - bc'$ и $ac' - ca'$, равны нулю, то и третій равенъ нулю.

Пусть $cb' - bc' = 0$ и $ac' - ca' = 0$; отсюда $cb' = bc'$ и $ac' = ca'$: переключивъ эти равенства, найдемъ $ab'cc' - a'b'cc'$, или $(ab' - a'b)cc' = 0$; если c и c' не равны нулю, то должно быть $ab' - a'b = 0$. Если же $c = 0$, въ такомъ случаѣ, по условію, $c' \leq 0$; а потому изъ равенствъ $cb' = bc'$ и $ac' = ca'$ имѣемъ: $a = 0$,

$b = 0$, и слѣд. $ab' - ba' = 0$. Вслѣдствие того, что всѣ три бинорма симметричны относительно a , b и c , это свойство доказано, какіе бы два бинорма ни были равны нулю.

Второе свойство. Условия необходимые и достаточныя для того, чтобы два изъ этихъ бинормовъ были нулями, а третій былъ бы отличенъ отъ нуля, состоятъ въ томъ, чтобы булассныя количества, общія этимъ двумъ бинормамъ, были нулями.

Очевидно, что этихъ условий достаточно, затѣмъ, если имѣемъ $cb' - bc' = 0$, $ac' - ca' = 0$, и $ab' - ba' \geq 0$, то равенства дадутъ: $cc'(ab' - ba') = 0$, а слѣд. $cc' = 0$. Пусть $c = 0$, тогда $bc' = 0$ и $ac' = 0$, а потому и $c' = 0$; ибо, положивъ $c \leq 0$, $b = 0$ и $a = 0$, нашли бы $ab' - ba' = 0$, что противно условію: $ab' - ba' \leq 0$.

371. I. Общій знаменатель $ab' - ba'$ отличенъ отъ нуля.

Въ томъ случаѣ система ур—ній имѣетъ конечное и определенное рѣшеніе, представляемое формулами (1).

Въ самомъ дѣлѣ, эти рѣшенія составляютъ систему эквивалентную тапшон, потому что дѣлитель $ab' - ba'$ не есть нуль.

Въ случаѣ, когда числитель $ac' - ca'$ равенъ нулю, что возможно при одномъ изъ трехъ условий: если $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, или если $a = 0$ и $c = 0$; или $c = 0$ и $c' = 0$ (предположеніе $a = 0$ и $a' = 0$ повело бы къ $ab' - ba' = 0$, что противно условію), замѣчаемъ, что y обращается въ нуль; а при третьей группѣ условий, именно при $c = 0$ и $c' = 0$, и x дѣлается нулемъ.

Примечаніе. Въ силу второго свойства, условия необходимыя и достаточныя для того, чтобы оба неизвѣстныхъ были нулями. $x = 0$ и $y = 0$, суть $c = 0$ и $c' = 0$.

Итакъ, когда общій знаменатель $ab' - ba'$ отличенъ отъ нуля, система имѣетъ конечное определенное рѣшеніе; при томъ или оба неизвѣстныхъ будутъ положительны, или оба отрицательны, или одно положительно, а другое отрицательно; наконецъ, или одно, или оба могутъ быть нулями. Последнее имѣетъ мѣсто только въ томъ исключительномъ случаѣ, когда свободные члены — оба нули.

Положительныя рѣшенія въ большинствѣ случаевъ даютъ прямой отвѣтъ на вопросъ, отрицательныя же или служатъ признакомъ невозможности заданн. или неправильной постановки ея. Истолкованіе отрицательныхъ рѣшеній основано на теоремѣ, аналогичной той, которая была доказана для ур—ній съ однимъ неизвѣстнымъ.

372. Теорема. Двѣ системы двухъ ур—ній съ двумя неизвѣстными, отличающіяся только знакомъ при одномъ или при обоихъ неизвѣстныхъ, имѣютъ рѣшенія, равныя по абсолютной величинѣ, но различающіяся знаками — для техъ неизвѣстныхъ, знаки при которыхъ въ обычныхъ системахъ различны; и рѣшенія, одинаковыя по величинѣ и по знаку — для неизвѣстныхъ, предшествующихъ общимъ знакамъ въ обычныхъ системахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, сравнимъ системы:

$$\left. \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned} \right\} (1) \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} ax - by &= c \\ a'x - b'y &= c' \end{aligned} \right\} (2)$$

различающіяся только знакомъ при y ; докажемъ, что эти системы имѣютъ одинаковое рѣшеніе для x , и рѣшенія, равныя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знаку, для y .

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $y = z$, система (2) обратится въ

$$\left. \begin{aligned} ax + bz &= c \\ a'x + b'z &= c' \end{aligned} \right\} (2').$$

Замѣчая, что система (2') ничѣмъ не отличается отъ (1), заключаемъ, что рѣшенія системы (1): x' и y' удовлетворяютъ и (2'); такъ что система (2') имѣетъ рѣшенія: $x = x'$ и $y = y'$; или, такъ какъ $x' = -y'$, то (2'), а потому и (2) имѣетъ рѣшенія:

$$x = x', \quad y = -y'.$$

Примѣръ. Куплено нѣсколько аршинъ материи по определенной цѣнѣ. Если бы было куплено 3 аршинами больше, а за аршинъ было заплачено 1 руб. меньше, то на всю покупку издержали бы 11 рублями меньше. Если же было бы куплено 8 аршинами меньше, а за аршинъ платили бы 2 рублями дороже, то издержали бы 12 рублями больше. Сколько аршинъ куплено и сколько платили за аршинъ?

Пусть было куплено x арш. по y руб. за аршинъ. Получаемъ ур-нiя:

$$(x + 3)(y - 1) = xy - 11$$

$$(x - 8)(y + 2) = xy + 12;$$

откуда

$$x = -10; \quad y = -6.$$

Слѣд. задача невозможна въ томъ смыслѣ, какъ она дана.

Подставивъ въ ур-нiя, — x вмѣсто x , и — y вмѣсто y , найдемъ:

$$(x - 3)(y + 1) = xy - 11$$

$$(x + 8)(y - 2) = xy + 12;$$

которыя, на осн. доказанной теоремы, удовлетворяютъ рѣшенія: $x = 10$, $y = 6$. Они служатъ прямыми отвѣтами на слѣдующую задачу:

„Куплено нѣкоторое число аршинъ материи по определенной цѣнѣ. Если бы было куплено тремя аршинами меньше, а за аршинъ было заплачено 1 рублемъ дороже, то на всю покупку издержали бы 11 руб. меньше. Если же было бы куплено 8-ю аршинами больше, а за аршинъ платили бы 2 рублями меньше, то издержали бы 12 рублями больше. Сколько аршинъ куплено и сколько платили за аршинъ?“

373. II. Общій знаменатель $ab' - ba' = 0$, а одинъ изъ числителей, напр.

$$cb' - bc' \geq 0.$$

Равенство $ab' - ba' = 0$ можетъ имѣть мѣсто при слѣдующихъ обстоятельствахъ:

$$1) \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \quad 2) a = 0, b = 0; \quad 3) a = 0, a' = 0.$$

Предположеніе $b = 0$, $b' = 0$, обращающее также въ нуль бинаомъ $ab' - ba'$, слѣдуетъ устранить, потому что при немъ обращается въ нуль и числитель $cb' - bc'$, по условію, неравнiй нулю.

Первый случай. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. Оба неизвѣстныя представляются въ этомъ случаѣ

въ видѣ $\frac{m}{0}$ или ∞ :

$$x = \infty, \quad y = \infty.$$

Итакъ, что безконечныя рѣшенія представляютъ единственно возможное рѣшеніе системы въ рассматриваемомъ случаѣ.

Такимъ образомъ нужно доказать, что въ данномъ случаѣ уравненія не допускаютъ никакихъ рѣшеній; а затѣмъ, что безконечныя рѣшенія дѣйствительно удовлетворяютъ системѣ.

Изъ условія $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ имѣемъ: $a = \frac{ab'}{b}$; подставивъ въ первое ур., находимъ:

$$\frac{a'b}{b'}x + by = c, \text{ или } a'x + b'y = \frac{cb'}{b}.$$

Но второе ур. есть

$$a'x + b'y = c';$$

по условію же $cb' - bc' \geq 0$, откуда $\frac{cb'}{b} \geq c'$.

Отсюда видно, что система состоитъ изъ двухъ ур-ній, которыхъ первая части одинаковы, между тѣмъ какъ вторыя неравны; очевидно, следовательно, что всякія конечныя значения x и y , обращающія въ тождество одно изъ уравненій, не могутъ обратить въ тождество и другое. Такия ур-нія, которыя не имѣютъ общихъ конечныхъ рѣшеній, называютъ *несовмѣстными* (противорѣчащими одно другому).

Покажемъ теперь, что безконечныя значения x и y удовлетворяютъ системѣ, и для этого рассмотримъ два случая, смотря по тому, имѣютъ ли коэффиценты a и b одинаковые знаки, или противоположные.

Пусть a и b имѣютъ одинаковые знаки; пусть, при этомъ, $cb' - bc' > 0$, и $ab' - ba'$, уменьшаясь, стремится къ нулю; въ такомъ случаѣ

$$x = +\infty.$$

Умноживъ обѣ части неравенства $cb' - bc' > 0$ на $\frac{a}{b}$ — количество положительное, получимъ $\frac{ab'c}{b} > ac'$; но $\frac{ab'}{b} = a'$, слѣд. $a'c > ac'$, или $ac' - a'c < 0$; поэтому

$$y = -\infty.$$

Замѣтивъ, что $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$, видимъ, что a' и b' также имѣютъ одинаковые знаки; слѣд., подставивъ въ ур-нія вмѣсто x и y ихъ величины, найдемъ

$$a \cdot \infty - b \cdot \infty = c$$

$$a' \cdot \infty - b' \cdot \infty = c',$$

т. е.

$$\infty - \infty = c \text{ и } \infty - \infty = c',$$

что возможно, потому что разность двухъ безконечностей можетъ быть какою угодно количествомъ.

Если a и b имѣютъ противоположные знаки, напр. $a > 0$ и $b < 0$, то, оставивъ остальные предположенія безъ измѣненія, найдемъ

$$x = +\infty.$$

Умноживъ обѣ части неравенства $cb' - bc' > 0$ на $\frac{a}{b}$, количество положительное, получимъ: $-\frac{ab'c}{b} > -ac'$; но $\frac{ab'}{b} = a'$, слѣд. $-a'c > -ac'$, или $ac' - a'c > 0$; а потому и

$$y = -\infty.$$

Замѣтивъ, что a' и b' имѣютъ противоположные знаки, подставивъ вмѣсто x и y ихъ значенія, получимъ:

$$a \cdot \infty - (-b) \cdot \infty = c,$$

$$a' \cdot \infty - (-b') \cdot \infty = c',$$

или $\infty - \infty = c$ и $\infty - \infty = c'$, — тождества.

Второй случай $a=0, b=0$. И въ этомъ случаѣ: $x=\infty$ и $y=\infty$; значения эти принадлежатъ уравнениямъ. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя, имѣемъ:

$$0 \cdot \infty + 0 \cdot \infty = c \\ a' \cdot \infty + b' \cdot \infty = c'.$$

И произведеши $0 \cdot \infty$ есть символъ неопредѣленности, сл. первое равенство не можетъ разсматривать какъ тождество. Что касается второго, первая часть его есть разность двухъ безконечностей; ибо

$$x = \frac{cb}{0}, \text{ а } y = \frac{-ca}{0},$$

откуда

$$a'x + b'y = a'b'c \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{0} \right),$$

и равенство $a'b'c(\infty - \infty) = c$, есть тождество.

Съ другой стороны, очевидно, что всякая иная система значений x и y не можетъ соответствовать ур-мъ:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = c \text{ и } a'x + b'y = c'.$$

Третій случай. $a=0, a'=0$. Формулы x и y принимаютъ видъ.

$$x = \frac{cb' - bc'}{0} = \infty; \quad y = \frac{0}{0}.$$

Итакъ, x безконеченъ, а y неопредѣленъ. И въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что никакая система конечныхъ значений x и y не можетъ удовлетворить уравнениямъ

$$0 \cdot x + by = c, \quad 0 \cdot x + b'y = c',$$

ибо по условію $\frac{c}{b} \leq \frac{c'}{b'}$.

Съ другой стороны, если вмѣсто x поставимъ ∞ , то какъ $0 \cdot \infty$ изображаетъ количество неопредѣленное, усматриваемъ, что существуетъ безчисленное множество значений y , удовлетворяющихъ заразѣ предыдущимъ уравнениямъ, въ которыхъ $0 \cdot x$ замѣненъ количествами α и α' , лишь бы производныя количества c и c' удовлетворяли соотношенію: $\frac{c-\alpha}{b} = \frac{c'-\alpha'}{b'}$.

Примѣчаніе I. Если кромѣ $a=0$ и $a'=0$ было бы и $b=0$, y имѣло бы опредѣленную величину $\frac{c}{b}$, ибо тогда слѣдовало бы положить $a=c$ и $a'=0$.

Примѣчаніе II. Въ разсмотрѣнныхъ трехъ случаяхъ, если уравненія вытекаютъ изъ условій задачи, нужно еще разсмотрѣть, можетъ ли быть истолковано ихъ алгебраическое рѣшеніе уравненій, если да — это будетъ единственно возможнымъ рѣшеніе задачи; если нѣтъ — задача *невозможна*; невозможность эта, во всякомъ случаѣ, будетъ зависѣть отъ несовѣстности данныхъ между собою и съ условіями. Потому-то и говорить, какъ и по отношенію къ ур-мъ съ 1 неизвѣстными, что символъ ∞ есть признакъ невозможности задачи.

374. III. Знаменатель и оба числителя — нули.

$$ab' - a'b = 0, \quad cb' - c'b = 0, \quad ac' - a'c = 0.$$

Эти равенства могутъ имѣть мѣсто при слѣдующихъ обстоятельствахъ:

$$1) \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}; \quad 2) a=0, b=0, c=0; \quad 3) a=0, a'=0, cb'-bc'=0.$$

Первый случай. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Значения x и y берут видъ

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

Неопредѣленность эта — дѣйствительная. Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ общую величину равныхъ отношеній буквою k , т.-е. положивъ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, имѣемъ отсюда: $a = a'k$, $b = b'k$, $c = c'k$; подставивъ въ первое ур., получимъ

$$k(a'x + b'y) = kc' \quad \text{или} \quad a'x + b'y = c'.$$

Такимъ образомъ, первое ур-іе ничѣмъ не отличается отъ второго, такъ что въ сущности два неизвѣстныхъ связаны однимъ уравненіемъ, которое принимаетъ безчисленное множество рѣшеній: неопредѣленность дѣйствительная. Однако же, значения x и y не исполнѣ произвольны, такъ какъ, въ силу того, что они связаны уравненіемъ $a'x + b'y = c$, произвольному значенію одного неизвѣстнаго соответствуетъ исполнѣ опредѣленное значеніе другого.

Примѣчаніе. Если бы было $c=0$, а потому и $c'=0$, x и y были бы неопредѣленны, какъ и прежде, съ тѣмъ отличіемъ, что отношеніе ихъ $\frac{y}{x}$ сохраняло бы постоянную величину, равную $-\frac{a'}{b'}$; что прямо видно изъ уравненія $a'x + b'y = 0$, къ которому въ этомъ случаѣ приводятся оба ур-нія

Второй случай. $a=0$, $b=0$, $c \neq 0$. Въ этомъ случаѣ

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

Но первое ур. обращается въ тождество $0=0$, слѣд. система сводится къ одному ур-нію съ двумя неизвѣстными, неопредѣленность дѣйствительная.

Третій случай. $a=0$, $a'=0$, $cb'-bc'=0$. Оба неизвѣстныхъ опять принимаютъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, а система

$$0 \cdot x + by = c, \quad 0 \cdot x + by = c',$$

показываетъ, что x въ самомъ дѣлѣ неопредѣленъ, но $y = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$, т.-е. имѣетъ видъ опредѣленную величину. Но что противорѣчіе между результатами, получаемыми изъ формулъ для неизвѣстныхъ и результатами, непосредственно вытекающими изъ уравненій, только кажущееся; оно зависитъ отъ того, что дроби, дающая значеніе y :

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab - ba'}$$

въ данномъ случаѣ содержитъ въ числитель и знаменатель общаго множителя, обращающагося въ нуль при данныхъ предположеніяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, вынесъ за скобки въ числитель c , а въ знаменатель b , имѣемъ

$$y = \frac{c}{b} \cdot \frac{\frac{ac'}{c} - a'}{\frac{ab}{b} - a'};$$

но изъ условія $cb' - bc' = 0$ имѣемъ $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$; слѣд.

$$y = \frac{c}{b} \frac{ab' - a'b}{ab' - a'b} = \frac{c}{b}$$

Если бы $cb - bc' = 0$ имѣли вслѣдствіе предположеній $b = 0$, $b' = 0$, то нашли бы $x = \frac{c}{b}$, $y = \infty$; эти рѣшенія отвѣчали бы ур—мъ, ибо, какъ $0 \cdot \infty$ есть символъ неопредѣленности, то равенства

$$0 + 0 \cdot \infty = c \text{ и } 0 + 0 \cdot \infty = c'$$

суть тождества.

375. Примѣчаніе. Раскрытіе неопредѣленности дроби, принимающей видъ $\frac{0}{0}$ при частныхъ значеніяхъ нѣсколькихъ буквъ, въ нее входящихъ, можно дѣлать еще слѣдующимъ приемомъ. Если дробь $\frac{A}{B}$, въ составъ которой входятъ количества x, y, z, \dots принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$ при $x=a, y=b, z=c, \dots$ то, положивъ

$$x = a + h, \quad y = b + ph, \quad z = c + qh, \dots$$

подставляютъ эти величины въ числит. и знам. и, сокративъ дробь, полагаютъ $h = 0$: тогда и получится истинное значеніе дроби $\frac{A}{B}$ при $x=a, y=b, z=c, \dots$. Оно можетъ быть или опредѣленно или неопредѣленно, см. по тому, будетъ ли независимо отъ p, q, \dots или же, послѣ всевозможныхъ упрощеній, будетъ еще содержать одно или нѣсколько изъ этихъ количествъ, располагая которыми произвольно, можно дать дроби какую угодно величину.

Такъ, мы видимъ, что при $a=0, a' = 0$ и $cb' - bc' = 0$, дроби

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \text{ и } y = \frac{ac - ca'}{ab' - ba'}$$

принимаютъ видъ $\frac{0}{0}$. Полагаемъ

$$a = h, \quad a' = ph, \quad c' = \frac{cb'}{b} + b'qh;$$

находимъ

$$x = \frac{bh'q}{bp - b'}$$

слъ x истинно неопредѣленъ, потому что, выбирая известнымъ образомъ p и q , можно ему давать произвольныя значенія.

Для y находимъ

$$y = \frac{h \left(\frac{cb'}{b} - b'qh \right) - cph}{hb - b'ph}; \text{ сокративъ на } h, \text{ а потомъ положивъ } h=0:$$

$$\frac{c(b - b'p)}{b(b - b'p)} = \frac{c}{b} \text{ — величину вполне опредѣленную.}$$

376. Сдѣланное изслѣдованіе можно резюмировать такъ: система двухъ уравнений первой степени съ двумя неизвѣстными имѣетъ одно рѣшеніе конечное или бесконечное, если изъ трехъ биномовъ

$$ab' - ba', \quad cb' - bc', \quad ac' - ca'$$

одинъ обращается въ нуль не болѣе одного: рѣшеніе неопредѣленно, если два изъ нихъ составляютъ нулями, за исключеніемъ случая, когда: $c = 0, c' = 0$.

Приводимъ нѣсколько задачъ съ полнымъ изслѣдованіемъ.

Первый примѣръ изслѣдованія.

377. Два курьера поутъ равномерно и въ одну сторону, отъ R' къ R , по прямой дѣл, со скоростями u и v ; въ данный моментъ одинъ находится въ Λ , другой въ Λ' , въ разстояніяхъ $OA = d$ и $OA' = d'$ отъ точки O . Спрашивается въ какомъ разстояніи отъ точки O и черезъ сколько часовъ отъ данного момента произойдетъ встрѣча?



Черт. 31.

Пусть встрѣча произойдетъ въ будущемъ, т.-е. вправо отъ A' на разстояніи отъ O , равномъ $OR = x$, и черезъ t часовъ отъ данного момента. Уравненія для x и t будутъ слѣдующія. $OR = OA + AR$, $OR = OA' + A'R$ или

$$\left. \begin{aligned} x &= d + vt \\ x &= d' + vt \end{aligned} \right\} (1).$$

Если допустить, что встрѣча имѣетъ мѣсто между O и Λ , въ некоторой точкѣ R' , т.-е. вправо отъ O , но до того момента, когда курьеры пройдутъ—одинъ черезъ Λ , другой черезъ Λ' , то уравненія, при сохраненіи прежнихъ обозначеній, будутъ: $OR' = OA - RA$, $OR' = OA' - R'A$, или

$$\left. \begin{aligned} x &= d - vt \\ x &= d' - vt \end{aligned} \right\} (2).$$

Такъ какъ эта система отличается отъ первой знакомъ при t , то заключимъ обратно, что если система (1) даетъ положительное рѣшеніе для x и отрицательное для t , это служитъ признакомъ того, что встрѣча имѣла мѣсто вправо отъ O , но раньше данного момента, и что время, протекшее съ встрѣчи до этого момента равно абсолютной величинѣ отрицательнаго рѣшенія.

Наконецъ положимъ, что встрѣча имѣла мѣсто въ точкѣ R'' , влѣво отъ точки O ; уравненія, при сохраненіи прежнихъ обозначеній, будутъ: $R''O = R''A - OA$, $R''O = R''A' - OA'$, или $x = vt - d$, $x = vt - d'$, или

$$\left. \begin{aligned} -x &= d - vt \\ -x &= d' - vt \end{aligned} \right\} (3).$$

Эта система выводится изъ (1) переменною x на $-x$ и t на $-t$. Слѣдовательно, обратно, если система (1) даетъ отрицательныя значенія для x и t , это будетъ признакомъ того, что встрѣча имѣла мѣсто влѣво отъ O , въ разстояніи, равномъ абсолютной величинѣ x , и что время, протекшее отъ момента встрѣчи, равно абсолютной величинѣ t .

378. Исследование. После этого предварительного исследования рѣшаемъ систему (1):

$$x = \frac{rd - dv'}{v - v'}, \quad t = \frac{d' - d}{v - v'}.$$

Дѣлаемъ всевозможныя предположенія относительно общаго знаменателя; эти предположенія суть:

$$v > v', \quad v = v', \quad v < v'.$$

При этомъ, такъ какъ числители могутъ получать какія угодно величины, разложимъ каждый изъ предыдущихъ случаевъ на три другіе случая:

$$d' > d, \quad d' = d, \quad d' < d.$$

Отсюда уже вытекаютъ опредѣленные предположенія относительно другаго числителя: $vd' - v'd$.

Въ самомъ дѣлѣ, если при $v > v'$ возьмемъ $d > d'$, то отсюда необходимо вытекаетъ, что $vd' > v'd$, но не можетъ быть: ни $vd' = v'd$, ни $vd' < v'd$. Но если при $v > v'$ взять $d' < d$, то другой числитель даетъ три возможныхъ предположенія

$$vd' > v'd, \quad vd' = v'd, \quad vd' < v'd.$$

Поступая такимъ образомъ, получаемъ слѣдующую таблицу всевозможныхъ комбинацій, въ числѣ тринадцати:

$$\begin{array}{l} v > v' \left\{ \begin{array}{l} d' > d \\ d = d' \\ d' < d \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} vd' > dv' \\ vd > dv \\ vd > dv \\ vd' = dv' \\ vd < dv \end{array} \right. \\ \\ v = v' \left\{ \begin{array}{l} d' > d \\ d = d' \\ d' < d \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} vd' > dv' \\ vd = dv' \\ vd' < dv' \end{array} \right. \\ \\ v < v' \left\{ \begin{array}{l} d' > d \\ d = d' \\ d' < d \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} vd' < dv' \\ vd' = dv' \\ vd < dv' \\ vd < dv' \\ vd' < dv' \end{array} \right. \end{array}$$

Исследуемъ поочередно каждый изъ этихъ случаевъ.

Первый случай. $v > v', d' > d, vd' > dv'$.

Формулы для неизвестныхъ даютъ конечныя, опредѣленныя и положительныя значения для x и t , означающія, что встрѣча будетъ имѣть мѣсто въ будущемъ (время отъ даннаго момента) и, слѣд., вправо отъ точки О и отъ А.

Этотъ результатъ можно было предвидѣть въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $v > v'$, т. е. движущійся курьеръ влѣтъ скорѣе передняго, слѣд. долженъ необходимо встрѣтиться съ нимъ вправо отъ А.

Второй случай. $v > v', d' = d, vd' > dv'$.

Формулы даютъ

$$x = d; \quad t = 0.$$

Это значитъ, что встрѣча имѣетъ мѣсто въ данный моментъ, что совершенно очевидно. Въ самомъ дѣлѣ, при $d = d'$ оба курьера въ рассматриваемый моментъ находятся въ одной точкѣ (напр. А), а какъ $v > v'$, т.-е. скорости ихъ неравны, то они только въ этотъ моментъ и будутъ вмѣстѣ, а затѣмъ одинъ будетъ постоянно впереди другого.

Третій случай. $v > v'$, $d' < d$, $vd' > dv'$.

Формулы даютъ:

$$x > 0, \quad t < 0.$$

Положительное значеніе x показываетъ, что встрѣча имѣетъ мѣсто вправо отъ 0; отрицательное t означаетъ, что она произошла *раньше* того момента, когда одинъ курьеръ проѣзжаетъ черезъ А, другой черезъ А', въ нѣкоторой точкѣ R' (подставивъ въ систему (1) вмѣсто t . . . $-t$, находимъ систему (2), относящуюся къ точкѣ R').

Это можно видѣть изъ условий, при помощи чертежа.



Черт. 32.

Такъ какъ $d' < d$, то курьеръ, идущій со скоростью v' , находится въ данный моментъ ближе другого къ точкѣ 0; $v > v'$, сл. курьеръ, идущій со скоростью v , долженъ былъ встрѣтить другого *раньше* данного момента, т.-е. влѣво отъ точки А'; затѣмъ, неравенство $vd' > dv'$ даетъ

$$\frac{d'}{v'} > \frac{d}{v},$$

а это значитъ, что курьеръ (v') идетъ d' перстъ большее время, чѣмъ курьеръ (v) проѣзжаетъ d перстъ; значитъ послѣдній проѣхалъ черезъ точку 0 послѣ перваго, и какъ въ данный моментъ онъ обогналъ перваго, то и долженъ былъ встрѣтить его вправо отъ точки 0.

Четвертый случай. $v > v'$, $d' < d$, $vd' = dv'$.

Формулы даютъ: $x = 0$, $t < 0$.

Эти рѣшенія означаютъ, что встрѣча имѣла мѣсто въ точкѣ 0 *раньше* рассматриваемого момента. И въ самомъ дѣлѣ, равенство $vd' = dv'$ даетъ

$$\frac{d'}{v'} = \frac{d}{v},$$

т.-е. времена, употребленные на прохожденіе разстояній ОА' и ОА, равны (предыд. черт.), слѣд. оба курьера прошли черезъ точку 0 въ одинъ и тотъ же моментъ.

Пятый случай. $v > v'$, $d' < d$, $vd' < dv'$.

Формулы даютъ: $x < 0$, $t < 0$.

Рѣшенія эти означаютъ, что встрѣча имѣла мѣсто *раньше* данного момента и влѣво отъ точки 0 (см. систему (3) уравнений).

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ курьеръ, находящійся впереди, въ А, ($d > d'$) движется съ большою скоростью ($v > v'$), — то встрѣча уже имѣла мѣсто. Затѣмъ, изъ неравенства $vd' < dv'$ имѣемъ: $\frac{d'}{v'} < \frac{d}{v}$, а это значитъ, что курьеръ, идущій скорѣе, прошелъ черезъ точку 0 *раньше* другого, слѣд. встрѣча его съ другимъ уже была влѣво отъ точки 0.

Шестой случай. $v=v'$, $d'>d$, $vd'>dv'$.

Формулы дают: $x=\infty$, $t=\infty$.

Эти решения служат признаком действительной невозможности. В самом деле, в данный момент курьеры находятся в различных точках, скорости же их движения равны, след. расстояние между ними всегда будет одинаково, и потому они не могут встретиться.

Седьмой случай. $v=v'$, $d'=d$, $vd'=dv'$.

Формулы дают: $x=0$, $t=0$:

неопредѣленность действительная; въ чемъ не трудно убѣдиться и изъ самыхъ условий. Въ самомъ дѣлѣ, въ данный моментъ курьеры находятся вѣстѣ ($d=d'$), идутъ они съ одинаковою скоростью ($v=v'$), след. постоянно они будутъ находиться вѣстѣ.

Восьмой случай. $v=v'$, $d'<d$, $vd'<dv'$.

Формулы даютъ: $x=\infty$, $t=\infty$, что объясняется такимъ же точно образомъ, какъ и въ случаѣ шестомъ.

Десятый случай. $v<v'$, $d'>d$, $vd'>dv'$.

Формулы даютъ: $x<0$, $t<0$.

Рѣшенія эти означаютъ, что встрѣча уже имѣла мѣсто влѣво отъ 0 (черт. 33).



Черт. 33.

Изъ этого убѣждаемся разсужденіями, аналогичными приведеннымъ въ пятомъ случаѣ.

Двадцатый случай. $v<v'$, $d'>d$, $vd'=dv'$.

Формулы даютъ: $x=0$, $t<0$.

Это значитъ, что встрѣча имѣла мѣсто въ точкѣ 0; въ чемъ убѣждаемся такимъ же образомъ, какъ и въ четвертомъ случаѣ.

Одиннадцатый случай. $v<v'$, $d'>d$, $vd'<dv'$.

Формулы даютъ: $x>0$, $t<0$.

Встрѣча имѣла мѣсто вправо отъ точки 0, но раньше истощенію момента. Объясненіе то же самое, что для третьяго случая.

Двадцатый случай. $v<v'$, $d'=d$, $vd'<dv'$.

Формулы даютъ: $x=d-d'$; $t=0$.

Встрѣча имѣла мѣсто въ настоящій моментъ. Какъ и во второмъ случаѣ.

Тринадцатый случай. $v<v'$, $d'<d$, $vd'<dv'$.

Формулы даютъ величины конечныя, опредѣленныя и положительныя, слѣд. встрѣча имѣетъ мѣсто въ будущемъ. Какъ въ первомъ случаѣ.

379. Приложение. Уравненія

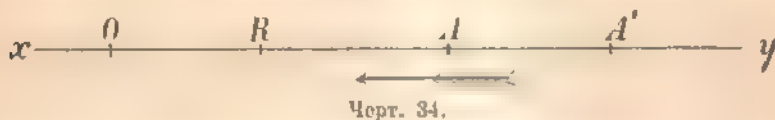
$$\left. \begin{aligned} x &= d + vt \\ x &= d' + v't \end{aligned} \right\} (A)$$

были выведены въ томъ предположеніи, что оба курьера идутъ въ одну сторону, а именно въ направленіи отъ x къ y . Легко видѣть, что эти же уравненія могутъ служить и для другихъ задачъ, аналогичныхъ первой, если только условиться x , d , v и t разумѣть отрицательными количества, если направленіе движенія будетъ отъ y къ x , а d и d' отрицательными числами, если линии OA и OA' будутъ находиться влѣво отъ 0.

Такъ напр., если курьеры будутъ по направленію отъ y къ x , и при составленіи уравненій мы допустимъ, что точка встрѣчи R лежитъ вправо отъ O , то уравненія будутъ

$$\left. \begin{aligned} x &= d - vt \\ x &= d' - v't \end{aligned} \right\} (B).$$

Очевидно, что ту же задачу можно выразити и уравненіями (A), если только подъ буквами v и v' въ системѣ (A) разумѣть отрицательныя числа.



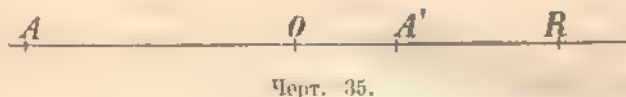
Если бы курьеръ, выѣзжающій изъ A , ехалъ въ направленіи xy , а выѣзжающій изъ A' — въ направленіи yx , мы имѣли бы слѣдующее

$$\left. \begin{aligned} x &= d + vt \\ x &= d' + v't \end{aligned} \right\} (C).$$

Въ то же время мы могли бы имѣть также систему (A), разумѣя въ ней подъ v' — количество отрицательное.

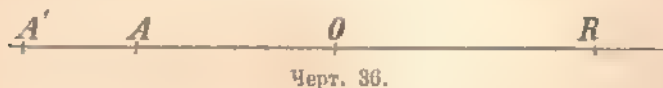
Точки A и A' , въ которыхъ находились курьеры въ настоящий моментъ, помѣщались вправо отъ точки O ; задача будетъ еще общѣе, если дать этимъ точкамъ всякія угодно положенія на линіи xy , считая d и d' положительными, когда эти точки расположены вправо отъ O , и отрицательными, если точки A и A' находятся лѣво отъ O .

Такимъ образомъ, разумѣя подъ d и d' абсолютныя количества, для чертежа (36) найдемъ уравненія



$$\left. \begin{aligned} x &= -d + vt \\ x &= -d' + v't \end{aligned} \right\} (D).$$

А для чертежа (36) уравненія



$$\left. \begin{aligned} x &= -d + vt \\ x &= -d' + v't \end{aligned} \right\} (E).$$

Очевидно, что система (A) можетъ замѣнить собою каждую изъ системъ (D) и (E), если только въ первомъ случаѣ будемъ разумѣть въ системѣ (A) подъ d число отрицательное, а во второмъ — условимся подъ d и d' разумѣть отрицательныя числа.

Итакъ, уравненія

$$\left. \begin{aligned} x &= d + vt \\ x &= d' + v't, \end{aligned} \right\}$$

имѣюща рѣшеніями:

$$x = \frac{vd' - dv'}{v - v'}, \quad t = \frac{d - d'}{v - v'}$$

служать выраженіемъ слѣдующей совершенно общей задачи:

Два курьера бѣгутъ равномерно по прямой со скоростями, равными, по величинѣ и по знаку, количествамъ v и v' , въ данный моментъ они находятся отъ точки O , лежащей на этой прямой, въ разстояніяхъ, изображаемыхъ, по величинѣ и по знаку, буквами d и d' . Найти разстояніе точки O до точки встрѣчи, и время встрѣчи.

При этомъ, разстоянія считаются положительными — вправо отъ O , отрицательными — влево отъ O ; скорости — положительными въ направленіи xy , отрицательными въ направленіи yx ; времена — положительными, когда они слѣдуютъ за даннымъ моментомъ, отрицательными — когда предшествуютъ этому моменту.

Числовой примѣръ. Два курьера, бѣдущіе равномерно по прямой, находятся въ данный моментъ, одинъ въ точкѣ A , отстоящей отъ O влево на 20 верстъ, другой въ A' въ разстояніи, равномъ 35 верстамъ, вправо отъ O . Они движутся навстрѣчу другъ другу, первый со скоростью 4, а второй 6 верстъ въ часъ. Определить разстояніе точки встрѣчи отъ O и время встрѣчи.

Для рѣшенія задачи нужно только въ формулы

$$x = \frac{vd' - dv'}{v - v'}, \quad t = \frac{d - d'}{v - v'}$$

поставить, вмѣсто d число — 20, вмѣсто d' число + 35; замѣнить $v = 4$ вмѣсто v и $v' = 6$ вмѣсто v' . Найдемъ:

$$x = 2 \text{ вер.}; \quad t = 4 \text{ час. } 30 \text{ мин.}$$

Значитъ, точка встрѣчи находится вправо отъ O на 2 версты, а время встрѣчи равно 4 час. 30 мин. отъ данного момента.

Второй примѣръ изслѣдованія.

380. Изъ сплава серебря, пробы которыхъ равны соответственно a и b , составить p фунтовъ новаго сплава пробы c . Сколько фунтовъ нужно взять отъ каждого сплава?

Пусть отъ перваго сплава нужно взять x , отъ втораго y фунтовъ. По условію, имѣемъ уравненіе

$$x + y = p. \quad (1).$$

Въ одномъ фунтѣ перваго сплава находится a золотниковъ чистаго серебра, слѣд въ x фунтахъ его будетъ ax зол.; въ y фунтахъ втораго сплава by зол.; слѣд въ $x + y$ или въ p фунтахъ новаго сплава содержится $ax + by$ зол., а въ одномъ фунтѣ $\frac{ax + by}{p}$ зол. чистаго серебра, что равно c ; потому второе ур.

будетъ

$$ax + by = cp. \quad (2).$$

Рѣшивъ уравненія (1) и (2), найдемъ

$$x = \frac{c - b}{a - b} \cdot p, \quad y = \frac{a - c}{a - b} \cdot p.$$

ИЗЪСЛѢДОВАНІЕ. По свойству вопроса, x и y не могутъ быть ни безконечными, ни отрицательными, потому рѣшенія такого рода будутъ служить признакомъ абсолютной невозможности задачи при тѣхъ условіяхъ, которыя ведутъ къ

решениямъ этого рода. Въ этомъ и заключается особенность рассматриваемой задачи, изъ всѣхъ значений x и y , какия допускаютъ найденныя формулы для этихъ количествъ, слѣдуетъ удерживать только значения конечныя, опредѣленныя и положительныя.

Относительно общаго знаменателя возможны 3 предположенія:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Каждое изъ этихъ предположеній соединяемъ со всевозможными предположеніями касательно одного изъ числителей, напр., первого:

$$c > b, \quad c = b, \quad c < b.$$

Относительно второго числителя нужно дѣлать такія предположенія, которыя были бы сообразны съ прежде взятыми. Такъ, если возьмемъ предположеніе $a > b$ и $c > b$, то это можно сочетать съ какою-либо изъ трехъ возможныхъ предположеній относительно другого числителя, $a > c$, $a = c$, $a < c$. Но если взять комбинацію $a = b$ и $c > b$, то ее можно соединить только съ предположеніемъ $a = c$, такъ какъ c , будучи больше b , не можетъ быть ни равна, ни меньше количества a , равнаго b . Такимъ путемъ мы получаемъ слѣдующую таблицу изслѣдованій:

$$\begin{aligned} a > b & \left\{ \begin{array}{l} c > b \\ c = b \\ c < b \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a > c \\ a = c \\ a < c \end{array} \right. \\ a = b & \left\{ \begin{array}{l} c > b \\ c = b \\ c < b \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a < c \\ a = c \\ a > c \end{array} \right. \\ a < b & \left\{ \begin{array}{l} c > b \\ c = b \\ c < b \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a < c \\ a = c \\ a < c \end{array} \right. \end{aligned}$$

Первый случай. $a > b, c > b, a > c$.

Формулы даютъ для x и y рѣшенія конечныя, опредѣленныя и положительныя, слѣд. задача возможна. Это слѣдуетъ и изъ условий въ самомъ дѣлѣ, проба c искомаго сплава, по условию, больше нижней пробы b , но меньше верхней пробы a ; очевидно, такой сплавъ всегда можно составить.

Второй случай. $a > b, c > b, a = c$.

Формулы даютъ: $x = y, y = 0$.

Это значитъ, что въ y фунтовъ должны быть взяты отъ сплава пробы a , и ничего не нужно брать отъ сплава пробы b . Это очевидно а priori, ибо проба c составляемаго сплава должна равняться, по условию, пробѣ a .

Третій случай. $a > b, c > b, a < c$.

Формулы даютъ: $x > 0, y < 0$.

Заключаемъ, что задача невозможна. Это видно а priori въ самомъ дѣлѣ, проба требуемаго сплава должна быть больше не только нижней пробы b , но и верхней a данныхъ сплавовъ; очевидно, что сплавляя послѣдніе, нельзя получить пробы c .

Четвертый случай. $a > b, c = b, a > c$.

Формулы дают: $x = 0, y = p$.

Это значит, что все p фунтов должны быть взяты от сплава пробы b , что очевидно, ибо искомый сплав и должен иметь пробу b (условие $c < b$).

Пятый случай. $a > b, c < b, a > c$.

Формулы дают: $x < 0, y > 0$.

Отрицательное значение x указывает на невозможность задачи. И в самом деле, задача невозможна, потому что проба искомого сплава должна быть меньше не только a , но и меньшей пробы b одного из данных сплавов.

Шестой случай. $a = b, c > b, a < c$.

Формулы дают: $x = \infty, y = \infty$.

Задача невозможна, и в самом деле, составляющие сплавы — одинаковой пробы ($a = b$), проба же требуемого сплава c должна быть больше пробы $a = b$, что невозможно.

Седьмой случай. $a = b = c$.

Формулы дают: $x = \frac{0}{0}, y = \frac{0}{0}$.

Это значит, что задача неопределенна, в том смысле, что можно взять число фунтов, не превышающее p , от одного из данных сплавов, а остальную до p часть из другого. Результат будет очевиден & priori, потому что все три сплава — одинаковой пробы.

Восьмой случай. $a = b, c < b, a > c$.

Формулы дают: $x = \infty, y = \infty$.

Задача невозможна, как и в шестом случае.

Девятый случай. $a < b, c > b, a < c$.

Формулы дают: $x = 0, y = 0$; отрицательное значение x указывает на невозможность задачи, подобно пятому случаю.

Десятый случай. $a < b, c = b, a < c$.

Формулы дают: $x = 0, y = p$, как в четвертом случае.

Одиннадцатый случай. $a < b, c < b, a > c$.

Формулы дают: $x = 0, y = 0$; задача невозможна, как и в третьем случае.

Двенадцатый случай. $a < b, c < b, a = c$.

Формулы дают: $x = p, y = 0$, как и во втором случае.

Тринадцатый случай. $a = b, c < b, a < c$.

Формулы дают: для x и y величины конечны, определенные и положительны. Задача, след., возможна, как в первом случае.

Третий приём исследования.

381. В треугольнике ABC , которого основание равно b , а высота h , вписан прямоугольник данного периметра $2p$.

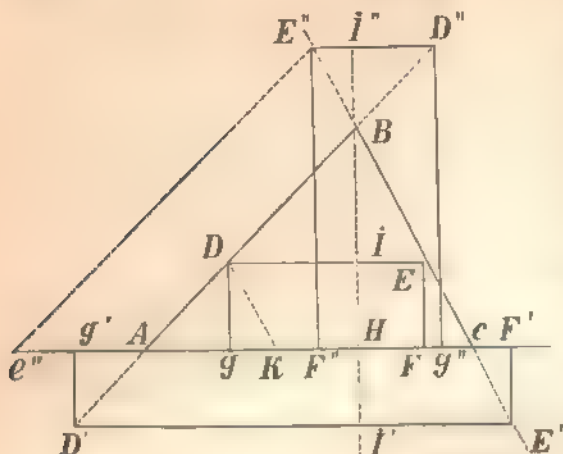
Треугольник называется *вписанным* в треугольник, когда две его стороны лежат на одной стороне треугольника, а две другие вершины лежат на сторонах, таков прямоугольник $DEFG$. Если же эти две стороны лежат не на самых сторонах, а на их продолжениях, то такой треугольник называют *вне-вписанным*, таковы прямоугольники $DEFG'$.

Внутренний вписанный прямоугольник.

382. Пусть задача решена и $DEFG$ есть требуемый прямоугольник; озна-

чимъ сторону DE буквою x , сторону EF буквою y , основание AC буквою b , высоту BH треугольника буквою h . Во-первыхъ имѣемъ ур—ніе

$$x + y = p \dots (1)$$



Черт. 37.

Въ подобныхъ треугольникахъ ABC и BDE основания относятся какъ высоты, следовательно

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BI}{BH}$$

или

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \dots (2)$$

Рѣшая ур—нія (1) и (2), находимъ

$$x = \frac{b(h-p)}{h-b}$$

$$y = \frac{h(p-b)}{h-b} \dots (3)$$

Изслѣдованіе. Во-первыхъ замѣтимъ, что x и y не могутъ быть одновременно отрицательными, потому что сумма ихъ, въ силу ур—нія (1), равна положительному количеству p , но одно изъ этихъ количествъ можетъ быть отрицательнымъ; причемъ отрицательныя значенія x или y , въ такомъ случаѣ, не могутъ быть отбрасываемы, какъ невозможныя, но подлежатъ истолкованію слѣдующимъ образомъ.

Если для y получается отрицательное рѣшеніе, и слѣд. для x положительное, то для истолкованія этого отрицательнаго рѣшенія перемѣнимъ въ уравненіяхъ (1) и (2) y на $-y$; найдемъ:

$$x - y = p, \quad \frac{x}{b} = \frac{h+y}{h} \dots (m)$$

Первое изъ этихъ уравненій означаетъ, что дается не сумма сторонъ прямоугольника, а *разность* между его основаниемъ и высотой. Второе уравненіе отвѣчаетъ прямоугольнику D'E'F'G', котораго основаніе D'E' находится подъ основаніемъ AC треугольника; въ самомъ дѣлѣ, назвавъ D'E' буквою x и E'F' буквою y , изъ подобія треугольниковъ D'BE' и ABC прямо находимъ ур—ніе (m). Впрочемъ, непосредственно видно, что высота IH этого прямоугольника имѣетъ, по отношенію къ AC, положеніе противоположное, высотѣ BH перваго прямоугольника. Итакъ, отрицательное значеніе для y соответствуетъ слѣдующему видоизмѣненію даннаго вопроса: *построить вѣтъ вписанный прямоугольникъ, котораго вѣтъ и стороны находились бы на продолженіяхъ сторонъ BA и BC треугольника подл его основаніемъ, если известна разность между основаніемъ и высотой прямоугольника.*

Рѣшеніе, соответствующее этому новому условію, будемъ называть рѣшеніемъ *второго рода*, называя рѣшеніе въ точномъ смыслѣ даннаго вопроса рѣшеніемъ *перваго рода*.

Если отрицательное рѣшеніе получится для x , то для истолкованія его перемѣнимъ въ уравненіяхъ (1) и (2) x на $-x$; найдемъ:

$$y - x = p, \quad \frac{-x}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \text{или} \quad \frac{x}{b} = \frac{y-h}{h} \dots (n)$$

Первое изъ этихъ уравненій означаетъ, что дается *разность* между высотой и основанием некоего прямоугольника. Второе уравненіе отвѣчаетъ прямоугольнику $P'E''F''G''$, котораго основаніе $P'E''$ находится надъ вершиною В треугольника; въ самомъ дѣлѣ, сохранивъ прежнія обозначенія, изъ подобія треугольниковъ $P'DE'$ и ABC тотчасъ находимъ уравненіе (и). Выразимъ, къ такому истолкованію отрицательнаго значенія x можно придти еще такимъ образомъ, проектируя сторону $E'D'$ на линію основанія треугольника посредствомъ прямой $E''e''$, параллельной AB , замѣчаемъ, что отрезокъ Ae'' имѣетъ положеніе отрицательнаго x (положительные x -сы DE и $D'E'$, проектированные подобнымъ же образомъ на AC , займутъ положеніе вправо отъ точки А). Итакъ, всякій разъ, когда будетъ получаться для x отрицательное значеніе, мы его будемъ истолковывать какъ рѣшеніе слѣдующаго вопроса: *построить анти-антисимный прямоугольникъ, котораго высота превысила бы основаніе на p , и дать вершины котораго лежали бы на продолженіяхъ сторонъ AB и CB за вершину треугольника*. Назовемъ это рѣшеніе *рѣшеніемъ третьяго рода*.

Послѣ этого подготовительнаго изслѣдованія, составляемъ таблицу возможныхъ случаевъ, какіе могутъ представить формулы x и y . Во-первыхъ, относительно общаго знаменателя этихъ формулъ можно сдѣлать три предположенія: $h > b$, $h = b$, $h < b$. Каждое изъ этихъ предположеній можно комбинировать съ каждымъ изъ трехъ предположеній относительно числителя формулы x :

$$h > p, \quad h = p, \quad h < p.$$

Такимъ образомъ составится 9 комбинацій. Относительно второго числителя придется сдѣлать такіе предположенія, которая не находились бы въ противорѣчій съ предыдущими. Такъ, взявъ $h > b$ и $h < p$, можемъ это предположеніе комбинировать съ каждымъ изъ слѣдующихъ трехъ: $p < b$, $p = b$, $p > b$; а взявъ комбинацію $h < b$, $h < p$, можемъ относительно второго числителя положить только $p = b$. Поступая такимъ образомъ, имѣемъ слѣдующую таблицу изслѣдованія

$$\begin{aligned} h > b & \begin{cases} h > p & \begin{cases} p > b \\ p = b \\ p < b \end{cases} \\ h = p & \begin{cases} p > b \\ p = b \end{cases} \\ h < p & \begin{cases} p > b \\ p = b \end{cases} \end{cases} \\ h < b & \begin{cases} h > p & \begin{cases} p < b \\ p = b \end{cases} \\ h < p & \begin{cases} p > b \\ p = b \end{cases} \end{cases} \\ h = b & \begin{cases} h > p & \begin{cases} p < b \\ p = b \end{cases} \\ h < p & \begin{cases} p > b \\ p = b \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Первый случай. $h > b$, $h > p > b$.

Въ этомъ случаѣ $h - b > 0$, $h - p > 0$ и $p - b > 0$; а слѣд.

$$x > 0 \text{ и } y > 0.$$

Но чтобы эти алгебраическія положительныя рѣшенія дали внутренній вписанный прямоугольникъ, надо еще, чтобы было $x < b$, $y < h$. Въ данномъ случаѣ такъ и есть, ибо каждая изъ дробей $\frac{h-p}{h-b}$ и $\frac{p-b}{h-b}$ меньше 1.

Такимъ образомъ, при данныхъ условіяхъ имѣемъ *рѣшеніе перваго рода*.

Второй случай. $h > b$, $h > p$, $p = b$.

Здѣсь имѣемъ: $h - b > 0$, $h - p > 0$, $p - b = 0$; слѣд.

$$x = b, y = 0;$$

т.-е. прямоугольникъ сливается съ линіей AC, обращается въ прямую

Третій случай. $h > b$, $h > p < b$.

Въ этомъ случаѣ $h - b > 0$, $h - p > 0$, $p - b < 0$, слѣд.

$$x > 0 \text{ (и } > b\text{)}, y < 0;$$

это рѣшеніе, какъ уже знаемъ, даетъ прямоугольникъ *второго рода*.

Четвертый случай. $p = h > b$.

Здѣсь имѣемъ: $h - b > 0$, $h - p = 0$, $p - b > 0$; слѣд.

$$x = 0, y = h,$$

и прямоугольникъ обращается въ прямую BH.

Пятый случай. $p > h > b$.

Это условіе даетъ: $h - p < 0$, $h - b > 0$, $p - b > 0$, а потому

$$x < 0, y > 0 \text{ (и } > h, \text{ ибо дробь } \frac{p-b}{h-b} > 1\text{)}.$$

Получаемъ рѣшеніе *третьяго* рода, т.-е. прямоугольникъ D'E'F'G', въ которомъ разность между линіями E'F' и E'D' равна p.

Шестой случай. $p < h < b$.

Въ такомъ случаѣ: $h - b < 0$, $h - p > 0$, $p - b < 0$, а потому

$$x < 0, y > 0 \text{ (и больше } h\text{)}.$$

Имѣемъ, какъ и въ пятомъ случаѣ, рѣшеніе *третьяго* рода

Седьмой случай. $p = h < b$.

Въ этомъ случаѣ: $h - b < 0$, $h - p = 0$, $p - b < 0$; слѣд.

$$x = 0, y = h,$$

прямоугольникъ сливается съ высотой треугольника.

Восьмой случай. $p > b > h$.

Въ этомъ случаѣ: $h - b < 0$, $h - p < 0$, $p - b > 0$.

$$x > 0 \text{ (и больше } b\text{)}, y < 0;$$

получаемъ рѣшеніе *второго* рода, какъ въ третьемъ случаѣ.

Девятый случай. $h < p < b$.

Здѣсь имѣемъ: $h - b < 0$, $h - p < 0$, $p - b > 0$; а потому

$$x = b, y = 0;$$

Прямоугольникъ сливается съ основаниемъ треугольника.

Десятый случай. $h < p < b$.

Въ этомъ случаѣ: $h - b < 0$, $h - p < 0$, $p - b < 0$, а потому

$$x > 0 \text{ и } y > 0, \text{ при чемъ } x < b, \text{ а } y < h;$$

имѣемъ рѣшеніе *перваго* рода, какъ въ первомъ случаѣ.

Одиннадцатый случай. $p < b = h$. Находимъ:

$$x = \infty, y = \infty.$$

Эти рѣшенія означаютъ невозможность задачи. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ уравненіи (2) $b = h$, имѣемъ: $x = h - y$, откуда $x + y = h$, т. е. когда въ треугольникъ основание равно высотѣ, полупериметръ вписанн. прямаго долженъ равняться высотѣ; слѣд. какъ скоро p не равно h , задача невозможна.

Двадцатый случай. $h < b < p$. Въ этомъ случаѣ:

$$\begin{array}{ccccccc} h - b & h & p & p - b & 0, & \text{слѣд.} \\ x & 0 & & 0 & & \\ & 0 & y & 0 & & \end{array}$$

Эта неопредѣленность дѣйствительная; въ самомъ дѣлѣ, тотчасъ мы увидѣли, что при $h < b$ полупериметръ всякаго вписаннаго прямоугольника долженъ равняться h ; слѣд. если будетъ дано, какъ и есть въ данномъ случаѣ, $p < h$, всякій вписанный прямоугольникъ будетъ требуемый, и задача имѣетъ безчисленное множество рѣшеній.

Тринадцатый случай. $p > h < b$. Въ этомъ случаѣ

$$x = \infty, y = \infty:$$

задача невозможна, какъ въ одиннадцатомъ случаѣ.

Примѣчаніе I. Исслѣдованіе показало намъ, что *рѣшеніе перваго рода* получается въ томъ случаѣ, когда полупериметръ искомаго прямоугольника заключенъ между основаніемъ и высотой треугольника, т. е. при $h < b$ если имѣемъ $h < p < b$ (первый случай), а при $h < b$, если дано, что $h < p < b$ (двадцатый случай). Эти условія можно вѣсти и геометрически. Проведемъ DK параллельно BC, найдемъ $KC = DE$, и слѣд.

$$p = DE + DG = CK + DG.$$

Но вслѣдствіе подобія треугольниковъ ABC и ADK, необходимо имѣемъ

$$\begin{array}{l} \text{при } h < b \text{ и } DG = AK, \text{ а потому } p = CK + AK \text{ или } p > b; \\ \text{а при } h < b \text{ и } DG = AK, \text{ а потому } p = CK + AK \text{ или } p < b. \end{array}$$

Съ другой стороны

$$p = DG + DE = BI + DE.$$

Но изъ подобія треугольниковъ BDE и BAC необходимо имѣемъ

$$\begin{array}{l} \text{при } h < b \text{ и } BI < DE, \text{ а слѣд. } p < BI + DE \text{ или } p < h; \\ \text{а при } h < b \text{ и } BI < DE, \text{ а слѣд. } p > BI + DE \text{ или } p > h. \end{array}$$

Итакъ, для того чтобы рѣшеніе перваго рода имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы полупериметръ прямоугольника заключался между основаніемъ и высотой даннаго треугольника.

Примѣчаніе II. Когда p мало отличается отъ h , получается прямоугольникъ весьма растянутый въ направленіи высоты BI; напротивъ того, если p близко къ b , прямоугольникъ получается сплюснутый; а измѣняя непрерывно p между этими предѣлами, получимъ всѣ промежуточныя формы: слѣд. можетъ получиться, между прочимъ, и *квадратъ*; и для этого необходимо, чтобы было

$$x = y, \text{ или } b(h - p) = h(p - b), \text{ откуда}$$

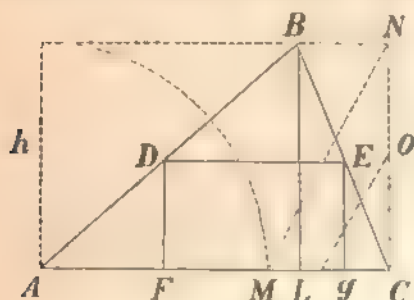
$$p = \frac{2bh}{b+h}.$$

Въ такомъ случаѣ, имѣя въ виду уравненіе $x + y = p$, получимъ

$$x = y \frac{bh}{b+h}.$$

Построеніе. Легко построить найденныя величины для x и y ; построимъ, напр., y въ случаѣ: $h < p < b$. Изъ формулы $y = \frac{h(b-p)}{b-h}$ имѣемъ пропорцію:

$(b-h):(b-p)=h:y$; такимъ образомъ, слѣдуетъ построить четвертую пропорціональную къ тремъ линіямъ: $b-h$, $b-p$ и h . Нанеся на AC отрезки $AM=h$, $AL=p$, имѣемъ



$$b-h=CM, \quad b-p=CL.$$

Черт. 37.

Изъ точки C возставляемъ перпендикуляръ CN къ AC , равный h , соединяемъ M съ N и проводимъ LO параллельно MN ; легко видѣть, что $OC=y$. Проведемъ изъ O линію OD параллельно AC , получимъ верхнее основаніе DE прямоугольника, а опустимъ перпендикуляры DF и EC , и самый прямоугольникъ.

Внѣ-вписанный прямоугольникъ.

383. I. Когда вершины D и E прямоугольника находятся подъ основаніемъ треугольника, имѣемъ прямоугольникъ $DEFG$. Пусть требуется построить такой прямоугольникъ по данному периметру $2p$. Называя сторону DE' буквою x и $E'F'$ буквою y , имѣемъ уравненія:

$$x + y = p, \quad \frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \quad (4)$$

откуда

$$x = b \cdot \frac{p+h}{b+h}, \quad y = h \cdot \frac{p-b}{b+h}.$$

Исследование. Такъ какъ знаменатель въ этихъ формулахъ не можетъ быть нулемъ, то x и y не могутъ быть ни безконечными, ни неопредѣленными, кромѣ того, x всегда положительный, а y можетъ быть или положительнымъ, или отрицательнымъ, или нулемъ, что зависитъ отъ знака разности $p-b$. Итакъ:

1. $p > b$. Въ этомъ случаѣ: $x > 0$ и $y > 0$; и кромѣ того, такъ какъ дробь $\frac{p+h}{b+h} > 1$, то $x > b$. Итакъ, въ данномъ случаѣ существуетъ внѣ-вписанный прямоугольникъ съ даннымъ периметромъ $2p$, имѣющій такое положеніе какъ $DE'FG$.

2. $p = b$. Въ этомъ случаѣ: $x=b$, $y=0$, и рассматриваемый прямоугольникъ сливается съ основаніемъ треугольника.

3. $p < b$. Въ этомъ случаѣ $x > 0$, но $< b$; $y < 0$.

Вставляя въ уравненія (4) $-y$ вмѣсто y , получаемъ

$$x - y = p, \quad \frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}.$$

Легко видѣть, что эти уравненія соответствуютъ вписанному прямоугольнику $DEFG$, въ которомъ разность между основаніемъ и высотой равна p .

Примѣчаніе. Чтобы въ рассматриваемомъ случаѣ прямоугольникъ былъ квадратомъ, надо, чтобы было $x=y$, или $b(p+h) = h(p-b)$, откуда

$$p = \frac{2bh}{b+h}, \quad \text{и слѣд.} \quad x=y = \frac{bh}{b+h}.$$

Такъ какъ p — величина положительная, то h не можетъ быть $< b$; такимъ образомъ нельзя получить въ-вписаннаго квадрата подъ основаніемъ треугольника, если $b > h$.

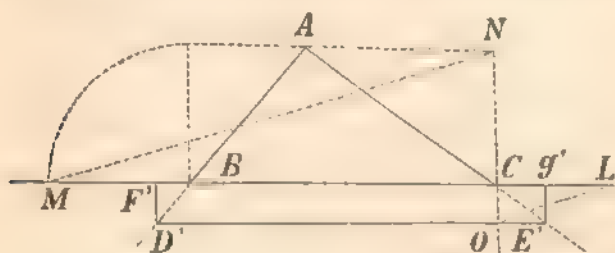
Построеніе. Сдѣлаемъ построеніе для случая $p > b$. Изъ пропорціи

$$(b + h) : (p - b) = h : y$$

видно, что построеніе y сводится къ нахожденію четвертой пропорціальной къ тремъ даннымъ линіямъ $b + h$, $p - b$ и h ; для чего беремъ $BM = h$, $BL = p$, и слѣдов.

$$CM = b + h \text{ и } CL = p - b.$$

Соединяемъ M съ N и изъ L проводимъ линію LO , параллельную MN ; точка



Черт. 38.

О опредѣляетъ сторону $D'E'$ искомаго прямоугольника, а вмѣстѣ съ тѣмъ и самый прямоугольникъ.

384. II. Когда вершины въ-вписаннаго прямоугольника находятся на продолженіяхъ сторонъ BA и BC за вершину B , имѣемъ прямоугольникъ $D'E'F'G'$, для опредѣленія котораго послужатъ уравненія

$$x + y = p, \quad \frac{x}{b} = \frac{y - h}{h}, \quad \dots (5)$$

въ которыхъ x означаетъ основаніе, а y — высоту новаго прямоугольника. Изъ нихъ имѣемъ:

$$x = b \cdot \frac{p - h}{b + h}, \quad y = h \cdot \frac{b + p}{b + h}.$$

Изслѣдованіе. 1. $p > h$; въ этомъ случаѣ: $x > 0$, $y > 0$ и $y > h$. Это рѣшеніе даетъ прямоугольникъ съ периметромъ $2p$, имѣющій такое положеніе какъ $D'E'F'G'$.

2. $p = h$; въ этомъ случаѣ: $x = 0$, $y = h$, и рассматриваемый прямоугольникъ сливается съ высотой треугольника.

3. $p < h$; въ этомъ случаѣ: $x < 0$, $y > 0$, но $y < h$. Подставивъ въ ур-нія (5) $-x$ вмѣсто x , получимъ

$$y - x = p, \quad \frac{x}{b} = \frac{h - y}{h}.$$

легко видѣть, что эти уравненія соответствуютъ вписанному прямоугольнику $D'EFG$, въ которомъ разность между высотой и основаніемъ равна данной линіи p .

Примѣчаніе. Чтобы прямоугольникъ былъ квадратомъ, надо, чтобы было $x = y$, т. е. $b(p - h) = h(b + p)$, откуда

$$p = \frac{2bh}{b - h}, \text{ слѣд. } x = y = \frac{bh}{b - h};$$

угол SPQ прямой, то углы APS и $B'PQ$ дополнительные и тр-ки ASP и $B'PQ$ подобны, а потому сходственные их стороны пропорциональны:

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{AS}{B'P} = \frac{PS}{PQ}$$

т. е.

$$\frac{x}{h-y} = \frac{y}{b-x} = \frac{n}{m}.$$

Приравнивая каждое из двух первых отношений третьему, находим два уравнения с двумя неизвестными:

$$mx + ny = nh \quad (1)$$

$$nx + my = nb \quad (2)$$

откуда

$$x = \frac{n(mb - nb)}{m^2 - n^2}, \quad y = \frac{n(mb - nh)}{m^2 - n^2};$$

следовательно

$$BP = b - x = \frac{m(mb - nb)}{m^2 - n^2}, \quad BQ = h - y = \frac{m(mb - nh)}{m^2 - n^2};$$

или, положив $\frac{m}{n} = k$:

$$x = \frac{kh - b}{k^2 - 1}, \quad b - x = \frac{k(kb - h)}{k^2 - 1}, \quad y = \frac{kb - h}{k^2 - 1}, \quad h - y = \frac{k(kh - h)}{k^2 - 1}.$$

Исследование. Если данные прямоугольники не квадраты, то достаточно ограничиться случаем тр-и $mb - nb$ и $mb - nh$, так что исследованию подлежат случаи:

$$k > 1 \begin{cases} k > \frac{b}{h} \\ k = \frac{b}{h} \\ k < \frac{b}{h} \end{cases} \quad k = 1 \begin{cases} k < \frac{b}{h}, \text{ при } b > h \\ k = \frac{b}{h}, \text{ при } b = h. \end{cases}$$

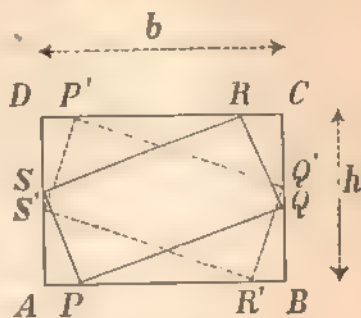
Первый случай. $k > \frac{b}{h}$. Из этого неравенства находим, что $kh > b$.

Затем, замечаем, что k , будучи больше $\frac{b}{h}$, больше и дроби $\frac{h}{b}$ (которая $< \frac{b}{h}$), а следовательно и $kb > h$. Заключаем, что $x > 0$, $y > 0$, $b - x > 0$, $h - y > 0$; из последних двух неравенств следует, что $x < b$ и $y < h$. Таким образом, вершины искомого прямоугольника находятся на самых сторонах прямоугольника $ABCD$, т. е. $PQRS$ представляет действительно внутренний вписанный прямоугольник.

Условие $\frac{m}{n} < \frac{b}{h}$ показывает, что все вписанные прямоугольники имеют форму более удлиненную, нежели прямоугольник $ABCD$.

Второй случай. $k = \frac{b}{h}$. Это условие дает: $kh = b$, след.

$$x = 0, \quad y = h;$$



Черт. 41.

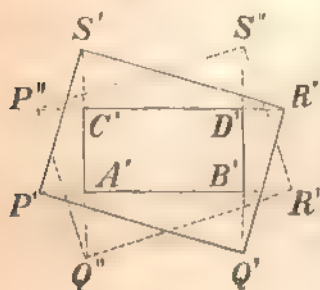
это значить, что вершины Р и R совпадают—первая съ А, вторая съ С; а вершины S и Q — первая съ D, вторая съ В, а потому прямоугольник PQRS съ ABCD.

Третий случай. $k = \frac{m}{n} < \frac{b}{h}$. Изъ этого слѣдуетъ, что $kh < b$, а потому $x < 0$ и $h - y = 0$ или $y = h$; такимъ образомъ: x отрицателенъ, а y положительнъ и больше h . Эти результаты означаютъ, что вершина Р должна находиться лѣво отъ точки А на продолженіи стороны ВА, а вершина R — вправо отъ точки D на продолженіи стороны DC, вершина S — вверхъ отъ С на продолженіи AC, а вершина Q — внизъ отъ В на продолженіи DB; т.-е. получается прямоугольникъ P'Q'R'S', обнимающій ABCD.

Если составить уравненія для этой новой задачи, положивъ АР' x и АS' y , найдемъ:

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{x+b} = \frac{n}{m};$$

и эти уравненія мы получимъ прямо изъ уравненій предшествующихъ переменію x на $-x$. Итакъ, первоначальныя уравненія всегда даютъ отвѣтъ на предложенную задачу: этихъ отвѣтомъ служить внутренне-вписанный прямоугольникъ P'Q'R'S', если EFGH болѣе удлиненъ чѣмъ ABCD, и въ-выписанный прямоугольникъ P'Q'R'S' (черт. 42), если EFGH менѣе удлиненъ нежели ABCD.



Черт. 42.

Слѣдуетъ замѣтить, что взявъ $DP' = AP$ и $DS' = AS$ (черт. 41), получимъ второй прямоугольникъ P'Q'R'S', удовлетворяющій условіямъ вопроса, но какъ онъ равенъ P'Q'RS, то мы и не будемъ считать его новымъ рѣшеніемъ. То же замѣчаніе относится къ въ-выписанному прямоугольнику P'Q'R'S', равному P'Q'RS' (черт. 42).

Четвертый случай. $k = 1$ и $b > h$. Находимъ:

$$x = -\infty, y = \infty.$$

Условіе $k = 1$ означаетъ, что прямоугольникъ EFGH есть квадратъ; а полученное рѣшеніе, въ которомъ $x = 0$, означаетъ, что для данного прямоугольника никогда не можетъ быть полученъ въ-выписанный квадратъ, но что въ-выписанный прямоугольникъ, какъ P'Q'R'S', тѣмъ болѣе приближается къ формѣ квадрата, чѣмъ болѣе становится его разбѣръ.

Пятый случай. Если $k = 1$ и $b = h$, т.-е. данныя прямоугольники ABCD и EFGH—квадраты, формулы даютъ:

$$x = \frac{0}{0}, y = \frac{0}{0};$$

эти рѣшенія означаютъ дѣйствительную неопредѣленность, потому что въ квадратъ можно вписать безчисленное множество квадратовъ; въ самомъ дѣлѣ, легко доказать, что если нанести на каждой сторонѣ квадрата, начиная отъ каждой вершины, одну и ту же произвольную длину, получимъ вершины новаго квадрата.

Примѣчаніе. Здѣсь уместно сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Когда, какъ въ данномъ случаѣ, неопредѣленность получается отъ нѣсколькихъ предположеній относительно частныхъ значений буквъ, нужно всѣ эти предположенія вводить заразъ: иначе могла бы ускользнуть изъ виду дѣйствительная неопредѣленность. Такъ, положивъ въ формулахъ x и y заразъ $k = 1$ и $b = h$, тотчасъ обваражимъ неопредѣленность; и если бы мы захотѣли найти истинное значеніе x и y , положивъ

$$b = h + a \text{ и } k = 1 + \pi,$$

то, упростивъ формулы и положивъ затѣмъ $x = 0$, нашли бы

$$x = \frac{h-p}{2}, y = \frac{h+p}{2},$$

выражения, вѣдѣствіе присутствія въ нихъ произвольнаго количества p , дѣйстви-
тельно неопредѣленные.

Но если бы оба предположения мы внесли *не совместно*, а *положивъ сначала* $h = h$, что позволяеть указать общаго множителя $k = 1$, а *затѣмъ* $k = 1$ въ упро-
щенныхъ уже формулахъ

$$x = \frac{bk}{k+1}, y = \frac{b}{k+1},$$

нашли бы опредѣленные величины

$$x = \frac{b}{2}, y = \frac{b}{2};$$

слѣдовательно, мы удалили бы неопредѣленность, на дѣлѣ существующую.

Примѣчаніе это весьма важно, и его всегда слѣдуетъ имѣть въ виду при
ислѣдованіи вопросовъ, когда приходится дѣлать не одно частное предполо-
женіе.

Если будемъ k неограниченно увеличивать, приближая его къ ∞ , x и y бу-
дутъ стремиться къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, при $k = \infty$ имѣемъ: $x \sim \frac{1}{\infty}$, $y \sim \frac{1}{\infty}$;
для раскрытія этихъ неопредѣленностей раздѣлимъ числителя и знаменателя фор-
мулъ x и y на k^2 , что дастъ

$$x = \frac{\frac{h}{k}}{1 + \frac{1}{k^2}}, y = \frac{\frac{b}{k}}{1 + \frac{1}{k^2}},$$

и такъ какъ $\frac{1}{k^2} \sim 0$ при $k \rightarrow \infty$, то прямоугольникъ PQRS обращается
въ диагональ AC, что совершенно понятно.

Итакъ, Величины x и y можно представить въ видѣ

$$x = \frac{n}{m+n} \left(\frac{m}{m+n} h - \frac{n}{m+n} b \right),$$

$$h-y = \frac{m}{m+n} \left(\frac{m}{m+n} h - \frac{n}{m+n} b \right),$$

и построить при помощи четвертыхъ пропорціональныхъ. Во-первыхъ, чтобы по-
лучить линию

$$\frac{mh}{m-n} = x,$$

достаточно взять (черт. 40) на продолженіи HE линію EK = h , затѣмъ на линіи
EF нанести FG = n ; соединивъ точки G' и K и проведя черезъ точку F
линію FL параллельно G'K, найдемъ

$$\frac{FG'}{EF} = \frac{EK}{EL}, \text{ т.-е. } \frac{m-n}{m} = \frac{h}{EL}, \text{ откуда } EL = \frac{mh}{m-n} = x.$$

Такимъ же образомъ, чтобы построить отрезокъ

$$\frac{nb}{m-n} = y,$$

беремъ $FO = b$, $EP' = EN = n$; соединивъ точки H' и O , проводимъ изъ точки G' параллель GT , и получаемъ

$$\frac{H'F}{GF} = \frac{FO}{FT}, \text{ т.-е. } \frac{m-n}{n} = \frac{b}{FT} \text{ откуда } FT = \frac{nb}{m-n} = u.$$

Нанеся FT отъ L до V , получимъ

$$EV = EL - LV = z - u,$$

и выраженія x и $h - y$ примутъ видъ

$$x = \frac{n}{m+n} \cdot EV, \quad h - y = \frac{m}{m+n} \cdot EV.$$

Итакъ, для опредѣленія x нужно взять $FG'' = FG = n$, провести прямую $G''V$ и черезъ точку H' ей параллельную HA , для получения $h - y$ проводимъ черезъ точку F линию FU параллельно VG ; найдемъ $EA = x$ и $EY = h - y$.

Нанеся на стороны прямоугольника $ABCD$

$$AP = EX, \quad DS = YE,$$

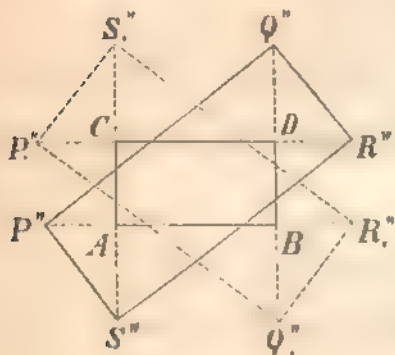
получимъ и прямоугольникъ $PQRS$.

Фигура $P'Q'R'S'$ (черт. 42), строится такимъ же образомъ, ибо въ этомъ случаѣ

$$x = \frac{n}{m+n} (u - z), \quad y - h = \frac{m}{m+n} (u - z).$$

388. II. Вершины P и S могутъ находиться въ P'' и S' на продолженіяхъ сторонъ BA и CA ; вѣн-вписанный прямоугольникъ приметъ положеніе $P''Q'R''S''$ (черт. 43). Положивъ

$$AP'' = x, \quad AS'' = y,$$



изъ подобія треугольниковъ $P''AS''$ и $P''BQ''$ найдемъ:

$$\frac{x}{h+y} = \frac{y}{b+x} = \frac{n}{m};$$

откуда

$$\begin{aligned} mx - ny &= hn \\ my - nx &= bn; \end{aligned}$$

рѣшивъ ихъ, находимъ:

Черт. 43.

$$x = \frac{n(mh - nb)}{m^2 - n^2}, \quad y = \frac{n(mb + nh)}{m^2 - n^2},$$

или

$$x = \frac{kh + b}{k^2 - 1}, \quad y = \frac{kb + h}{k^2 - 1}.$$

ИЗСЛѢДОВАНИЕ. Задача всегда возможна, какова бы ни была величина k въ пределахъ отъ ∞ до 1; то же самое замѣчаніе, что и прежде, прилагается и къ случаю $k=1$.

Что касается выраженія x и $h - y$, ихъ строимъ такимъ же образомъ какъ и въ первомъ случаѣ, приведа къ виду

$$x = \frac{n}{m+n} (z + u), \quad h - y = \frac{m}{m+n} (z + u),$$

гдѣ x и y имѣютъ вышеуказанныя значенія, сверхъ того, построения, уже имѣнныя при нахожденіи x и $y = g$ или x и $y = h$, позволяютъ быстрѣе построить x и $y = u$, представляющія новое рѣшеніе $P'Q'R'S$.

Заключеніе. Итакъ, задача, взятая въ самомъ общемъ смыслѣ, всегда имѣетъ два рѣшенія 1) прямоугольникъ *въ-въ-въ-въ*, какъ $P'Q'R'S'$ (черт. 43); 2) прямоугольникъ такой какъ $PQRS$ (черт. 41), или какъ $P'Q'R'S$ (черт. 42) смотря по тому, будетъ ли $\frac{m}{n}$ больше, или меньше $\frac{b}{h}$.

ГЛАВА XXVII.

Неопредѣленный анализъ первой степени.

Рѣшеніе одного уравненія съ 2-мя неизвѣстными, въ цѣлыхъ числахъ — Рѣшеніе системы уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ одинакъ больше числа уравненій. —

Рѣшеніе одного ур—нія съ 3-мя неизвѣстными.

1. Рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ одного уравненія съ 2-мя неизвѣстными.

389. Когда число неизвѣстныхъ больше числа уравненій, послѣднія имѣютъ безчисленное множество рѣшеній и называются поэтому *неопредѣленными*. Простейшій случай представляетъ одно ур— сь двумя неизвѣстными, наприкладъ, $x - 3y = 5$ — опредѣляя изъ него x , находимъ

$$x = 3y + 5.$$

Изъ этого показывается, что x зависитъ отъ y , самый же y остается совершенно произвольнымъ; поэтому мы можемъ давать ему какія угодно значенія. Такъ, полагая

$$\begin{array}{ll} y = -2, & \text{находимъ: } x = -1, \\ y = 0, & \text{» } x = 5, \\ y = 4, & \text{» } x = 17 \text{ и т. д.} \end{array}$$

Иногда вопросъ, приводящій къ неопредѣленному уравненію, требуетъ, чтобы неизвѣстныя были числа *цѣлыя*; а нерѣдко къ этому присоединяется еще требованіе, чтобы они были и *положительныя* (напр., если x и y означаютъ числа лицъ въ известномъ обществѣ, или цифры искомаго числа и т. п.); такимъ образомъ является задача: изъ безчисленнаго множества рѣшеній цѣлыхъ и *дробныхъ*, положительныхъ и отрицательныхъ, выдѣлать только *цѣлыя* и *положительныя*: такое ограниченіе значительно уменьшаетъ число рѣшеній.

Всякое неопредѣленное ур. сь двумя неизвѣстными, по освобожденіи отъ дробей, по перенесеніи неизвѣстныхъ въ одну часть, а известныхъ въ другую и по приведеніи можетъ быть представлено въ видѣ:

$$ax + by = c,$$

гдѣ a , b и c — числа цѣлыя. Прежде всего мы должны рѣшить вопросъ о томъ, всегда ли подобное ур. можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ? Отвѣтомъ на это служатъ слѣдующія двѣ теоремы.

390. Теорема I. Если въ уравненіи $ax + by = c$ коэффициенты a и b при неизвѣстныхъ имѣютъ общаго множителя, не содержащагося въ известномъ членѣ c , то уравнение не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній.

Пусть a и b имѣютъ общаго дѣлителя m , который не дѣлитъ числа c : въ такомъ случаѣ, по раздѣленіи a и b на m , получимъ нѣкоторые цѣлыя числа a' и b' .

$$a : m = a', \quad b : m = b'; \quad \text{откуда} \quad a = ma' \quad \text{и} \quad b = mb'.$$

Подстановка въ уравненіе дастъ

$$a'mx + b'my = c,$$

откуда

$$a'a + b'y = \frac{c}{m},$$

гдѣ $\frac{c}{m}$, по условію, дробь. Допустивъ, что x и y могутъ быть цѣлыми числами, мы получали бы въ первой части послѣдняго уравненія цѣлое число, тогда какъ вторая часть его — дробь: равенство было бы невозможно. Итакъ, ур. не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ.

Примѣромъ можетъ служить ур. $15x + 21y = 29$, въ которомъ коэффициенты 15 и 21 имѣютъ общаго множителя 3, на который 29 не дѣлится.

Если всѣ три коэффициента a , b и c имѣютъ общаго множителя, то по сокращеніи на него уравненія можетъ оказаться: или, что коэффициенты a и b имѣютъ общаго множителя, или что a и b — числа прѣмья между собою. Въ первомъ случаѣ, по предыдущей теоремѣ, ур. не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній. Что же касается второго случая, то можно доказать, что ур. необходимо имѣетъ цѣлыя рѣшенія.

391. Теорема II. Когда коэффициенты a и b суть числа прѣмья между собою, то ур. $ax + by = c$ имѣетъ цѣлыя рѣшенія.

Рѣшивъ ур. относительно x , напр., получимъ

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Докажемъ прежде всего, что если въ эту формулу вмѣсто y будемъ подставлять всѣ послѣдовательныя цѣлыя числа меньшія a , т.-е. 0, 1, 2, 3, ..., $a - 1$, и каждый разъ совершать дѣленіе, то всѣ a остатковъ будутъ различны. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя вмѣсто y какія-нибудь два числа y' и y'' меньшія a (изъ ряда 0, 1, 2, ..., $a - 1$); получимъ два выраженія

$$\frac{c - by'}{a} \quad \text{и} \quad \frac{c - by''}{a}.$$

Выполнивъ каждое дѣленіе и означивъ частныя буквами q' и q'' , а остатки r' и r'' , найдемъ:

$$\frac{c - by'}{a} = q' + \frac{r'}{a}, \quad \frac{c - by''}{a} = q'' + \frac{r''}{a}.$$

Допустивъ, что остатки r' и r'' могутъ быть равны, найдемъ по вычитаніи второго равенства изъ перваго:

$$\frac{c - by}{a} - \frac{c - by''}{a} = q' - q''$$

или

$$\frac{b(y'' - y')}{a} = q' - q''.$$

Такъ какъ $q' = q''$, какъ разность цѣлыхъ чиселъ, есть число цѣлое, то и первая часть должна быть цѣлымъ числомъ, а потому $b(y'' - y')$ должно на-цѣло дѣлиться на a . Но b и a —числа первые между собою, слѣдовъ $y'' - y'$ должно дѣлиться на a , т.-е. разность двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое *меньше* a , должна бы дѣлиться на a , что невозможно. Невозможно, поэтому, и допущеніе, что могутъ быть равные остатки.

Итакъ, мы доказали, что если вмѣсто y подставлять всѣ послѣдовательныя цѣлыя числа отъ 0 до $a - 1$ включительно, и каждый разъ совершать дѣленіе $c - by$ на a , то мы получимъ a остатковъ, которые *всѣ различны* и *каждый меньше* a (какъ дѣлителя). Но всѣ цѣлыя числа меньшія a , различныя между собою, число которыхъ a , суть, очевидно, числа

$$0, 1, 2, 3, \dots, a - 1.$$

Слѣд. въ числѣ остатковъ будетъ *непрѣменно одинъ и только одинъ*, равный нулю. Значеніе y , подстановка котораго въ выраженіе $\frac{c - by}{a}$ даетъ остатокъ 0, обращаетъ $x = \frac{c - by}{a}$ въ цѣлое число: цѣлому y соответствуетъ цѣлый x . Итакъ, когда a и b первые между собою, уравненіе дѣйствительно допускаетъ цѣлыя рѣшенія, что и требовалось доказать.

392. Первый способъ рѣшенія уравненія $ax + by = c$ въ цѣлыхъ числахъ. Вышеприведенное доказательство даетъ также средство находить одну пару цѣлыхъ рѣшеній. Пусть, напр., дано уравненіе

$$7x + 5y = 232.$$

Такъ какъ коэффициенты при x и y суть числа первые между собою, то *оно* допускаетъ цѣлыя рѣшенія. Для опредѣленія одной пары ихъ рѣшаемъ *ур.* относительно, напр., y ; находимъ

$$y = \frac{232 - 7x}{5}.$$

Итакъ, вызвемъ сюда вмѣсто x послѣдовательно цѣлыя числа, меньшія 5, т.-е. 0, 1, 2, 3, 4; находимъ:

$$\text{при } x = 0, y = \frac{232}{5} = 46 + \frac{2}{5};$$

$$> x = 1, y = \frac{232 - 7}{5} = 45$$

Итакъ, подстановка 1 вмѣсто x дастъ для y цѣлое число 45; сл. $x = 1$ и $y = 45$ представляютъ одну пару цѣлыхъ рѣшеній, что не трудно провѣрить.

Замѣтимъ, что въ видахъ ограниченія числа возможныхъ подстановокъ слѣдуетъ всегда рѣшать уравненіе относительно неизвѣстнаго, имѣющаго меньшій коэффициентъ.

Какъ скоро найдена одна пара цѣлыхъ рѣшеній, то легко найти сколько угодно такихъ рѣшеній при помощи формулъ, къ выводу которыхъ теперь и переходимъ.

393. ТЕОРЕМА III. Если какимъ-нибудь способомъ найдена одна пара цѣлыхъ рѣшеній: $x = a$, $y = \beta$ уравненія $ax + by = c$, то все цѣлая рѣшенія заключаются въ формулахъ

$$x = a + bt, \quad y = \beta - at,$$

гдѣ t —произвольное цѣлое число.

Такъ какъ $x = a$ и $y = \beta$, по условію, суть рѣшенія даннаго уравненія, то подстановка ихъ въ это уравненіе дастъ тождество

$$ax + b\beta = c.$$

Вычтя это тождество изъ даннаго уравненія, имѣемъ:

$$a(x - a) + b(y - \beta) = 0,$$

откуда

$$x - a = \frac{b(\beta - y)}{a},$$

а слѣдовательно

$$x = a + \frac{b(\beta - y)}{a}.$$

Выраженіе x состоитъ изъ: цѣлаго числа a и дробнаго выраженія $\frac{b(\beta - y)}{a}$. Поэтому x только тогда можетъ быть цѣлымъ числомъ, когда $b(\beta - y)$ дѣлится на a ; но b и a —числа первыя между собою, слѣд. чтобы $b(\beta - y)$ дѣлилось на-цѣло на a , необходимо, чтобы $\beta - y$ дѣлилось на a ; поэтому для y можно брать только такіа цѣлыя числа, при которыхъ $\frac{\beta - y}{a}$ обращается въ произвольное цѣлое число t , т.-е. условіе того, чтобы x было цѣлымъ, есть

$$\frac{\beta - y}{a} = t,$$

или

$$\beta - y = at,$$

или

$$y = \beta - at;$$

а въ такомъ случаѣ

$$x = a + bt.$$

Выраженія: $x = a + bt$ и $y = \beta - at$ даютъ сколько угодно цѣлыхъ рѣшеній; стоитъ только вмѣсто t подставлять какія угодно цѣлыя числа.

Такъ какъ t подчинено только одному условію, что оно должно быть цѣлымъ, то въ формулы x и y можно вмѣсто t подставить $-t$, и тогда онѣ примутъ видъ:

$$x = a - bt, \quad y = \beta + at.$$

Возьмемъ ли группу формулъ:

$$x = a + bt, \quad y = \beta - at,$$

или

$$x = a - bt, \quad y = \beta + at,$$

замѣчаемъ, что вторые члены ихъ суть произведенія неопредѣленного цѣлаго t : на коэффициентъ при y въ формулѣ x , и на коэффициентъ при x въ формулѣ y , причемъ одинъ изъ этихъ коэффициентовъ берется съ тѣмъ знакомъ, какой онъ имѣетъ въ уравненіи, а другой со знакомъ противоположнымъ тому, какой онъ имѣетъ въ уравненіи. Зная это правило, можно тотчасъ опредѣлить всѣ цѣлыя рѣшенія уравненія, какъ скоро найдена одна пара такихъ рѣшеній.

Примѣръ I. Выше мы нашли, что одна пара цѣлыхъ рѣшеній уравненія $7x + 5y = 232$ есть: $x = 1$, $y = 45$; слѣд. всѣ цѣлыя рѣшенія заключаются въ формулахъ:

$$x = 1 + 5t, \quad y = 45 - 7t;$$

или въ формулахъ:

$$x = 1 - 5t, \quad y = 45 + 7t.$$

Взявъ, напр., вторую группу формулъ, и давая въ ней t какія угодно цѣлыя значенія, положительныя и отрицательныя, найдемъ сколько угодно паръ цѣлыхъ рѣшеній; такъ

при $t = 0$	имѣемъ:	$x = 1,$	$y = 45;$
» $t = 1$	»	$x = -4,$	$y = 52;$
» $t = 2$	»	$x = -9,$	$y = 59, \text{ и т. д.}$
» $t = -1$	»	$x = 6,$	$y = 38,$
» $t = -2$	»	$x = 11,$	$y = 31, \text{ и т. д.}$

Примѣръ II. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$8x - 13y = 159.$$

Опредѣляя x , имѣемъ:

$$x = \frac{13y}{8} + \frac{159}{8};$$

при $y = 1$, имѣемъ: $x = 19\frac{7}{8}$; при $y = 5$, $x = 21\frac{1}{2}$; при $y = 9$, $x = 23\frac{1}{8}$;

при $y = 13$, $x = 24\frac{3}{4}$; при $y = 17$, $x = 26\frac{3}{8}$; при $y = 21$, $x = 28$.

Общія формулы цѣлыхъ рѣшеній суть:

$$x = 28 + 13t, \quad y = 5 + 8t;$$

или же

$$x = 28 - 13t, \quad y = 5 - 8t.$$

Примѣчаніе. Изъ самаго доказательства теоремы III слѣдуетъ, что въ формулахъ: $x = \alpha + bt$, $y = \beta - at$ содержатся *все* цѣлыя рѣшенія уравненія $ax + by = c$; непосредственно же повѣрку можно доказать, что эти выраженія дѣйствительно удовлетворяютъ данному уравненію. Въ самомъ дѣлѣ, подстановка даетъ:

$$a(\alpha + bt) + b(\beta - at) = c, \text{ или } a\alpha + b\beta = c;$$

а это есть тождество, потому что, по положенію, α и β удовлетворяютъ данному уравненію.

Указанный способъ рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій въ цѣлыхъ числахъ очень простъ, а его слѣдуетъ употреблять всякій разъ, когда коэффициенты при неизвестныхъ, или, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ нихъ — числа небольшие. Въ противномъ случаѣ, могло бы потребоваться большое число подстановокъ для нахожденія одной пары цѣлыхъ рѣшеній, и способъ этотъ отнималъ бы много времени. Поэтому для рѣшенія уравненій съ большими коэффициентами предпочтительнѣе употреблять

394. Второй способъ рѣшенія уравненія $ax + by = c$ въ цѣлыхъ числахъ.

Сначала рассмотримъ два частныхъ случая:

1. Пусть одинъ изъ коэффициентовъ заключается множителемъ въ известномъ членѣ, напр., пусть $c = ma$; уравненіе будетъ

$$ax + by = ma,$$

откуда

$$x = \frac{ma - by}{a} = m - \frac{by}{a}.$$

Чтобы x было цѣлымъ числомъ, необходимо (такъ какъ m — цѣлое числ.), чтобы by дѣлилось на a ; но b и a — числа первыя между собою, слѣд. необходимо y должно быть кратнымъ a , т.е. должно быть

$$y = at,$$

гдѣ t — какое угодно цѣлое число: тогда x выразится цѣлою формулою

$$x = m - bt.$$

Формулы: $x = m - bt$, $y = at$, гдѣ t — произвольное цѣлое число, и даютъ все цѣлыя рѣшенія предложеннаго уравненія.

2. Если одинъ изъ коэффициентовъ равенъ 1, напр. $a = 1$, то ур.

$$x + by = c$$

даетъ $x = c - by$; давая y какія угодно цѣлыя значенія, будемъ и для x получать каждый разъ цѣлыя же величины. Рѣшеніе такого уравненія, слѣдоват., весьма просто.

На этомъ замѣчаніи и основанъ общій способъ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія въ цѣлыхъ числахъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы намъ удалось привести рѣшеніе уравненія $ax + by = c$ къ такому уравненію, въ которомъ одинъ изъ коэффициентовъ равенъ 1, то задача была бы рѣшена. Но когда a и b числа первые между собою, такое приведеніе всегда возможно. Пусть, напр., дано ур—ніе

$$8x + 13y = 159 \dots (1).$$

Коэффициенты 8 и 13 числа первые между собою, слѣд. уравненіе можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ. Опредѣливъ то неизвѣстное, у котораго коэффициентъ меньше, находимъ:

$$x = \frac{159 - 13y}{8};$$

подставляя цѣлыя числа изъ $\frac{159}{8}$ и $\frac{13}{8}$ и соединяя дробные члены въ одну дробь, получимъ:

$$x = 19 - y \frac{7 - 5y}{8}.$$

Выраженіе x состоитъ изъ двухъ частей: $19 - y$, которая будетъ цѣлою при всякомъ цѣломъ y , и $\frac{7 - 5y}{8}$, имѣющей дробный видъ; для того чтобы x было цѣлымъ числомъ, необходимо между всеми значеніями y выбрать такія, при которыхъ $\frac{7 - 5y}{8}$ равнялась бы некоторому цѣлому числу t . Итакъ, нахожденіе цѣлыхъ значеній для t приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ уравненія

$$\frac{7 - 5y}{8} = t, \text{ или } 7 - 5y = 8t \dots (2).$$

Въ такомъ случаѣ будетъ

$$x = 19 - y + t \dots (3).$$

Замѣтимъ, что въ уравненіи (2), или все равно, $5y + 8t = 7$, меньшій коэффициентъ есть остатокъ отъ раздѣленія большаго коэффициента въ данномъ уравненіи на меньшій; а большій коэффициентъ равенъ меньшему коэффициенту данного ур—нія; вследствие этого ур—ніе (2) проще данного. Кромѣ того, коэффициенты его 5 и 8 числа первые между собою; это необходимо вытекаетъ изъ того, что если цѣльное (13) и дѣлитель (8) первые между собою, то остатокъ (5) будетъ первый съ дѣлителемъ; такимъ образомъ ур—ніе (2) имѣетъ всегда цѣлыя рѣшенія. Опредѣляя изъ него неизвѣстное, имѣющее меньшій коэффициентъ, получимъ:

$$y = \frac{7 - 8t}{5} = 1 - t + \frac{2 - 3t}{5}.$$

Для того чтобы t соответствовалъ цѣлымъ y , необходимо, чтобы выраженіе $\frac{2 - 3t}{5}$ было цѣлымъ; обозначивъ это цѣлое число буквою t' , находимъ

$$y = 1 - t + t', \dots (3')$$

причемъ

$$\frac{2-3t}{5} = t';$$

Такимъ образомъ нахожденіе цѣлыхъ значеній y приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ уравненія $\frac{2-3t}{5} = t'$, или

$$3t + 5t' = 2 \dots (3).$$

Выводя изъ него неизвѣстное съ меньшимъ коэффициентомъ, имѣемъ

$$t = \frac{2}{3} - \frac{5t'}{3} = t' + \frac{2-2t'}{3}.$$

Разсуждая по предыдущему, убѣдимся, что нахожденіе цѣлыхъ значеній для t приводитъ къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ ур—ня

$$\frac{2-2t'}{3} = t'', \text{ или } 2t' + 3t'' = 2 \dots (4),$$

причемъ

$$t = -t' + t'' \dots (x'').$$

Рѣшая ур. (4) относительно t' , имѣемъ

$$t' = \frac{3t''-2}{2} = -t'' + 1 - \frac{t''}{2}.$$

Чтобы t' было цѣлымъ, необходимо, чтобы было цѣлымъ $\frac{t''}{2}$; положивъ

$$\frac{t''}{2} = t''', \text{ гдѣ } t''' \text{—неопредѣленное цѣлое, имѣемъ}$$

$$t'' = 2t''' \dots (5)$$

причемъ

$$t' = 1 - t'' - t''' \dots (x''').$$

Итакъ, мы пришли къ ур—нію (5), въ которомъ коэффициентъ при t''' есть 1; давая t''' какія угодно цѣлыя значенія, будемъ каждый разъ получать и для t'' цѣлыя значенія.

Такимъ образомъ мы нашли рядъ соотношеній

- 1) $x = 19 - y + t$,
- 2) $y = 1 - t + t'$,
- 3) $t = -t' + t''$,
- 4) $t' = 1 - t'' - t'''$,
- 5) $t'' = 2t'''$.

Давая произвольное цѣлое значеніе количеству t' , мы изъ ур. (5) получимъ цѣлое же значеніе и для t . Цѣлыя значенія t и t' , подставленные въ ур. (4), дадутъ цѣлое значеніе для t'' . Цѣлыя значенія t' и t , подставленные

въ (3), дадутъ цѣлое значеніе для t . Эти цѣлыя значенія t и t' , подставленныя въ (2), дадутъ цѣлое значеніе для y . Наконецъ цѣлыя значенія t и y , подставленные въ (1), дадутъ соответствующее цѣлое значеніе x . Но во избѣжаніе неудобства, представляемаго такими послѣдовательными подстановками, выражаютъ x и y непосредственно чрезъ произвольное количество t . Подставляя въ (4) вмѣсто t' его величину $2t'$, найдемъ

$$t' = 1 - 2t''' - t''' = 1 - 3t''';$$

подставляя это выраженіе t' и вмѣсто t'' его величину въ (3), получимъ:

$$t = -1 + 3t''' + 2t' = -1 + 5t''';$$

подстановка значеній t и t' во (2) дастъ:

$$y = 1 + 1 - 5t''' + 1 - 3t''' = 3 - 8t''';$$

наконецъ, подстановка найденныхъ выраженій для y и t въ (1) дастъ:

$$x = 19 - 3 - 8t' - 1 - 5t' = 15 + 13t''.$$

Итакъ, общія формулы цѣлыхъ рѣшеній нашего ур. суть:

$$x = 15 + 13t'', \quad y = 3 - 8t''.$$

Онѣ имѣютъ совершенно тотъ же составъ, какой указанъ въ § 393.

395. Итакъ, что указанный въ предыдущемъ § приемъ рѣшенія ур—ній приводитъ къ получению цѣлыхъ рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, мы получили рядъ уравненій:

- 1) $8x + 13y = 159,$
- 2) $5y + 8t = 7,$
- 3) $3t + 5t' = 2,$
- 4) $2t' + 3t'' = 2,$
- 5) $t' - 2t''' = 0,$

при чемъ во (2) меньшій коэффициентъ 5 есть остатокъ отъ раздѣленія большаго коэффициента даннаго ур. 13 на меньшій 8. Въ ур—нии (3) меньшій коэффициентъ 3 есть остатокъ отъ дѣленія 8 на 5, т.е. дѣлителя на первый остатокъ. Въ ур—нии (4) меньшій коэффициентъ 2 есть остатокъ отъ дѣленія 5 на 3, т.е. перваго остатка на второй и т. д. Изъ этого видно, что процессъ рѣшенія приводитъ въ данномъ случаѣ къ такому же ряду дѣйствій, какой имѣлъ бы мѣсто при нахожденіи общаго наиб. дѣлителя между коэффициентами даннаго уравненія. Но какъ эти коэффициенты—числа первыя между собою, то въ указанномъ рядѣ дѣленій непремѣнно дойдемъ до остатка равнаго 1, который и явится коэффициентомъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ въ одномъ изъ уравненій (въ нашемъ прихѣртъ — коэффициентомъ при t' въ ур. (5)). Такимъ образомъ, нѣтъ будетъ достигнута.

Для получения цѣлыхъ рѣшеній въ опредѣленныхъ числахъ стоять только произвольному цѣлому t' давать какия угодно цѣлыя значенія — положительные или отрицательныя: 0, 1, 2, 3, . . . , — 1, — 2, — 3, . . .

При $t'' =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x = 15 + 13t'$	15	28	41	54	67	80	93	106	119	132	145	158	171	184	197	210
$y = 3 - 8t''$	3	-5	-13	-21	-29	-37	-45	-53	-61	-69	-77	-85	-93	-101	-109	-117

396. Упрощенія общаго способа. При рѣшеніи неопредѣленнаго уравненія слѣдуетъ пользоваться всѣми обстоятельствами, которыя ведутъ къ упрощенію вычисленій и слѣд. къ скорѣйшему достиженію цѣли. Укажемъ эти упрощенія.

1. Рѣшая уравненіе $19x + 15y = 23$, находимъ

$$y = \frac{23 - 19x}{15} = 1 - x + \frac{8 - 4x}{15}.$$

Приравнявъ t дробный членъ, получимъ съ уравненіе съ коэффициентами 4 и 15; но можно получить ур. съ меньшими коэффициентами, замѣтивъ, что $\frac{8 - 4x}{15} = \frac{4(2 - x)}{15}$ и слѣд.

$$y = 1 - x + \frac{4(2 - x)}{15};$$

очевидно, что y будетъ цѣлымъ при такомъ цѣломъ x , который обращаетъ $\frac{2 - x}{15}$ въ цѣлое число t ; поэтому полагаемъ

$$\frac{2 - x}{15} = t,$$

откуда

$$2 - x = 15t, \quad \text{и} \quad x = 2 - 15t;$$

затѣмъ

$$y = 1 - x + 4t = 1 - 2 + 15t + 4t = -1 + 19t.$$

Указанный приемъ быстро привелъ къ цѣлымъ формуламъ для x и y .

2. Упрощеніе рѣшенія всегда возможно въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ коэффициентовъ при неизвѣстныхъ и извѣстный членъ имѣютъ общаго множителя. Пусть дано ур—ніе

$$6x - 5y = 21;$$

раздѣливъ обѣ части на общаго множителя 3 чиселъ 6 и 21, получимъ:

$$2x - 5y = 7.$$

Такъ какъ $2x$ и 7 — числа цѣлыя, то $5y$ должно дѣлиться на 3; но 5 и 3 суть числа первыя между собою, слѣдовательно y должно быть цѣлымъ. Обозначивъ это цѣлое буквою y' , имѣемъ: $\frac{y}{3} = y'$, откуда $y = 3y'$, и данное ур. принимаетъ простѣйшій видъ

$$2x - 5y' = 7;$$

рѣшая его, послѣдовательно находимъ:

$$x = \frac{5y' + 7}{2} = 2y' + 3 + \frac{y' + 1}{2}; \quad \frac{y' + 1}{2} = t; \quad y' + 1 = 2t; \quad y' = -1 + 2t;$$

$$x = 2y' + 3 + t = -2 + 4t + 3 + t = 1 + 5t;$$

и наконецъ

$$y = 3y' = 3(-1 + 2t) = -3 + 6t.$$

3. Однимъ изъ полезнѣйшихъ упрощеній служить *введеніе отрицательныхъ остатковъ*. Такъ, рѣшая ур—ніе

$$7x + 26y = 111,$$

имѣемъ

$$x = \frac{111 - 26y}{7} = 15 + \frac{6}{7} - 3y = \frac{5y}{7}.$$

Здѣсь каждый изъ остатковъ: 6 и 5 отъ дѣленія 111 и 26 на 7 больше половины дѣлителя; но ихъ можно уменьшить, если каждое изъ частныхъ увеличить на 1. Взявъ при дѣленіи 111 на 7 въ частномъ 16, получимъ отрицательный остатокъ —1, численная величина котораго меньше 6; точно такъ же образуемъ, взявъ при дѣленіи 26 на 7 въ частномъ 4, найдемъ отрицательный остатокъ —2, численно менѣе прежняго остатка. Формула x приметъ видъ

$$x = 16 - \frac{1}{7} - 4y - \frac{2y}{7} = 16 - 4y - \frac{2y + 1}{7};$$

полагая $\frac{2y + 1}{7} = t$, имѣемъ:

$$x = 16 - 4y + t.$$

$$\text{Затѣмъ: } 2y = 1 + 7t, \quad y = \frac{1 + 7t}{2} = 3t + \frac{1 + t}{2}; \quad \text{полагая } \frac{1 + t}{2} = t',$$

имѣемъ

$$y = 3t + t', \quad t = -1 + 2t'.$$

Наконецъ

$$y = -3 + 7t', \quad x = 27 - 26t'.$$

397. Рѣшеніе въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ. Иногда вопросъ, приводящій къ неопредѣленному уравненію, требуетъ не только цѣлыхъ, но имѣетъ съ этимъ и положительныхъ рѣшеній. Слѣдующая теорема позволяетъ, при одномъ взглядѣ на уравненіе, опредѣлить, имѣетъ ли уравненіе ограниченное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, или неограниченное, или совсѣмъ не имѣетъ такихъ рѣшеній.

398. ТЕОРЕМА. Уравненіе $ax + by = c$ имѣетъ ограниченное число рѣшеній въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ, или совсѣмъ не имѣетъ такихъ рѣшеній, когда коэффициенты a и b имѣютъ одинаковый знакъ; напротивъ, оно имѣетъ неограниченное число сказанныхъ рѣшеній, когда a и b имѣютъ противоположные знаки.

Мы видели, что цѣлыя рѣшенія уравненія $ax + by = c$ выражаются формулами

$$x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at,$$

гдѣ α и β представляютъ одну пару цѣлыхъ рѣшеній, а t произвольное цѣлое число, положительное или отрицательное.

Условившись коэффицентъ a считать всегда положительнымъ (еслибъ было $a < 0$, то умноживъ все уравнение на -1 , мы сдѣлали бы коэф. при x положительнымъ), и обозначая абсолютныя величины количествъ a , b и c буквами a' , b' и c' , убѣдимся, что въ отношеніи знаковъ ур. $ax + by = c$ можетъ представлять только слѣдующіе случаи:

$$a'x + b'y = +c' \quad . \quad . \quad (1).$$

$$a'x + b'y = -c' \quad . \quad . \quad (2).$$

$$a'x - b'y = +c' \quad . \quad . \quad (3).$$

I. Цѣлыя рѣшенія ур—нія (1) изображаются формулами:

$$x = \alpha + b't, \quad y = \beta - a't;$$

чтобы x и y были положительны, цѣлое t должно удовлетворять неравенствамъ:

$$\alpha + b't > 0, \quad \beta - a't > 0;$$

рѣшая эти неравенства, находимъ:

$$t > -\frac{\alpha}{b'}, \quad t < \frac{\beta}{a'},$$

т.е. ограничивающіе предѣлы для t . Если между этими предѣлами находятся *цѣлыя* числа, то уравненіе имѣетъ столько паръ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, сколько существуетъ такихъ цѣлыхъ значеній t ; если же между предѣлами $-\frac{\alpha}{b'}$ и $\frac{\beta}{a'}$ нѣтъ цѣлыхъ чиселъ, то ур—ніе совсѣмъ не имѣетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Вотъ примѣры:

1. Рѣшая ур. $8x + 13y = 159$, мы нашли

$$x = 15 + 13t, \quad y = 3 - 8t;$$

рѣшая неравенства $15 + 13t > 0$ и $3 - 8t > 0$, находимъ:

$$t > -\frac{15}{13}, \quad \text{или} \quad t > -1\frac{2}{13}; \quad \text{и} \quad t < \frac{3}{8}.$$

Между предѣлами $-1\frac{2}{13}$ и $\frac{3}{8}$ заключаются только два цѣлыхъ числа: -1 и 0 ; полагая $t = -1$, находимъ: $x = 2$, $y = 11$; положивъ $t = 0$, получимъ: $x = 15$, $y = 3$. Данное ур. допускаетъ, такимъ образомъ, только двѣ пары цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

2. Решая ур. $2x + 3y = 1$, находимъ

$$x = 1 - 3t, \quad y = 1 - 2t,$$

откуда находимъ предѣлы для t : $t > \frac{1}{3}$, $t < \frac{1}{2}$. Но какъ между $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ нѣтъ цѣлыхъ чиселъ, то заключаемъ, что данное уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Это видно изъ самаго уравненія: въ самомъ дѣлѣ, сумма коэффициентовъ при x и y больше известнаго члена, а потому даже при самыхъ малыхъ цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, при $x = 1$ и $y = 1$, первая часть уравненія больше второй. Вообще, если въ уравненіи $a'x + b'y = c$ имѣемъ $a' + b > c$, оно не имѣетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

II. Уравненіе $a'x + b'y = -c$, въ которомъ коэффициенты при неизвѣстныхъ положительны, а известный членъ отрицателенъ, не имѣетъ положительныхъ рѣшеній, ни цѣлыхъ, ни дробныхъ, ибо сумма положительныхъ чиселъ не можетъ равняться отрицательному числу.

III. Цѣлыя рѣшенія уравненія $a'x - b'y = c$, гдѣ $c \geq 0$, выражаются формулами:

$$x = \alpha + b't, \quad y = \beta + a't;$$

чтобы выбрать изъ нихъ только положительныя, надо рѣшить неравенства

$$\alpha + b't > 0, \quad \beta + a't > 0,$$

откуда

$$t > -\frac{\alpha}{b'}, \quad t > -\frac{\beta}{a'};$$

отсюда очевидно, что всякое цѣлое значеніе t , большее большей изъ дробей $-\frac{\alpha}{b'}$ и $-\frac{\beta}{a'}$ дастъ цѣлыя положительныя рѣшенія; а такъ какъ такихъ значеній t безчисленно много, то ур. допускаетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ. Выше мы нашли, что цѣлыя рѣшенія уравненія $6x - 5y = 21$ выражаются формулами:

$$x = 1 + 5t, \quad y = -3 + 6t;$$

а предѣлы для t опредѣляются неравенствами

$$1 + 5t > 0, \quad -3 + 6t > 0,$$

откуда

$$t > -\frac{1}{5}, \quad t > \frac{1}{2}.$$

Заключаемъ, что всѣ цѣлыя числа, большія $\frac{1}{2}$, т.е. 1, 2, 3, 4, . . . до ∞ даютъ цѣлыя положительныя значенія x и y .

399. Примѣчаніе. Когда число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній ограниченное, его можно опредѣлить, съ точностью до 1, не рѣшая уравненія.

Этотъ случай представляется тогда, когда a и b имѣютъ одинаковые знаки, и для t получается два предѣла—низшій и высшій, именно

$$t \geq -\frac{a}{b} \quad \text{и} \quad t < \frac{\beta}{a};$$

откуда видно, что уравненіе $ax + by = c$ имѣетъ столько цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, сколько есть цѣлыхъ, положительныхъ или отрицательныхъ, чиселъ между $-\frac{a}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$.

I случай. Числа $-\frac{a}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ — дробныя.

Пусть будутъ $-\frac{a}{b} = f$ и $\frac{\beta}{a} = f_1$ цѣлыя числа, изъ которыхъ первое меньше $-\frac{a}{b}$, второе больше $\frac{\beta}{a}$. Между двумя цѣлыми числами $-\frac{a}{b} = f$ и $\frac{\beta}{a} = f_1$ содержится столько послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, сколько единицъ болѣе одной заключается въ ихъ разности. (Слѣд. число n цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія будетъ

$$n = \frac{\beta}{a} + f_1 - \left(-\frac{a}{b} - f\right) - 1 = \frac{ax + by}{ab} + f + f_1 - 1.$$

Но какъ a и β суть рѣшенія данного уравненія, то число $ax + by$ равно c , и потому

$$n = \frac{c}{ab} + f + f_1 - 1$$

Пусть цѣлая часть частнаго $\frac{c}{ab}$ равна q , а дополнительная дробь f_2 ; тогда

$$n = q + f + f_1 + f_2 - 1 \dots (1)$$

Такъ какъ, по положенію, $-\frac{a}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ не цѣлыя числа, то f и f_1 суть числа положительныя, отличныя отъ нуля, и меньшія 1, а потому число $f + f_1 + f_2 - 1$, будучи цѣлымъ, можетъ равняться только 0 или 1, такъ что n равно q или $q + 1$.

II случай. Одно изъ чиселъ: $-\frac{a}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ или оба — цѣлыя.

Если $-\frac{a}{b}$ число цѣлое, то можно взять t равнымъ $-\frac{a}{b}$, и x будетъ равенъ нулю, между тѣмъ какъ y будетъ имѣть величину положительную и цѣлую, равную частному отъ раздѣленія c на b . Въ такомъ случаѣ при добавительствѣ беремъ цѣлое число, предшествующее $-\frac{a}{b}$, т.-е. полагаемъ $f = 1$.

Подобное же замѣчаніе относится и къ случаю, когда $\frac{\beta}{a}$ будетъ цѣлое число; и тогда, при этихъ новыхъ условіяхъ, формула (1) всегда применима.

Полагая, что только одно из чисел $-\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ — целое, целое число $f + f_1 + f_2 - 1$ приводится к сумме двух чисел, отличных от нуля и меньших, каждое, единицы; оно равно, след., 1, а потому число решений будет $q + 1$.

Пусть, затѣмъ, оба числа: $-\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ целыя. Числа f и f_1 будутъ оба равны 1, и легко показать, что f_2 равно 0. Въ самомъ дѣлѣ, какъ сказано выше, $-\frac{a}{b}$ есть целое число, след. c дѣлится на b ; $\frac{b}{a}$ есть целое число, следовательно, c дѣлится на a , а потому и на ab . Такимъ образомъ $f_2 = 0$, $f = f_1 = 1$, след. $f + f_1 + f_2 - 1$ равно 1, и $n = q + 1$. Итакъ, число целыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія $ax + by = c$ равно q или $q + 1$, называя буквою q целую часть частнаго отъ раздѣленія c на ab . (При этомъ 0 принимается числомъ положительнымъ.)

Напр., для уравненій $5x + 3y = 2$ и $7x + 5y = 39$ число рѣшеній — q ; для уравненій $4x + 3y = 11$ и $7x + 3y = 61$ оно равно $q + 1$.

400. Для примѣненія изложенной теоріи рѣшить слѣдующія три задачи.

I задача. *Выдать 78 рублей одними 5-ти и 3-хъ рублевыми билетами, не имѣя никакихъ другихъ.*

Положивъ, что для этого нужно выдать пятирублевыхъ билетовъ x , а трехрублевыхъ — y ; уравненіе, очевидно, будетъ:

$$5x + 3y = 78.$$

Задача требуетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній; и по коэффициентамъ, x и y видно, что уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній. Раздѣливъ все уравненіе на 3, находимъ

$$\frac{5x}{3} + y = 26;$$

полагая $\frac{x}{3} = t$, гдѣ t — целое число, тотчасъ имѣемъ:

$$x = 3t, \quad y = 26 - 5t.$$

Чтобы x и y были положительными, необходимо, чтобы

$3t > 0$ (если 0 включить въ число положит. чиселъ);

$$26 - 5t > 0, \quad \text{откуда} \quad t < \frac{26}{5} \quad \text{или} \quad 5\frac{1}{5}.$$

Итакъ, полагая

$$\begin{aligned} t &= 0, 1, 2, 3, 4, 5, \quad \text{находимъ} \\ x &= 0, 3, 6, 9, 12, 15, \\ y &= 26, 21, 16, 11, 6, 1. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что выдать 78 рублей требуемымъ образомъ можно шестью различными способами, именно:

- 1) Давая 26 билетовъ въ 3 рубля и ни одного въ 5 рублей; или
- 2) » 21 » » » » 3 билета » » » ; или
- 3) » 16 » » » » 6 » » » » ; или
- 4) » 11 » » » » 9 » » » » ; или
- 5) » 6 » » » » 12 » » » » ; или
- 6) » 1 » » » » 15 » » » » .

П л а д а ч а. Известно, что приемами элементарной геометріи (т.-е. посредствомъ циркуля и линейки) можно раздѣлить окружность какъ ни 6, такъ и на 5 равныхъ частей. Какъ и сколькими способами можно съ помощью этихъ частей найти $\frac{1}{15}$ часть окружности?

Очевидно, что нужно найти такія двѣ дроби съ знаменателями 5 и 6, чѣмъ разность равнялась бы $\frac{1}{15}$; назвавъ числители этихъ дробей буквами x и y , имѣемъ:

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{5} = \frac{1}{15} \quad (1); \quad \frac{y}{5} - \frac{x}{6} = \frac{1}{15} \quad (2).$$

Рѣшаемъ ур. (1); по освобожденіи отъ знаменателей имѣемъ:

$$5x - 6y = 2;$$

раздѣливъ обѣ части на 2 и положивъ $\frac{x}{2} = x'$, получимъ ур—ніе

$$5x' - 3y = 1,$$

откуда $x' = -1 + 3t$, а слѣд.

$$x = -2 + 6t;$$

затѣмъ

$$y = -2 + 5t.$$

Чтобы x и y были > 0 , нужно, чтобы было: $t > \frac{1}{3}$, $t > \frac{2}{5}$. Полагая

$$t = 1, \quad 2, \quad 3, \dots$$

находимъ:

$$x = 4, \quad 10, \quad 16, \dots$$

$$y = 3, \quad 8, \quad 13, \dots$$

Итакъ, наименьшія значенія x и y , дающія простѣйшее рѣшеніе задачи, суть: $x = 4$ и $y = 3$, т.-е.: отъ $\frac{4}{6}$ или $\frac{2}{3}$ окружности нужно отнять $\frac{3}{5}$ ея, и остатокъ дастъ $\frac{1}{15}$ окружности.

Рѣшая ур—ніе (2), или, по освобожденіи отъ дробей, уравненіе: $6y - 5x = 2$, находимъ:

$$x = 2 - 6t,$$

$$y = 2 - 5t.$$

предѣлы для t суть: $t < \frac{1}{3}$, $t < \frac{2}{5}$. Полагая

$t = 0,$	$-1,$	$-2,$	$-3, \dots$
$x = 2,$	$8,$	$14,$	$20, \dots$
$y = 2,$	$7,$	$12,$	$17, \dots$

Итакъ, при этомъ способѣ, простѣйшее рѣшеніе задачи будетъ $x = 2$ и $y = 2$, т.-е. вычтя изъ дуги, равной $\frac{2}{5}$ окр. дугу $\frac{1}{3}$ окр., получимъ въ остаткѣ $\frac{1}{15}$ окружности.

III задача. Зубчатое колесо съ 17-ю зубцами захватываетъ зубцы другого колеса съ 13-ю зубцами. Сколько оборотовъ должно сдѣлать каждое изъ нихъ, чтобы каждый зубецъ перваго побывалъ въ каждомъ промежуткѣ втораго?

Пусть первое колесо должно сдѣлать x оборотовъ, а второе y . Когда первое обернется одинъ разъ, его 17 зубцовъ зацѣпятъ послѣдовательно столько же промежутковъ втораго; слѣд. при x оборотахъ $17x$ зубцовъ зацѣпятъ 13у промежутковъ между зубцами втораго. Но при x оборотахъ каждый зубецъ долженъ зацѣпить каждый промежутокъ, слѣд.

$$17x = 13y,$$

откуда: $x = 13t$, $y = 17t$.

Чтобы x и y были положительны, нужно t давать всѣ цѣлыя значенія, начиная съ 1. Такимъ образомъ, требуемое будетъ имѣть мѣсто черезъ 13 оборотовъ (вообще $13t$) перваго, или 17 (вообще $17t$) оборотовъ втораго.

2. Рѣшеніе системы уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ однимъ больше числа уравненій.

401. Возьмемъ 2 ур—нія съ 3-мя неизвѣстными:

$$ax + by + cz = d \dots (1)$$

$$a'x + b'y + c'z = d' \dots (2).$$

Если въ каждомъ изъ нихъ или въ одномъ всѣ четыре коэффициента имѣютъ одинъ знаменатель, то предварительно на него сокращаютъ уравненіе; пусть это сдѣлано, и оба уравненія приведены въ простѣйшій видъ.

Чтобы эти уравненія принимали цѣлыя рѣшенія, необходимо, чтобы въ

каждомъ всѣ три коэффициента: при x , y и z были первые между собою, т.-е. a , b и c —первые между собою, и a' , b' и c' —между собою. Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр. a , b и c имѣютъ общаго множителя m , на который d не дѣлится; въ такомъ случаѣ частныя

$$\frac{a}{m} = a', \quad \frac{b}{m} = b' \quad \text{и} \quad \frac{c}{m} = c'$$

будутъ цѣлыя; отсюда

$$a = a'm, \quad b = b'm, \quad c = c'm.$$

Подставляя въ ур. (1) и сокращая на m , найдемъ

$$a''x + b''y + c''z = \frac{d}{m}.$$

При цѣлыхъ x , y и z первая часть представитъ число цѣлое, тогда какъ вторая есть дробь; слѣд. ур. нѣ имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній.

Рѣшая одно ур.—нѣ съ 2-мя неизвѣстными: $ax + by = c$, мы видѣли, что когда a и b — числа первые между собою, ур.—нѣ необходимо имѣетъ цѣлыя рѣшенія; слѣд. условіе, что для цѣлыхъ рѣшеній коэффициенты a и b должны быть первыми между собою, было въ этомъ случаѣ условіемъ *необходимымъ и достаточнымъ*.

Что же касается взятой системы 2-хъ ур.—нѣй съ 3-ми неизвѣстными, то въ каждомъ ур.—нѣи коэффициенты могутъ быть числами первыми между собою, а ур.—нѣи могутъ и *не имѣть* цѣлыхъ рѣшеній; слѣд. условіе это для данной системы, будучи необходимымъ, можетъ быть еще недостаточнымъ (см. dalje случай II).

402. Пріежъ рѣшенія состоитъ въ исключеніи одного изъ неизвѣстныхъ; исключивъ, напр., z , найдемъ:

$$(ac' - a'e)x + (bc' - b'e)y = dc' - d'e \quad . \quad . \quad (3).$$

При этомъ могутъ представиться слѣдующіе 3 случая:

403. Первый случай. Если коэффициенты при x и y въ ур.—нѣи (3)—числа первые между собою, то, какъ извѣстно, ур.—нѣ это необходимо имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Если одна пара этихъ рѣшеній будетъ α и β , то всѣ цѣлыя рѣшенія выразятся формулами:

$$x = \alpha + (bc' - b'e) \cdot t, \\ y = \beta - (ac' - a'e) \cdot t.$$

Подставивъ ихъ въ ур. (1), найдемъ

$$c\alpha - c(ab' - a'b)t = d - a\alpha - b\beta.$$

Первая часть дѣлится на c ; если раздѣлится и вторая часть, то ур. будетъ имѣть цѣлыя рѣшенія, въ противномъ случаѣ нѣтъ. Пусть дѣленіе $d - a\alpha - b\beta$ на c совершается безъ остатка и пусть

$$\frac{d - a\alpha - b\beta}{c} = \gamma, \quad . \quad . \quad (4)$$

тогда

$$z - (ab' - ba)t = \gamma,$$

откуда

$$z = \gamma + (ab' - ba')t.$$

[Изъ (4) имѣемъ: $ax + by + cz = d$, т.-е. a, b и c обращаютъ 1-е ур—ніе въ тождество, а потому составляютъ систему цѣлыхъ рѣшеній этого ур—нія].

Итакъ, имѣемъ симметричныя формулы

$$x = \alpha + (bc' - b'c).t,$$

$$y = \beta + (ca' - ac')t,$$

$$z = \gamma + (ab' - ba')t;$$

цѣлымъ t дадутъ цѣлыя же значенія и для x, y и z .

Положивъ для краткости:

$$bc' - b'c = p, \quad ca' - ac' = q, \quad ab' - a'b = r,$$

имѣемъ

$$x = \alpha + pt, \quad y = \beta + qt, \quad z = \gamma + rt.$$

Если бы по смыслу задачи требовалось найти для x, y, z цѣлыя *положительныя* числа, то пришлось бы рѣшить совмѣстныя неравенства

$$\alpha + pt > 0, \quad \beta + qt > 0, \quad \gamma + rt > 0,$$

которыя дадутъ три предѣла для t .

Если всѣ эти предѣлы *одного* смысла, то: 1) когда всѣ они *влзшіе*, то нужно давать t всѣ цѣлыя значенія, *большія* *большаго* изъ нихъ; 2) если всѣ три предѣла *вышніе*, то надо давать t всѣ цѣлыя значенія, *меньшія* *меньшаго* изъ нихъ; въ томъ и другомъ случаѣ ур—ніе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Если предѣлы не всѣ *одного* смысла, то нужно давать t всѣ цѣлыя значенія, содержащіяся между этими предѣлами: число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній будетъ, следовательно, *ограниченное*. Наконецъ, если предѣлы получатся *противорѣчащія*, то ур—нія не имѣютъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ. Рѣшить ур—нія

$$15x + 35y + 85z = 385,$$

$$6x + 9y + 8z = 104.$$

Всѣ коэффициенты перваго ур—нія имѣютъ общаго множителя 5, на который и сократимъ это ур—ніе, послѣ чего получимъ систему

$$3x + 7y + 17z = 77,$$

$$6x + 9y + 8z = 104.$$

Въ каждомъ изъ этихъ ур—ній въ отдѣльности коэффициенты *при неизвѣстныхъ* числа *первыя* между собою; стало быть, возможно, что ур—нія имѣютъ цѣлыя рѣшенія. Предварительно сдѣлаемъ нѣкоторыя упрощенія. Въ пер-

вомъ ур—ніи коэффиціенты 7, 7 и 77 дѣлятся на 7; раздѣливъ обѣ части на это число, найдемъ ур—ніе

$$\frac{3x}{7} + y + z = 11;$$

замѣчая, что $\frac{x}{7}$ должно быть цѣлымъ, полагаемъ $\frac{x}{7} = x'$, откуда

$$x = 7x',$$

а уравненіе принимаетъ видъ

$$3x' + y + z = 11 \dots (1').$$

Во второмъ уравненіи коэффиціенты 6, 8 и 104 дѣлятся на 2; по сокращеніи на это число, получимъ

$$3x + \frac{9y}{2} + 4z = 52;$$

такъ какъ $\frac{y}{2}$ должно быть цѣлымъ, то положимъ $\frac{y}{2} = y'$, откуда $y = 2y'$, имѣемъ

$$3x + 9y' + 4z = 52 \dots (2')$$

Внося въ ур. (1') $2y'$ вмѣсто y , а во (2') $7x'$ вмѣсто x , найдемъ:

$$3x' + 2y' + z = 11,$$

$$21x' + 9y' + 4z = 52.$$

Умноживъ первое изъ этихъ ур—ній на 4 и вычтя второе, мы исключимъ z и получимъ (по умноженіи на -1):

$$9x' - y' = 8,$$

откуда

$$y' = 8 - 9x'.$$

Отсюда видно, что всякому цѣлому x' соответствуетъ цѣлый y' . Внося эту величину y' въ ур—ніе $3x' + 2y' + z = 11$, находимъ

$$-15x' + z = -5,$$

откуда

$$z = -5 + 15x',$$

слѣд. цѣлому x' соответствуетъ и цѣлый z . Такимъ образомъ, y' и z выражены черезъ x' , самый же x' произволенъ. Находимъ теперь формулы для x , y , z ; онѣ будутъ

$$x = 7x',$$

$$y = 16 - 18x',$$

$$z = -5 + 15x',$$

гдѣ x' —произвольное цѣлое число.

Если надо имѣть цѣлыя положительныя величины неизвѣстныхъ, то рѣшаемъ неравенства

$$7x' > 0, \quad 16 - 18x' > 0 \quad \text{и} \quad -5 + 15x' > 0,$$

откуда

$$x' > 0, \quad x' < \frac{8}{9}, \quad x' > \frac{1}{3}.$$

Предѣлы одного свойства $\left(0 \text{ и } \frac{1}{3}\right)$ приводятся къ одному: $\frac{1}{3}$, следовательно должно быть:

$$\frac{1}{3} < x' < \frac{8}{9};$$

а какъ между этими предѣлами нѣтъ цѣлыхъ чиселъ, то заключаемъ, что уравненія не допускаютъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

404. Второй случай. Если коэффициенты $ac' - ca'$ и $bc' - cb'$ имѣютъ общаго множителя k , который не дѣлитъ $dc' - cd'$, ур. (3) не будетъ имѣть цѣлыхъ рѣшеній, а слѣд. и данныя уравненія не будутъ ихъ имѣть.

Примѣръ. Такъ, уравненія

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 3z &= 11, \\ 4x + 7y + 9z &= 26 \end{aligned}$$

имѣютъ, каждое, коэффициенты при x, y, z первые между собою, но не допускаютъ цѣлыхъ рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ первое на 3 и сложивъ со вторымъ, найдемъ

$$19x + 19y = 59,$$

въ которомъ коэффициенты при x и y имѣютъ общаго множителя 19, на который 59 не дѣлится.

Точно также не имѣютъ цѣлыхъ рѣшеній и ур—нія, выводимыя изъ данныхъ исключеніемъ x или y . Первое было бы

$$19y + 57z = 86, \quad \text{или} \quad y + 3z = \frac{86}{19};$$

а второе

$$19x - 57z = -27, \quad \text{или} \quad x - 3z = -\frac{27}{19};$$

оба неразрѣшимы въ цѣлыхъ числахъ.

405. Третій случай. Если всѣ три количества $ac' - ca'$, $bc' - cb'$ и $dc' - cd'$ имѣютъ общаго множителя k , то раздѣливъ все ур—ніе на k и назвавъ частныя отъ раздѣленія этихъ количествъ на k буквами m, n и p , получимъ ур—ніе

$$mx + ny = p.$$

Если m и n —числа первые между собою, то найдемъ цѣлыя рѣшенія для x и y вида:

$$x = \alpha - nt, \quad y = \beta + mt.$$

Подставляя въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., въ 1-е, получимъ ур—ніе въ z и t : если оно допускаетъ цѣлыя рѣшенія, они будутъ вида:

$$z = \gamma + qt', \quad \text{и} \quad t = \delta + rt'.$$

Подставляя выражение для t въ формулы x и y , выразимъ всё три неизвестныя черезъ t' ; итакъ

$$x = (a - n^2) - nrt';$$

$$y = (\beta + m^2) + mrt';$$

$$z = \gamma + qt'.$$

Цѣлыя значенія t' дадутъ таковыя же и для x , y и z .

Примѣръ. Пусть даны уравненія

$$6x - 7y + 2z = 21 \dots (1)$$

$$8x + 5y + 6z = 49 \dots (2).$$

Исключимъ z , находимъ

$$10x - 26y = 14,$$

или, по сокращеніи на 2:

$$5x - 13y = 7,$$

откуда:

$$x = 4 - 13t, \quad y = 1 - 5t.$$

Подстановка въ (1) дастъ:

$$-43t + 2z = 4,$$

или

$$-\frac{43t}{2} + z = 2.$$

Положивъ $\frac{t}{2} = t'$, откуда $t = 2t'$, получимъ

$$-43t' + z = 2;$$

слѣдовательно

$$z = 2 + 43t', \quad t = 2t'.$$

Окончательно:

$$x = 4 - 26t', \quad y = 1 - 10t', \quad z = 2 + 43t'.$$

Легко видѣть, что данная система не допускаетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

406. Задача. Найти число, которое при раздѣленіи на 11, на 17 и на 23, давало бы послѣдовательно остатки 4, 9 и 10.

Обозначивъ частныя соответственно буквами x , y и z , а искомое число буквою N , имѣемъ:

$$\frac{N}{11} = x + \frac{4}{11}, \quad \frac{N}{17} = y + \frac{9}{17}, \quad \frac{N}{23} = z + \frac{10}{23},$$

или

$$N = 11x + 4, \quad N = 17y + 9, \quad N = 23z + 10.$$

откуда получается два уравненія:

$$11x + 4 = 17y + 9 \quad \text{и} \quad 11x + 4 = 23z + 10.$$

которые можно представить въ видѣ:

$$11x - 17y = 5 \quad (1)$$

$$11x - 23z = 6 \quad (2).$$

Изъ (1) имѣемъ:

$$x = \frac{5 + 17y}{11} = 2y + \frac{5(1-y)}{11} = 2y + 5t,$$

полагая $\frac{1-y}{11} = t$, откуда $y = 1 - 11t$.

Подставляя вмѣсто y его величину въ выраженіе x , получимъ

$$x = 2 - 17t,$$

и

$$y = 1 - 11t.$$

Подставляя выраженіе x въ ур. (2), находимъ

$$11(2 - 17t) - 23z = 6, \text{ или } 187t + 23z = 16 \quad (3).$$

$$\text{Отсюда } z = \frac{16 - 187t}{23} = -8t + \frac{16 - 3t}{23} = -8t + t',$$

полагая $\frac{16 - 3t}{23} = t'$, или $3t + 23t' = 16$, откуда

$$t = \frac{16 - 23t'}{3} = 5 - 8t' + \frac{1 + t'}{3} = 5 - 8t' + t'', \text{ полагая } \frac{1 + t'}{3} = t''.$$

Изъ послѣдняго ур-нія имѣемъ: $t' = 1 + 3t''$. Обратная подстановка даетъ послѣдовательно:

$$t = 5 - 8(1 + 3t'') + t'' = 13 - 23t'';$$

$$z = -8(13 - 23t'') - 1 + 3t'' = -105 + 187t''.$$

Остается x и y выразить въ зависимости отъ t'' ; получимъ:

$$x = -219 + 391t'',$$

$$y = -142 + 253t'',$$

$$z = -105 + 187t''.$$

Взявъ для N одну изъ трехъ формулъ этого числа, напр. $N = 11x + 4$ и подставивъ вмѣсто x найденное выраженіе, имѣемъ:

$$N = 11(-219 + 391t'') + 4 = -2405 + 4301t''.$$

Это и есть общая формула всѣхъ чиселъ, имѣющихъ то свойство, что при діленіи на 11, 17 и 23, они даютъ остатки, соответственно равные 4, 9 и 10. Полагая $t'' = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$ находимъ цѣлый рядъ чиселъ этого свойства. Такъ:

$$t'' = 0 \text{ даетъ } N = -2405;$$

$$t'' = 1 \text{ даетъ } N = 1896 \text{ и т. д.}$$

Если бы требовалось найти наименьшее положительное число данного свойства, то оно соответствовало бы наименьшему целому t'' , дающему для N — положительное значение. Такое t'' определяется из условия: $-2405 + 4301t'' > 0$, и есть $t'' = 1$; соответствующая величина N равна 1896.

407. Подобным же образом решается всякая система ур—ний, в которой число неизвестных одним больше числа уравнений, потому что последовательныя исключения неизвестных всегда приведут къ одному ур—нию съ 2 неизвестными. Пусть для примѣра дана

Задача. Найти число, которое при раздѣленіи на 5, 6, 7 и 8 давало бы послѣдовательные остатки 3, 1, 0 и 5.

Обозначивъ искомое число буквою N , а частныя по порядку буквами x , y , z и u , находимъ:

$$N = 5x + 3, \quad N = 6y + 1, \quad N = 7z, \quad N = 8u + 5;$$

откуда 3 ур—нія

$$1. \quad 5x - 6y = -2,$$

$$2. \quad 5x - 7z = -3,$$

$$3. \quad 5x - 8u = 2.$$

Въ данномъ случаѣ нѣтъ даже надобности въ исключеніи неизвестныхъ, ибо и безъ того каждое ур—ніе содержитъ только два неизвестныя.

Рѣшая ур—ніе $5x - 6y = -2$, находимъ:

$$y = 2 + 5t, \quad x = 2 + 6t.$$

Вставляя $x = 2 + 6t$ въ уравненіи (2), получаемъ ур—ніе

$$7z - 30t = 13,$$

изъ котораго находимъ

$$z = -11 + 30t', \quad t = -3 + 7t'.$$

Выразивъ x и y черезъ t' , имѣемъ

$$x = -16 + 42t', \quad y = -13 + 35t'.$$

Вставляя вмѣсто x его выраженіе черезъ t' въ ур. (3), имѣемъ

$$210t' - 8u = 82,$$

откуда:

$$t' = 1 + 4t'', \quad u = 16 + 105t''.$$

Выражая и остальные неизвестныя черезъ t'' , получаемъ

$$x = 26 + 168t'',$$

$$y = 22 + 140t'',$$

$$z = 19 + 120t'',$$

$$u = 16 + 105t''.$$

Вычисляя N , проще всего по формулѣ $N = 7z$, находимъ:

$$N = 133 + 840t'.$$

Итакъ, искомыми числа имѣютъ видъ $133 + 840t$; изъ нихъ наименьшее положительное $= 133$.

3. Рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ уравненія, содержащаго болѣе двухъ неизвѣстныхъ.

408. Ограничимся рассмотрѣніемъ случая одного уравненія съ 3-мя неизвѣстными.

Пусть будетъ $ax + by + cz = d$ такое ур., въ которомъ a, b, c и d — числа цѣлыя. Прежде всего необходимо, чтобы коэффициенты a, b и c не имѣли такого общаго множителя, который не заключался въ d ; иначе ур. не могло бы быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ. Если же эти коэффициенты имѣютъ общаго множителя, содержащагося въ d , то его удаляютъ сокращеніемъ; затѣмъ могутъ представиться два случая: 1) изъ трехъ коэффициентовъ a, b и c , по крайней мѣрѣ, два — первые между собою (или a и b , или a и c , или b и c), какъ напр. въ ур.—нѣ $12x + 11y + 15z = 141$, гдѣ 12 и 11 — числа первыя между собою; 2) или каждыя два коэффициента имѣютъ общаго множителя, такъ что нѣтъ ни одной пары коэффициентовъ первыхъ между собою; таково ур.—нѣ

$$12x + 15y + 20z = 181,$$

въ которомъ 12 и 15 дѣлятся на 3; 12 и 20 — на 4, а 15 и 20 — на 5.

409. Первый случай. Пусть a и b — числа первыя между собою; перенесемъ cz во вторую часть и приложимъ къ ур.—нѣ

$$ax + by = d - cz$$

примемъ § 394, принимая на время z за извѣстное; такимъ образомъ мы найдемъ формулы

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at,$$

въ которыхъ α и β — цѣлыя относительно z полиномы первой степени. Давая z и t произвольныя цѣлыя значенія, найдемъ цѣлыя значенія и для x и y .

Если неизвѣстныя должны быть, сверхъ того, положительными, то даетъ z произвольное, но цѣлое и положительное, значеніе, и полагаемъ

$$\alpha - bt > 0 \quad \text{и} \quad \beta + at > 0,$$

откуда получимъ для t два предѣла; смотря по тому, будутъ ли эти предѣлы одного смысла или разнаго, согласные между собою или противорѣчащіе, получимъ неограниченное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній для x и y , или же ограниченное, или же такихъ рѣшеній совсѣмъ не будетъ. Такимъ образомъ поступаютъ по отношенію ко всякому цѣлому положительному значенію z .

Примѣръ. Пусть дано ур.—нѣ

$$5x + 8y - 12z = 41.$$

Такъ какъ 5 и 8 числа первыя между собою, то указанный приемъ прямъ-
нымъ къ этому уравненію. Итакъ

$$5x + 8y = 41 + 12z,$$

откуда

$$x = \frac{41 + 12z - 8y}{5} = 8 + 2z - 2y + \frac{1 + 2z - 2y}{5},$$

или

$$x = 8 + 2z - 2y + t,$$

полагая $\frac{1 + 2y + 2z}{5} = t$, или $2y + 5t = -1 - 2z$. Отсюда

$$y = \frac{-1 - 2z + 5t}{2} = -z + 2t + \frac{t-1}{2} = -z + 2t + t'.$$

полагая $\frac{t-1}{2} = t'$, или $t = 1 + 2t'$.

Это значеніе, подставленное въ y , дастъ

$$y = -z + 2 + 4t' + t' \quad \text{или} \quad y = -z + 2 + 5t'$$

Подставляя найденныя для y и t величины въ формулу x , получимъ

$$x = 8 + 2z + 2z - 4 - 10t' + 1 + 2t' = 5 + 4z - 8t'.$$

Если ищемъ для x , y и z только положительныя цѣлыя значенія, то опре-
дѣляя предѣлы для t' , получимъ

$$t' > \frac{z-2}{8} \quad \text{и} \quad t' < \frac{4z+5}{8}.$$

Отсюда: $\frac{4z+5}{8} > \frac{z-2}{8}$, слѣд. $z > -\frac{41}{12}$, а какъ для z беремъ только по-
ложительныя значенія, то, включая сюда и 0, имѣемъ:

$$z = 0, 1, 2 \dots \text{до} +\infty.$$

При $z = 0$ находимъ $t' > -\frac{2}{8}$ и $t' < \frac{5}{8}$; слѣд. можно положить только
 $t' = 0$, что дастъ: $x = 5$ и $y = 2$.

При $z = 1$ имѣемъ $t' > -\frac{1}{8}$ и $t' < 1\frac{1}{8}$; сл. можно взять $t' = 0$ и $t = 1$,
что дастъ:

$$t' = 0 \dots y = 1, \quad x = 9;$$

$$t' = 1 \dots y = 6, \quad x = 1.$$

При $z = 2$ находимъ $t' > 0$ и $t' < 1\frac{5}{8}$; слѣд. можно взять $t' = 0$ (ибо
условіе $t' > 0$ не исключаетъ равенства) и $t = 1$.

При $t' = 0$ имѣемъ: $y = 0, \quad x = 13;$

» $t' = 1$ » $y = 5, \quad x = 5.$

При $s = 3$ получаемъ $t' = \frac{1}{5}$ и $t' = 2\frac{1}{8}$, слѣдов. можно взять: $t = 1$ и $t' = 2$, что дастъ:

$$t' = 1 \dots y = 4, \quad x = 9; \quad t = 2 \dots y = 9, \quad x = 1.$$

Продолжая такимъ образомъ, получимъ сколько угодно системъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

410. Второй случай. Положимъ теперь, что между тремя коэффициентами нѣтъ ни одной пары взаимно-первыхъ. Назовемъ буквою h общаго наиб. дѣлителя, наир., для a и b ; и пусть a' и b' будутъ частныя отъ раздѣленія a и b на h . Ур—ніе будетъ

$$ha'x + hb'y + cx = d,$$

откуда

$$a'x + b'y = \frac{d - cx}{h}.$$

Полагая, что первая часть есть число цѣлое, необходимо, чтобы и вторая равнялась цѣлому числу, наир. t ; въ такомъ случаѣ

$$a'x + b'y = t \dots (1)$$

$$\text{и } \frac{d - cx}{h} = t, \text{ или } cx + ht = d \dots (2).$$

Но a' и b' первыя между собою, какъ частныя отъ раздѣленія a и b на ихъ общ. наиб. дѣл. h ; а потому ур. (1) имѣетъ цѣлыя рѣшенія вида

$$x = \alpha - b't' \quad \text{и} \quad y = \beta + a't' \dots (3)$$

гдѣ α и β суть цѣлыя полиномы первой степени относительно t .

Замѣтъ, замѣчая, что c и h —первыя между собою числа, потому что множитель h , будучи общимъ для a и b , не дѣлитъ c ; усматриваемъ, что ур. (2) имѣетъ цѣлыя рѣшенія вида

$$s = \gamma - ht'' \quad \text{и} \quad t = \delta + ct'' \dots (4).$$

Подставляя эту величину t въ формулы x и y , мы представимъ эти неизвѣстныя цѣлыми полиномами первой степени въ t' и t'' ; между тѣмъ какъ s зависитъ только отъ t'' .

Если вопросъ требуетъ еще, чтобы x , y и s были положительными, то должно выразить, что величинны ихъ больше нуля. Въ полученныхъ неравенствахъ нужно стараться импировать t' и t'' и такимъ образомъ получить предѣлы для этихъ неопредѣленныхъ; однако, изъ теории неравенствъ мы знаемъ, что это не всегда возможно.

Примѣръ. Пусть даво ур—ніе

$$6x - 10y + 15s = 37.$$

Замѣчая, что 6 и 10 имѣютъ общаго дѣлителя 2, даемъ ур—нію видъ:

$$3x - 5y = \frac{37 - 15s}{2},$$

и полагаемъ, что

$$3x - 5y = t \quad \text{и} \quad \frac{37 - 15x}{2} = t \quad \text{или} \quad 15x + 2t = 37.$$

Изъ перваго находимъ

$$y = t - 3t' \quad \text{и} \quad x = 2t - 5t'.$$

Изъ втораго имѣемъ

$$x = 1 - 2t'' \quad \text{и} \quad t = 11 + 15t''.$$

Вставляя эту величину t въ выраженія y и x , получимъ

$$y = 11 + 15t'' - 3t' \quad \text{и} \quad x = 22 + 30t'' - 5t';$$

достаточно дать t' и t'' какия угодно цѣлыя значенія, и такимъ образомъ получатся цѣлыя значенія x , y и z .

Чтобы выдѣлить только положительныя, полагаемъ

$$1 - 2t'' > 0; \quad 11 + 15t'' - 3t' > 0; \quad 22 + 30t'' - 5t' > 0.$$

Первое даетъ $t'' < \frac{1}{2}$. Два другія можно написать такъ.

$$3t' - 15t'' < 11 \quad \text{и} \quad 5t' - 30t'' < 22,$$

или, умноживъ первое на 2:

$$6t' - 30t'' < 22 \quad \text{и} \quad 5t' - 30t'' < 22.$$

Изъ условія $2t' < 1$ имѣемъ $30t' < 15$. Складывая это неравенство съ каждымъ изъ двухъ предыдущихъ, находимъ условія

$$6t' < 37 \quad \text{и} \quad 5t' < 37,$$

изъ которыхъ второе заключается въ первомъ. Итакъ, количеству t' можно давать только значенія

$$+6, +5, +4, \dots \text{до} -\infty.$$

Изъ неравенствъ въ t' и t'' находимъ

$$t'' > \frac{6t' - 22}{30} \quad \text{и} \quad t'' > \frac{5t' - 22}{30}.$$

При положительныхъ t' первый предѣлъ больше втораго, поэтому нужно удерживать первый предѣлъ. При отрицательныхъ t' —наоборотъ, при чемъ для t'' слѣдуетъ брать только величины между 0 и этия вторымъ предѣломъ.

Такимъ образомъ, находимъ:

Для $t' = 6, 5, 4$,—нѣтъ соответствующихъ значеній для t'' .

При:

$t' = 3$	имѣемъ:	$t = 0;$	откуда	$x = 7;$	$y = 2;$	$z = 1.$
$t' = 2$	»	$t' = 0;$	»	12;	5;	1.
.						
$t' = -2$	»	$t'' = 0;$	»	$x = 32;$	$y = 17;$	$z = 1.$
	»	$-1;$	»	2;	2;	3.
$t' = -3$	»	0;	»	37;	20;	1.
	»	-1	»	7;	5;	3.
.						
$t' = -8$	»	$t = 0;$	»	$x = 62;$	$y = 35;$	$z = 1$
	»	$-1;$	»	32;	20;	3
	»	$-2;$		2;	5;	5.

и т. д.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

УРАВНЕНІЯ И НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ И ВЫС- ШІХЪ СТЕПЕНЕЙ.

ГЛАВА XXVIII.

Мнимыя величины и дѣйствія надъ ними.

411. Происхожденіе мнимыхъ количествъ. Мы видѣли, что извлеченіе корня привело къ открытію двойкаго рода новыхъ величинъ — *несоизмѣримыхъ* и *мнимыхъ*. Съ величинами перваго рода мы уже ознакомились; переходимъ къ изученію величинъ втораго рода — *мнимыхъ*.

Пусть требуется извлечь $\sqrt{-49}$; очевидно, что по абсолютной величинѣ этотъ корень равняется 7; но онъ не можетъ быть равенъ ни $+7$, ни -7 , ибо и $(+7)^2$ и $(-7)^2$ даютъ $+49$. Такимъ образомъ, квадратный корень изъ отрицательнаго числа не м. б. выраженъ никакимъ положительнымъ и никакимъ отрицательнымъ числомъ. Къ тому же заключенію придемъ и относительно $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt[6]{-17}$, вообще относительно $\sqrt[2n]{-a^{2n}}$. Итакъ, вообще: корень четной степени изъ отрицательнаго числа не м. б. выраженъ ни положительнымъ, ни отрицательнымъ числомъ, и представляетъ по этому *новый* разрядъ величинъ: ихъ называютъ *мнимыми*, въ отличіе отъ обыкновенныхъ положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, называемыхъ *дѣйствительными*.

412. Приведеніе мнимаго количества къ виду $\alpha\sqrt{-1}$. Всякое мнимое количество приводится къ зависимость отъ простѣйшаго мнимаго выраженія: $\sqrt{-1}$. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя мнимое выраженіе $\sqrt{-49}$ и разложивъ -49 на множители 49×-1 , а затѣмъ примѣнивъ правило извлеченія корня изъ произведенія, послѣдовательно найдемъ:

$$\sqrt{-49} = \sqrt{49 \times -1} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = +7 \cdot \sqrt{-1};$$

и вообще

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \cdot -1} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = \pm a\sqrt{-1}.$$

$$3. \quad i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}, \text{ или } -i.$$

$$4. \quad i^4 = i^3 \cdot i^2 = -1 \times -1 = +1.$$

Возводя затѣмъ i въ слѣдующія высшія степени, найдемъ прежнія значенія степеней. Такъ:

$$i^5 = i^4 \cdot i = +1 \cdot i = +i; \quad i^6 = i^5 \cdot i^2 = +1 \cdot -1 = -1; \quad i^7 = i^6 \cdot i = -i; \\ i^8 = i^4 \cdot i^4 = +1 \text{ и т. д.}$$

Можно доказать, что и при дальнѣйшемъ увеличеніи показателей будутъ периодически повторяться все тѣ же четыре значенія степеней, т.-е. $+i$, -1 , $-i$ и $+1$. Въ самомъ дѣлѣ, по отношенію къ дѣлителю 4 всѣ цѣлыя числа можно разбить на четыре группы: 1) числа, дѣлящіеся на 4 безъ остатка; 2) числа, дающія при дѣленіи на 4 въ остатокъ 1; 3) числа, дающія при дѣленіи на 4 въ остатокъ 2; 4) дающія при дѣленіи на 4, остатокъ 3. Всѣ они заключаются, поэтому, въ четырехъ формулахъ: $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, гдѣ n —какое угодно цѣлое положительное число.

Давая показателю каждую изъ этихъ четырехъ формъ, получимъ слѣдовательно:

$$1. \quad i^{4n} = (i^4)^n = (+1)^n = +1.$$

$$2. \quad i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = +1 \cdot i = +i.$$

$$3. \quad i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = +1 \cdot -1 = -1.$$

$$4. \quad i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = +1 \cdot -i = -i.$$

Отсюда заключаемъ: всѣ четныя степени i дѣйствительны, и равны: $+1$, когда показатель есть число кратное 4, и -1 , когда четный показатель не отлится безъ остатка на 4, всѣ нечетныя степени i мнимы, и равны: $+i$, когда показатель при дѣленіи на 4 даетъ остатокъ 1, и $-i$, когда при дѣленіи показателя на 4 получается остатокъ 3.

Напр., при дѣленіи 17 на 4 остатокъ $= 1$, слѣд. $i^{17} = +i$, и т. д.

415. ТЕОРЕМА. Чтобы комплексъ $a + bi$ равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы дѣйствительная часть и коэффициентъ при i равнялись нулю, т.-е. чтобы $a = 0$ и $b = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, равенство $a + bi = 0$ даетъ $a = -bi$, откуда, возвышая обѣ части въ квадратъ, и замѣчая, что

$$i^2 = -1, \text{ имѣемъ: } a^2 = b^2 \cdot -1, \text{ или } a^2 = -b^2, \text{ откуда } a^2 + b^2 = 0.$$

Но сумма квадратовъ двухъ дѣйствительныхъ количествъ a и b тогда только можетъ равняться нулю, когда каждое количество отдѣльно равно нулю; слѣд. $a = 0$ и $b = 0$.

Обратно, если $a = 0$ и $b = 0$, то оба члена комплекса обращаются въ 0, и слѣд. $a + bi = 0$.

416. ТЕОРЕМА. Чтобы два комплекса были равны, необходимо и достаточно, чтобы дѣйствительныя части и коэффициенты при i были отдѣльно равны между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія

$$a + bi = a + \beta i$$

по перенесеніи всѣхъ членовъ въ первую часть и по вынесеніи i за скобки, имѣемъ

$$(a - \alpha) + (b - \beta)i = 0,$$

откуда по предыдущей теоремѣ имѣемъ:

$$a - \alpha = 0 \text{ и } b - \beta = 0, \text{ или } a = \alpha \text{ и } b = \beta.$$

Слѣд. сказанное условіе необходимо. Оно и достаточно, ибо при $a = \alpha$ и $b = \beta$ оба члена становятся тождественными.

Дѣйствія надъ комплексными выраженіями.

417. Условившись правила, найденныя нами для дѣйствій надъ действительными количествами, распространять и на мнимыя, мы придемъ къ тому законному выводу, что *результатъ всякаго дѣйствія надъ комплексами представляетъ къ выраженіямъ того же вида.*

1. Сложеніе. Пусть требуется сложить $a + bi$ съ $c + di$. Прилагая сюда правилаложенія действительныхъ количествъ, найдемъ: $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di$; или, переменяя порядокъ членовъ и выводя i за скобки, получимъ:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

выраженіе того же вида какъ и слагаемыя.

Примѣръ. $(5 + 4i) + (7 - 9i) = 2 - 5i.$

Примѣчаніе. Сумма двухъ сопряженныхъ комплексовъ есть величина действительная; въ самомъ дѣлѣ:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

2. Вычитаніе. Вычитая $c + di$ изъ $a + bi$, имѣемъ

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i,$$

выраженіе того же вида, что и данныя.

3. Умноженіе. Принимая правило умноженія многочленовъ, данное для действительныхъ количествъ, и замѣчая, что $i^2 = -1$, найдемъ:

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + (bc + ad)i,$$

выраженіе того же вида, какъ и сомножители.

Такъ какъ произведеніе двухъ комплексовъ есть выраженіе того же вида, то, умноживъ это произведеніе на третій комплексъ, получимъ снова выраженіе комплексной формы и т. д. Слѣд. теорема справедлива для какого угодно числа мнимыхъ множителей.

Примѣръ. $(3 + 5i)(4 - 7i) = 12 + 20i - 21i + 35 = 47 - i$.

Примѣчаніе. Взявъ сопряженные комплексы, имѣемъ:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 + b^2,$$

т.-е. произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексовъ есть действительное положительное количество, равное квадрату ихъ общаго модуля.

4. Дѣленіе. Пусть требуется раздѣлить $a + bi$ на $c + di$. Изображая частное въ видѣ дроби, имѣемъ

$$\frac{a + bi}{c + di}.$$

Для уничтоженія мнимости знаменателя умножимъ числителя и знаменателя на $c - di$ (выраженіе, сопряженное съ знаменателемъ), и находимъ послѣдовательно:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac}{c^2 + d^2} + \frac{bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc}{c^2 + d^2}i - \frac{ad}{c^2 + d^2}i.$$

Примѣръ. $\frac{10 + 15i}{1 + 2i} = \frac{(10 + 15i)(1 - 2i)}{1 - 4i^2} = \frac{40 - 5i}{5} = 8 - i.$

5. Возвышеніе въ степень. Такъ какъ возвышеніе въ цѣлую положительную степень совершается рядомъ послѣдовательныхъ умноженій, а произведеніе комплексовъ есть выраженіе того же вида, то и степень комплекса имѣетъ тотъ же видъ. Слѣд.

$$(a + bi)^n = (a + bi)(a + bi) \dots (a + bi) = P + Qi,$$

гдѣ P и Q —действительныя количества.

Примѣры. I. $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$

II. $(1 - \sqrt{3} \cdot i)^3 = 1 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot i + 3 \cdot (\sqrt{3} \cdot i)^2 - (\sqrt{3} \cdot i)^3$
 $= 1 - 3\sqrt{3} \cdot i - 9 + 3\sqrt{3} \cdot i = -8.$

Если показитель степени—цѣлое отрицательное число, то

$$(a + bi)^{-n} = \left(\frac{1}{a + bi} \right)^n = \frac{(a - bi)^n}{(a^2 + b^2)^n} = \frac{M + Ni}{(a^2 + b^2)^n} = R + Qi,$$

слѣд. степень имѣетъ тотъ же видъ.

6. Извлеченіе корня. Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ комплекса $a + bi$. Докажемъ, что результатъ дѣйствія и въ этомъ случаѣ будетъ комплексъ того же вида, т.-е. что

$$\sqrt{a + bi} = x + yi \dots (1).$$

Предположеніе это будетъ доказано, если окажется возможнымъ найти для x и y такіа действительныя значенія, которыя удовлетворяли бы этому равенству. Возвысимъ обѣ части въ квадратъ для освобожденія первой части отъ радикала, получимъ ур.

$$a + bi = x^2 - y^2 + 2xyi \dots (2).$$

Мы знаем (§ 416), что такое равенство возможно только тогда, когда действительныя и мнимыя количества отдѣльно равны между собою; слѣд. ур. (2) распадается на два:

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{и} \quad 2xy = b \quad . \quad . \quad (3).$$

Такимъ образомъ неизвѣстныя x и y должны удовлетворять двумъ уравненіямъ второй степени, изъ которыхъ они всегда могутъ быть опредѣлены. Для этого возводимъ оба ур—нія въ квадратъ и складываемъ:

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2 \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, имѣемъ

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Передъ радикаломъ надо брать одинъ знакъ \pm , потому что первая часть, какъ сумма квадратовъ действительныхъ количествъ, всегда положительна. Такимъ образомъ, система ур—ній (3) замѣняется слѣдующею

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad x^2 - y^2 = a.$$

Складывая сначала, а потомъ вычитая эти ур—нія, находимъ

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2},$$

откуда

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \text{и} \quad y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Такъ какъ абсолютная величина $\sqrt{a^2 + b^2}$ больше абсолютной величины a или $-a$, и корни эти находятся подъ верхнимъ радикаломъ со знакомъ \pm , то подкоренная величина въ выраженіяхъ x и y положительна, а потому x и y —действительны. Такимъ образомъ, всегда можно найти для x и для y действительныя количества, удовлетворяющія ур—нію (1), а потому преобразование, выражаемое этимъ ур—ніемъ, всегда возможно.

Уравненіе $2xy = b$ показываетъ, что когда b положительно, x и y должны имѣть одинаковые знаки, когда же b отрицательно, знаки x и y должны быть разные. Поэтому, разумѣя подъ b —абсолютное число, и слѣдов. знаки при b —онозначательными, имѣемъ двѣ формулы:

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right] \quad . \quad . \quad (I)$$

$$\sqrt{a - bi} = \pm \left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right] \quad . \quad . \quad (II)$$

Примѣры: I. Пусть требуется преобразовать $\sqrt{5 + 12i}$.

Полагая въ формулѣ (I) $a = 5$, $b = 12$, найдемъ:

$$\begin{aligned} \sqrt{5 + 12i} &= \pm \left[\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5^2 + 12^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{5^2 + 12^2}}{2}} \right] \\ &= \pm \left[\sqrt{\frac{5 + 13}{2}} + i \sqrt{\frac{-5 + 13}{2}} \right] = \pm (3 + 2i). \end{aligned}$$

II. Извлечь квадратный корень из $3-4i$.

Полагая въ формулѣ (II) $a = 3$ и $b = 4$, найдемъ:

$$\begin{aligned}\sqrt{3-4i} &= \pm \left[\sqrt{\frac{3+1}{2} \pm \frac{3^2+4^2}{2}} - \sqrt{-\frac{3+1}{2} \pm \frac{3^2+4^2}{2}} \right] \\ &= \pm \left[\sqrt{\frac{3+5}{2}} - \sqrt{\frac{-3+5}{2}} \right] = \pm (2-i).\end{aligned}$$

Здѣсь мы разсматривали только квадратные корни изъ отрицательныхъ чиселъ и изъ комплексовъ. Далѣе будетъ показано, что и корни какого угодно порядка представляютъ комплексъ того же вида, т. е. $a + bi$.

418. Приложение. Приводимъ нѣкоторые приложенія, съ цѣлью показать, какимъ образомъ употребленіе комплексныхъ выраженій даетъ возможность безъ труда достигать результатовъ, выводъ которыхъ безъ помощи этого рода выраженій представлялъ бы значительныя трудности.

Теорема I. Если данное число есть сумма двухъ квадратовъ, то и квадратъ его также есть сумма двухъ квадратовъ.

Пусть n есть число, равное суммѣ двухъ квадратовъ a^2 и b^2 , т. е.

$$n = a^2 + b^2.$$

Замѣнивъ, что $a^2 + b^2$ есть произведение двухъ взаимно сопряженныхъ выраженій $a + bi$ и $a - bi$, замѣняемъ это выраженіе слѣдующимъ:

$$n = (a + bi)(a - bi).$$

Возвышая обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned}n^2 &= (a + bi)^2 \cdot (a - bi)^2 = (a^2 - b^2 + 2abi)(a^2 - b^2 - 2abi) \\ &= (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 + (2ab)^2,\end{aligned}$$

т. е. n^2 есть сумма квадратовъ чиселъ: $a^2 + b^2$ и $2ab$. Такимъ образомъ, не только теорема доказана, но полученныя формулы указываютъ и самый способъ разложенія n^2 на сумму двухъ квадратовъ.

Пусть, наприм., $n = 5$. Это число есть сумма двухъ квадратовъ: $2^2 + 1^2$. Полагая $a = 2$ и $b = 1$, по выведенной формулѣ имѣемъ: $n^2 = (2^2 + 1^2)^2 + (2 \cdot 2 \cdot 1)^2$, или $25 = 3^2 + 4^2$.

Положимъ теперь $n = 25$, $a = 4$, $b = 3$, по той же формулѣ найдемъ: 25^2 или $625 = (4^2 + 3^2)^2 + (2 \cdot 4 \cdot 3)^2 = 7^2 + 24^2$; и т. д.

Теорема II. Произведеніе двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое есть сумма двухъ квадратовъ, также равно суммѣ двухъ квадратовъ.

Пусть даны четыре комплексъ: $a + bi$, $a - bi$, $a' + b'i$, $a' - b'i$ попарно сопряженные; взявъ произведеніе

$$(a + bi)(a - bi)(a' + b'i)(a' - b'i),$$

умноживъ перваго множителя на второй и третьяго на четвертый, найдемъ: $(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$. Если же помножимъ перваго на третій и второго на четвертый, получимъ $[aa' - bb' + (ab' - ba')i]$, $[aa' - bb' - (ab' - ba')i]$, или $(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2$. Слѣд.

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2. \quad (1)$$

Если умножить первого на четвертый и второго на третий, то произведение приметъ видъ: $aa' + bb' + (a'b - ab')i$, $[aa' + bb' - (a'b - ab')i]$, или $(aa' + bb')^2 - (a'b - ab')^2$. Такимъ образомъ имѣемъ другую формулу:

$$(a^2 - b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' + bb')^2 + (a'b - ab')^2, \dots (2).$$

Формулы (1) и (2) доказываютъ предложенную теорему, показывая вмѣстѣ съ тѣмъ, что разложение взятаго произведенія на сумму двухъ квадратовъ можно было выполнить двоякимъ образомъ. Эта теорема была найдена *Леонардомъ Пизанскимъ*.

ТЕОРЕМА III. *Произведение двухъ чиселъ, изъ коихъ каждое есть сумма четырехъ квадратовъ, также равно суммѣ четырехъ квадратовъ.*

Възявъ тождество

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a-d} + \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-d} \right) + \left(\frac{1}{a-c} - \frac{1}{a-d} \right),$$

замѣнивъ въ немъ три указанныхъ вычитанія и освободивъ его отъ знаменателя; найдемъ

$$(b-d)(a-c) = (b-c)(a-d) + (c-d)(a-b).$$

Положивъ теперь

$$a = \frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2}, \quad b = \frac{p'^2 + q'^2}{r'^2 + s'^2}, \quad c = \frac{r^2 + s^2}{p^2 + q^2}, \quad d = \frac{r'^2 + s'^2}{p'^2 + q'^2},$$

замѣнимъ въ предыдущемъ тождествѣ a , b , c и d ихъ минимыми выраженіями; получимъ

$$(p^2 + q^2 - r^2 - s^2)(p'^2 + q'^2 - r'^2 - s'^2) = (pp' + qq' + rr' + ss')^2 + (pr - rs - qr - sr)^2 + (p'r' + q's' - rp - rq)^2 + (p's' + q'r - zp - rq)^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема эта принадлежитъ *Эйлеру*. Приведенное доказательство еще проще доказательства, даннаго *Эрмитомъ* и основаннаго также на употребленіи комплексовъ.

ГЛАВА XXIX.

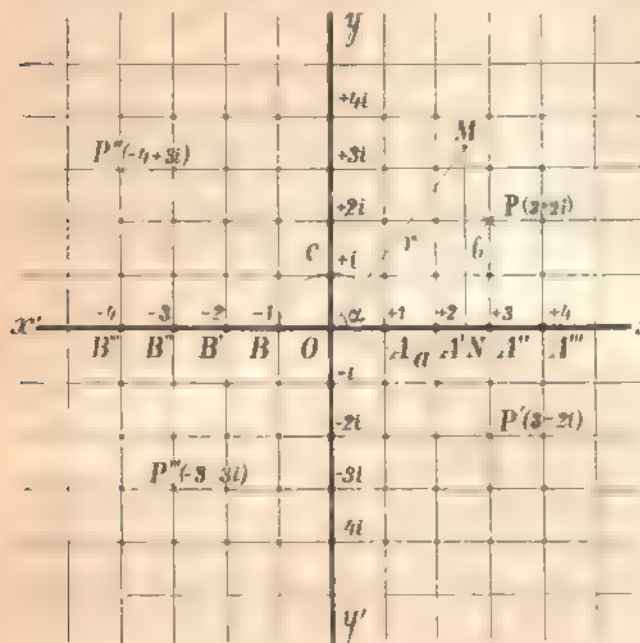
Представленіе мнимыхъ величинъ — Обобщеніе основныхъ алгебраическихъ законовъ. — Предметъ Алгебры.

419 Мы уже видѣли, что если взять неограниченную прямую OX , изъ ней отъ начала O отсчитать за единицу, и установиться единицу, отсчитываемыми представлять числа положительныя, то длины, отсчитываемыя въ обратную сторону, будутъ служить геометрическимъ представленіемъ чиселъ отрицательныхъ. Если, если отрѣзокъ OA будетъ представлять единицу, то отрѣзки OB , OC , OD , OE , OF , OG , OH , OI , OJ , OK , OL , OM , ON , OP , OQ , OR , OS , OT , OU , OV , OW , OX , OY , OZ , OA' , OB' , OC' , OD' , OE' , OF' , OG' , OH' , OI' , OJ' , OK' , OL' , OM' , ON' , OP' , OQ' , OR' , OS' , OT' , OU' , OV' , OW' , OX' , OY' , OZ' будутъ представлять числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013, 1014, 1015, 1016, 1017, 1018, 1019, 1020, 1021, 1022, 1023, 1024, 1025, 1026, 1027, 1028, 1029, 1030, 1031, 1032, 1033, 1034, 1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1040, 1041, 1042, 1043, 1044, 1045, 1046, 1047, 1048, 1049, 1050, 1051, 1052, 1053, 1054, 1055, 1056, 1057, 1058, 1059, 1060, 1061, 1062, 1063, 1064, 1065, 1066, 1067, 1068, 1069, 1070, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1076, 1077, 1078, 1079, 1080, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1087, 1088, 1089, 1090, 1091, 1092, 1093, 1094, 1095, 1096, 1097, 1098, 1099, 1100, 1101, 1102, 1103, 1104, 1105, 1106, 1107, 1108, 1109, 1110, 1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1117, 1118, 1119, 1120, 1121, 1122, 1123, 1124, 1125, 1126, 1127, 1128, 1129, 1130, 1131, 1132, 1133, 1134, 1135, 1136, 1137, 1138, 1139, 1140, 1141, 1142, 1143, 1144, 1145, 1146, 1147, 1148, 1149, 1150, 1151, 1152, 1153, 1154, 1155, 1156, 1157, 1158, 1159, 1160, 1161, 1162, 1163, 1164, 1165, 1166, 1167, 1168, 1169, 1170, 1171, 1172, 1173, 1174, 1175, 1176, 1177, 1178, 1179, 1180, 1181, 1182, 1183, 1184, 1185, 1186, 1187, 1188, 1189, 1190, 1191, 1192, 1193, 1194, 1195, 1196, 1197, 1198, 1199, 1200, 1201, 1202, 1203, 1204, 1205, 1206, 1207, 1208, 1209, 1210, 1211, 1212, 1213, 1214, 1215, 1216, 1217, 1218, 1219, 1220, 1221, 1222, 1223, 1224, 1225, 1226, 1227, 1228, 1229, 1230, 1231, 1232, 1233, 1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1239, 1240, 1241, 1242, 1243, 1244, 1245, 1246, 1247, 1248, 1249, 1250, 1251, 1252, 1253, 1254, 1255, 1256, 1257, 1258, 1259, 1260, 1261, 1262, 1263, 1264, 1265, 1266, 1267, 1268, 1269, 1270, 1271, 1272, 1273, 1274, 1275, 1276, 1277, 1278, 1279, 1280, 1281, 1282, 1283, 1284, 1285, 1286, 1287, 1288, 1289, 1290, 1291, 1292, 1293, 1294, 1295, 1296, 1297, 1298, 1299, 1300, 1301, 1302, 1303, 1304, 1305, 1306, 1307, 1308, 1309, 1310, 1311, 1312, 1313, 1314, 1315, 1316, 1317, 1318, 1319, 1320, 1321, 1322, 1323, 1324, 1325, 1326, 1327, 1328, 1329, 1330, 1331, 1332, 1333, 1334, 1335, 1336, 1337, 1338, 1339, 1340, 1341, 1342, 1343, 1344, 1345, 1346, 1347, 1348, 1349, 1350, 1351, 1352, 1353, 1354, 1355, 1356, 1357, 1358, 1359, 1360, 1361, 1362, 1363, 1364, 1365, 1366, 1367, 1368, 1369, 1370, 1371, 1372, 1373, 1374, 1375, 1376, 1377, 1378, 1379, 1380, 1381, 1382, 1383, 1384, 1385, 1386, 1387, 1388, 1389, 1390, 1391, 1392, 1393, 1394, 1395, 1396, 1397, 1398, 1399, 1400, 1401, 1402, 1403, 1404, 1405, 1406, 1407, 1408, 1409, 1410, 1411, 1412, 1413, 1414, 1415, 1416, 1417, 1418, 1419, 1420, 1421, 1422, 1423, 1424, 1425, 1426, 1427, 1428, 1429, 1430, 1431, 1432, 1433, 1434, 1435, 1436, 1437, 1438, 1439, 1440, 1441, 1442, 1443, 1444, 1445, 1446, 1447, 1448, 1449, 1450, 1451, 1452, 1453, 1454, 1455, 1456, 1457, 1458, 1459, 1460, 1461, 1462, 1463, 1464, 1465, 1466, 1467, 1468, 1469, 1470, 1471, 1472, 1473, 1474, 1475, 1476, 1477, 1478, 1479, 1480, 1481, 1482, 1483, 1484, 1485, 1486, 1487, 1488, 1489, 1490, 1491, 1492, 1493, 1494, 1495, 1496, 1497, 1498, 1499, 1500, 1501, 1502, 1503, 1504, 1505, 1506, 1507, 1508, 1509, 1510, 1511, 1512, 1513, 1514, 1515, 1516, 1517, 1518, 1519, 1520, 1521, 1522, 1523, 1524, 1525, 1526, 1527, 1528, 1529, 1530, 1531, 1532, 1533, 1534, 1535, 1536, 1537, 1538, 1539, 1540, 1541, 1542, 1543, 1544, 1545, 1546, 1547, 1548, 1549, 1550, 1551, 1552, 1553, 1554, 1555, 1556, 1557, 1558, 1559, 1560, 1561, 1562, 1563, 1564, 1565, 1566, 1567, 1568, 1569, 1570, 1571, 1572, 1573, 1574, 1575, 1576, 1577, 1578, 1579, 1580, 1581, 1582, 1583, 1584, 1585, 1586, 1587, 1588, 1589, 1590, 1591, 1592, 1593, 1594, 1595, 1596, 1597, 1598, 1599, 1600, 1601, 1602, 1603, 1604, 1605, 1606, 1607, 1608, 1609, 1610, 1611, 1612, 1613, 1614, 1615, 1616, 1617, 1618, 1619, 1620, 1621, 1622, 1623, 1624, 1625, 1626, 1627, 1628, 1629, 1630, 1631, 1632, 1633, 1634, 1635, 1636, 1637, 1638, 1639, 1640, 1641, 1642, 1643, 1644, 1645, 1646, 1647, 1648, 1649, 1650, 1651, 1652, 1653, 1654, 1655, 1656, 1657, 1658, 1659, 1660, 1661, 1662, 1663, 1664, 1665, 1666, 1667, 1668, 1669, 1670, 1671, 1672, 1673, 1674, 1675, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680, 1681, 1682, 1683, 1684, 1685, 1686, 1687, 1688, 1689, 1690, 1691, 1692, 1693, 1694, 1695, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700, 1701, 1702, 1703, 1704, 1705, 1706, 1707, 1708, 1709, 1710, 1711, 1712, 1713, 1714, 1715, 1716, 1717, 1718, 1719, 1720, 1721, 1722, 1723, 1724, 1725, 1726, 1727, 1728, 1729, 1730, 1731, 1732, 1733, 1734, 1735, 1736, 1737, 1738, 1739, 1740, 1741, 1742, 1743, 1744, 1745, 1746, 1747, 1748, 1749, 1750, 1751, 1752, 1753, 1754, 1755, 1756, 1757, 1758, 1759, 1760, 1761, 1762, 1763, 1764, 1765, 1766, 1767, 1768, 1769, 1770, 1771, 1772, 1773, 1774, 1775, 1776, 1777, 1778, 1779, 1780, 1781, 1782, 1783, 1784, 1785, 1786, 1787, 1788, 1789, 1790, 1791, 1792, 1793, 1794, 1795, 1796, 1797, 1798, 1799, 1800, 1801, 1802, 1803, 1804, 1805, 1806, 1807, 1808, 1809, 1810, 1811, 1812, 1813, 1814, 1815, 1816, 1817, 1818, 1819, 1820, 1821, 1822, 1823, 1824, 1825, 1826, 1827, 1828, 1829, 1830, 1831, 1832, 1833, 1834, 1835, 1836, 1837, 1838, 1839, 1840, 1841, 1842, 1843, 1844, 1845, 1846, 1847, 1848, 1849, 1850, 1851, 1852, 1853, 1854, 1855, 1856, 1857, 1858, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1864, 1865, 1866, 1867, 1868, 1869, 1870, 1871, 1872, 1873, 1874, 1875, 1876, 1877, 1878, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1889, 1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910, 1911, 1912, 1913, 1914, 1915, 1916, 1917, 1918, 1919, 1920, 1921, 1922, 1923, 1924, 1925, 1926, 1927, 1928, 1929, 1930, 1931, 1932,$

къ xx' , опишемъ изъ точки O радиусомъ, равнымъ единицѣ длины, окружность; радиусъ OC будетъ среднею пропорциональною между отрезками $OA = +1$ и $OB = -1$ діаметра; слѣд. $OC = (+1) \cdot (-1) = -1$, откуда $OC = \sqrt{-1}$, т. е.

$OC = i$. Итакъ, чистыя мнимыя числа $i, 2i, 3i, \dots$ должно отсчитывать на перпендикулярѣ yy' вверхъ отъ O , а числа $-i, -2i, -3i, \dots$ на томъ же перпендикулярѣ внизъ отъ O . Поэтому прямая yy' называется *осью мнимыхъ чиселъ*, или *мнимой осью*.

Пусть требуется теперь представить геометрически комплексное число $a + bi$. Для этого на действительной оси откладываемъ число a , вправо отъ O , если оно положительно, и влево, если отрицательно. Потомъ на мнимой оси откладываемъ число bi вверхъ отъ O , если оно положительно, и внизъ, если отрицательно. Изъ точекъ a и bi возводимъ перпендикуляры къ осямъ: пересѣченіе этихъ перпенди-



Черт. 44.

кулировать и дать точку, которая геометрически представляетъ число $a + bi$. Вѣрнѣе, точка P представляетъ число $3 + 2i$, точка P' — число $3 - 2i$, P'' — число $-4 + 3i$, и P''' — число $-3 - 3i$. Согласно этому, комплексныя количества изображаются точками, находящимися изъ плоскости по обѣ стороны действительной оси; отсюда называемъ *матричными числами*, данное Гадсонъ комплекснымъ числамъ. Точку P называемъ *аффиксомъ* комплекса $3 + 2i$, точку P' — *аффиксомъ* комплекса $3 - 2i$ и т. д.

Пусть комплексъ $a + bi$ опредѣляетъ точку M ; соединивъ ее съ началомъ и назвавъ OM буквою r , изъ треугольника MNO получимъ: $OM = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Слѣд., модуль комплекснаго есть длина линіи OM , соединяющей точку M съ началомъ. Единъ линіи OM недостаточно для опредѣленія точки M , ибо всѣ точки плоскости, лежащія на окружности, описанной изъ O радиусомъ r , будутъ находиться отъ начала на разстояніи r . Но если выѣсть съ длиной линіи r данъ будетъ уголъ, составленный ею съ осью ox , то этихъ двухъ данныхъ достаточно для опредѣленія точки M . Такимъ образомъ, абсолютная длина линіи $OM = r$ и направленіе ея, выражаемое угломъ α , составленнымъ этой линіею съ ox , вполнѣ опредѣляютъ точку M , такъ что положеніе этой точки можетъ быть представленъ какъ комплексомъ $a + bi$, такъ и комплексомъ r_2 , которые и называются поэтому *геометрически-равными*. r называется также *модулемъ* комплекса r_2 , и есть количество *существенно положительное*; уголъ α наз. *аргументомъ* комплекса; онъ считается въ направленіи ox OM , обратномъ движенію часовой стрѣлки. Согласно этому, комплексный символъ r_2 можно разсматривать условно какъ сумму количествъ a и bi , каждое изъ которыхъ можетъ имѣть только два противоположныхъ направленія, такъ, на нашемъ чертежѣ будемъ имѣть

$$r_a = a + bi.$$

Аргументъ можно увеличивать или уменьшать на любое число окружностей 2π , ибо направление линии OM не измѣнится, если повернуть эту линию на 4, 8, ... прямыхъ угловъ; сл.

$$r_a = r_a + 2\pi = r_a + 4\pi = \dots$$

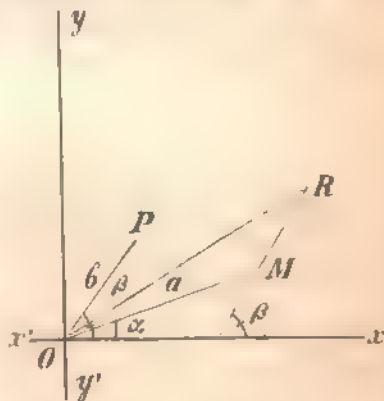
Если линию OM повернуть до совпаденія съ Ox , то уголъ α обратится въ нуль, и комплексъ приметъ видъ r_0 . Но отрезокъ OM представляетъ действительное положительное количество; сл. послѣднее можетъ быть изображено символомъ r_0 , гдѣ r — его абсолютная величина. Увеличивъ уголъ α до π , получимъ комплексъ r_π , представляющій, слѣд., действительное отрицательное число.

Знаки 0 и π играютъ роль знаков $+$ и $-$. Чистое мнимое количество bi изображается комплексомъ $b \frac{\pi}{2}$; мнимое $-bi$ комплексомъ $b \frac{3\pi}{2}$.

Примѣчаніе. Вычисленіе мнимыхъ чиселъ $a + bi$ было впервые изложено *Бомбелли* въ его *Алгебрѣ* (1579); но послѣдствіемъ введенія въ общій употребленіе въ анализѣ мнимыхъ величинъ принадлежитъ знаменитому *Эйлеру* (1707—1783). Первыя попытки геометрическаго представленія этихъ количествъ принадлежатъ члену Петербургской Академіи *Плукъ Герингу Кюну* (1650—1709) и относятся къ 1750 году. Аббатъ *Вюэ* (Вюсс) первый предложилъ, въ 1806, представлять мнимыя единицы на оси перпендикулярной къ действит. оси. Въ томъ же году *Робертъ Арианъ*, изъ Женевы, приложилъ новую теорію къ доказательству нѣкоторыхъ теоремъ. Но усовершенствованіе этой теоріи принадлежитъ *Гиссу*, и эту же общія комплексныя количества правомъ гражданства въ науку благодаримъ количественно, ученый Гауссъ *Риманъ* пришилъ къ весьма важнымъ открытіямъ. Развитію теоріи мнимыхъ количествъ также много способствовали *Кони, Лежандра, Абель, Якоби и Вейерштрассъ*.

420. Обобщеніе основныхъ алгебраическихъ законовъ. Опредѣленія действительныхъ остаются прежніе; но какъ понятіе о комплексѣ шире понятія объ обыкновенныхъ положительныхъ и отрицательныхъ количествахъ, то и дѣйствія надъ комплексами должны получить болѣе широкій смыслъ.

421. Сложеніе комплексомъ. Такъ какъ всякій комплексъ опредѣляется длиною нѣкоторой линіи и ея направленіемъ, то подъ сложеніемъ комплексомъ разумѣютъ слѣдующую операцію: сложить нѣсколько комплексомъ значитъ помѣстить начало втораго въ концѣ перваго, давая второму направленіе, опредѣляемое его аргументомъ; начало третьяго въ концѣ втораго и т. д. Суммою будетъ линія, соединяющая начало перваго комплекса съ концомъ послѣдняго. Очевидно, это представленіе сложения есть не болѣе какъ обобщеніе понятія о сложении противоположныхъ величинъ, заключающа въ себѣ послѣднее, а равно и арифметическое сложеніе, какъ частные случаи.



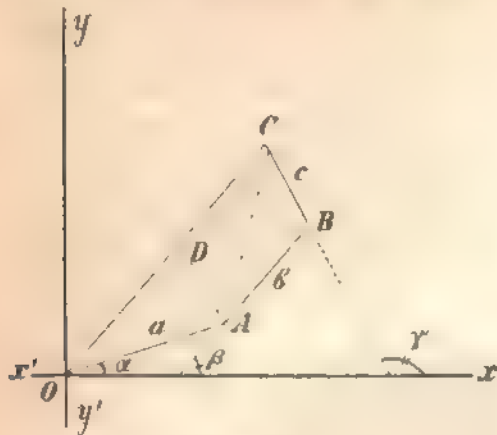
Черт. 45.

Такъ, если требуется сложить два комплекса a_1 и b_2 , чертимъ линію $OM = a_1$ подъ угломъ α съ положительнымъ направленіемъ оси x , затѣмъ наносимъ отъ точки M линію $MR = b_2$ подъ угломъ β съ тою же осью, и соединяемъ точки O и R линію OR по величинѣ и направленію и выразитъ искомую сумму.

Три точки O , M и R , вообще, лежатъ не на одной прямой, образуя треугольникъ MOR ; замѣчая, что въ треугольникѣ одна сторона меньше суммы двухъ другихъ, но больше ихъ разности, находимъ, что модуль суммы двухъ комплексомъ меньше или равенъ суммѣ модулей слагаемыхъ, и больше или равенъ ихъ разности.

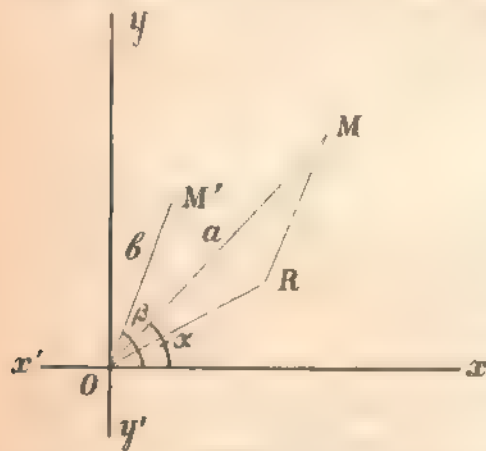
Поступая такимъ же образомъ съ нѣсколькими комплексами a_1, b_2, c , найдемъ ихъ сумму, выражаемую по величинѣ и направленію линіей OC , соединяющей начало 1-го комплекса съ концомъ послѣдняго. (Черт. 45).

Когда всѣ вершины многоугольного контура $OABC$ находятся не на одной прямой, то OC , какъ прямая, будетъ меньше ломаной $OABC$; если же всѣ вершины O, A, B, C будутъ на одной прямой, то OC будетъ меньше или равна суммѣ сторонъ контура. Итакъ модуль суммы нѣсколькихъ комплексовъ равенъ или меньше суммы модулей слагаемыхъ.



Черт. 46.

равенства и параллельности сторонъ AD и BC слѣдуетъ, что фигура $ADCB$ есть параллелограммъ, сл. DC и AB равны и параллельны, такимъ образомъ, прямая AD представляетъ комплексъ c_1 , а DC —комплексъ b_2 . Видимъ, что конецъ послѣдняго слагаемаго суммы $a_1 + c_1 + b_2$ находится въ той же точкѣ C , какъ и конецъ послѣдняго слагаемаго суммы $a_1 + b_2 + c_1$; обѣ суммы, слѣдоват., равны



Черт. 47.

самомъ дѣлѣ, сумма двухъ противоположныхъ комплексовъ a_1 и $a_2 + \pi$ какъ не трудно убѣдиться, равна нулю. Слѣдов.

$$m_1 + a_2 + \pi + a_2 = m_1 + (a_2 + \pi + a_2) = m_1 + 0 = m_1.$$

422. Законъ перемѣстительный въ сложеніи.

Возьмемъ тѣ же три комплекса a_1, b_2, c_1 . Чтобы построить сумму $a_1 + b_2 + c_1$, проводимъ послѣдовательно прямыя $OA = a$, $AB = b$, $BC = c$ подъ углами α, β и γ съ Ox . Сумма выразится линіей OC . Чтобы построить сумму $a_1 + c_1 + b_2$, проведемъ изъ точки A прямую AD , равную и параллельную BC , и соединимъ D съ C ; изъ

423. Законъ сочетательный въ сложеніи.

Разсмотримъ тѣ же три комплекса: $a_1 = OA$, $b_2 = AB$ и $c_1 = BC$. (Черт. 46). Ихъ сумма равна OC . Но $AC = b_2 + c_1$, и OC можно разсматривать какъ сумму комплексовъ OA и AC . Слѣд.

$$a_1 + b_2 + c_1 = a_1 + (b_2 + c_1),$$

т. е. комплексъ сочетательный въ сложеніи.

424. Вычитаніе комплексовъ.

Вычитаніе опредѣляется какъ дѣйствіе, обратное сложенію. Легко видѣть, что вычитаніе комплекса a_1 сводится къ приращенію противоположнаго комплекса $a_2 + \pi$. Въ

Таким образом, $m_1 + a_2 \pm$ есть результат вычитания $m_2 \sim a_2$, потому что этот результат, сложенный с a_2 , даёт m_1 .

Пусть (черт. 47) из комплекса OM a_1 вычесть комплекс OM b_2 . Согласно вышеприведённому правилу вычитания, должно к OM прибавить комплекс, противооположный комплексу OM, т. е. от точки M провести линию MR, параллельную OM и равную b_2 , но в противоположном направлении. Сумма OM и MR, т. е. OR и представить искомую разность.

Из этого построения следует, что т. к. точки O, M, R, вообще, составляют треугольник, то модуль разности двух комплексных не больше суммы модулей обоих комплексных и не меньше из разности.

425. Умножение комплексных. Разпространяя определение умножения на комплексные, мы должны разуметь под этим действием следующее: *умножить комплекс b_2 на a_1 значить произведению модулей сложить обычные, как и нужно произведению двух положительных чисел для составления из них множителя.* Но чтобы из a_1 или из b_2 составить a_2 , надо: 1) помножить абсолютную единицу на a и поместить a на OX, вследствие чего получится a_0 ; 2) повернуть a_0 на угол α . Слѣд., чтобы умножить b_2 на a_2 , нужно сначала помножить модуль множителя на a , вследствие чего получится ba_2 , затемъ этот комплекс повернуть на угол α , т. е. к аргументу β можно прибавить аргумент множителя. Итого: *перемножить комплекс значить перемножить их модули и сложить аргументы.* $b_2 \cdot a_2 = (ba)_2 + \alpha$.

Въ этомъ определѣніи исключаются только частные случаи, опредѣлены умножены абсолютныхъ чиселъ и противоположныхъ. Такимъ образомъ, имѣемъ

$$\begin{aligned} a_1 \cdot b_1 &= a_0 \cdot b_0 = (ab)_0 = ab, \\ a_1 \cdot b_2 &= a_2 \cdot b_0 = a^2_2 = a^2, & a_2 \cdot b_1 &= ab_2 = ab, \\ a_2 \cdot b_2 &= a_0 \cdot b_2 = ab_2 = -ab, \\ a_1 \cdot (-b_1) &= a_2 \cdot b_2 = (ab)_{2\pi} = (ab)_0 = +ab. \end{aligned}$$

426. Свойства произведенія. Изъ опредѣленія умножения комплексныхъ прямо вытекаетъ

I. $a_2 \cdot b_2 = (ab)_{2\pi} = \alpha$, по $ab = ba$ и $\alpha + 2\pi = \alpha$, слѣд., $(ab)_{2\pi} = \alpha = ba_{2\pi} = \alpha$, или, по опредѣленію умножения, $b_2 \cdot a_2$. Итакъ

$$a_2 \cdot b_2 = b_2 \cdot a_2.$$

т. е. произведеніе двухъ множителей не измѣняется отъ перемѣны ихъ порядка.

$$\text{II. } a_2(b_2 c_2) = a_2(bc)_{2\pi} = (abc)_{2\pi} = \alpha = a_2 b_2 c_2,$$

т. е. для умножения комплекса a_2 на произведение двухъ другихъ, b_2 и c_2 , можно a_2 умножить посплошнательно на каждый изъ комплексныхъ b_2 и c_2 . Въ этомъ заключается законъ сочетательный въ умноженіи.

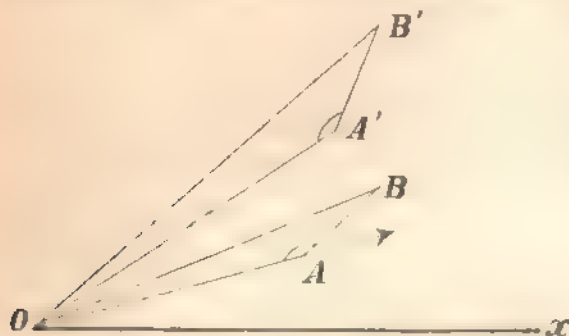
Они вытекаютъ на этихъ двухъ предложенияхъ, не трудно указать законъ перемѣнителенный или какого угодно числа множителей.

III. Докажемъ равенство

$$a_2(b_2 + c_2) = a_2 b_2 + a_2 c_2.$$

выражающее закон распределительный въ умножении. Комплексы b_β и c_γ , подлежащие сложению, образуют между собою некоторый угол β , дополнительный до γ къ углу λ треугольника OAB . Последний вноситъ опредѣляется этимъ угломъ и сторонами b и c . Третья сторона выражаетъ по величинѣ и направлению ихъ сумму $b_\beta + c_\gamma$.

Если каждую изъ величинъ b_β и c_γ помножимъ на a_α , то модули ихъ умножатся на a и сл. сохранять то же самое численное отношеніе. Аргументы β и γ



Черт. 47.

получать одно и то же приращеніе α , слѣд., сохранять ту же разность. Поэтому, если составить сумму частныхъ произведеній $a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma$, то получится треугольникъ $OA'B'$ подобный OAB , такъ какъ углы $\angle A$ и $\angle A'$ равны и заключающія ихъ стороны пропорціональны. Слѣд. OB' будетъ имѣть модуль OB , умноженный на a , аргументъ же комплекса OB' будетъ $\angle OAX + \angle BOA + \angle BOX$.

$\angle OAX + \angle BOA + \angle BOX = \angle A'OA = \angle BOX + \alpha$, т. е.

прежнему аргументу, сложенному съ α . Итакъ, сумма $a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma$ произведенію $a_\alpha (b_\beta + c_\gamma)$.

$$IV. a_\alpha \cdot 0 = a_\alpha \cdot 0_\theta = (\alpha \cdot 0)_{\alpha+\theta} = 0_\alpha = 0.$$

Слѣд., произведеніе двухъ комплексовъ равно нулю, когда модуль одного изъ нихъ равенъ нулю.

$$V. a_\alpha \cdot 1 = a_\alpha \cdot 1_\theta = (\alpha \cdot 1)_\alpha = a_\alpha.$$

Слѣд., умноженіе комплекса на 1 не измѣняетъ его.

427. Дѣленіе. Сохранивъ прежнее опредѣленіе этого дѣйствія, находимъ, что частное отъ раздѣленія $a_\alpha : b_\beta$ равно

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ это частное на дѣлителя, имѣемъ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta} \cdot b_\beta = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)_{\alpha-\beta+\beta} = a_\alpha,$$

т. е. дѣлимое. Итакъ: чтобы раздѣлить одинъ комплексъ на другой, надо: модуль дѣлимаго раздѣлить на модуль дѣлителя, а изъ аргумента дѣлимаго вычесть аргументъ дѣлителя.

428. Возвышеніе въ степень. Пусть показателъ степени n — число цѣлое и положительное; по опредѣленію возвышенія въ степень имѣемъ:

$$(a_\alpha)^n = a_\alpha \cdot a_\alpha \cdot \dots \cdot a_\alpha \text{ (} n \text{ разъ)}; \text{ отсюда, по правилу умноженія:}$$

$$a_\alpha^n = (a \cdot a \cdot \dots \cdot a)_{\alpha+\alpha+\dots+\alpha} = a_{n\alpha}^n.$$

Пусть показатель степени будет целое отрицательное число $-n$. По свойству такого показателя, имеемъ:

$$(a^{-1})^{-n} = \frac{1}{(a^{-1})^n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{-n}.$$

Итакъ, чтобы возвести комплексъ въ целую степень, нужно модуль возвести въ эту степень, а аргументъ умножить на показатель степени.

429 Извлечение корня. Пусть требуется извлечь корень порядка m (гдѣ m — целое положительное число) изъ комплекса r_a , и пусть некоторый корень выражень комплексомъ r_ω , такъ что

$$\sqrt[m]{r_a} = r_\omega.$$

По определению корня, мы должны имѣть $r_a = (r_\omega)^m$, или $r_a = r_{\omega m}$. Этому равенству удовлетворимъ, полагая, что модули обеихъ частей равны, а аргументы различны на число кратное 2π , такъ что для опредѣленія r и ω имѣемъ уравненія:

$$r^m = r, \quad m\omega = 2k\pi + \alpha,$$

гдѣ k — целое положит. или отрицат. число; но r есть число положительное, а какъ и r существенно положительное, какъ модуль, то оно равно арифметическому корню изъ r . Такимъ образомъ имѣемъ:

$$r = \sqrt[m]{r}, \quad \omega = \frac{2k\pi + \alpha}{m}.$$

Итакъ

$$\sqrt[m]{r_a} = (\sqrt[m]{r}) \frac{2k\pi + \alpha}{m} \dots (1)$$

Опредѣлимъ, сколько различныхъ значеній получится для $\sqrt[m]{r_a}$. Если въ формулѣ 1) дать k два какихъ-нибудь значенія, различающіяся между собою на число кратное m , то получимъ два угла, различающіяся кратнымъ 2π , но поворотъ комплекса на уголъ кратный 2π не измѣняетъ величины комплекса. Слѣд. чтобы получить все значенія $\sqrt[m]{r_a}$ достаточно числу k дать m цѣлыхъ последовательныхъ значеній, напр. значенія

$$0, 1, 2, 3, \dots, m-1.$$

Такимъ образомъ получимъ корни, которыхъ аргументы будутъ

$$\frac{\alpha}{m}, \quad \frac{2\pi + \alpha}{m}, \quad 2 \cdot \frac{2\pi + \alpha}{m}, \dots, (m-1) \cdot \frac{2\pi + \alpha}{m};$$

крайние углы разнятся на $(m-1) \cdot \frac{2\pi}{m}$, т.е. меньше чѣмъ на 2π , слѣд. два какие угодно изъ этихъ аргументовъ имѣютъ разность, меньшую 2π , и потому даютъ различные комплексы. Отсюда заключаемъ, что

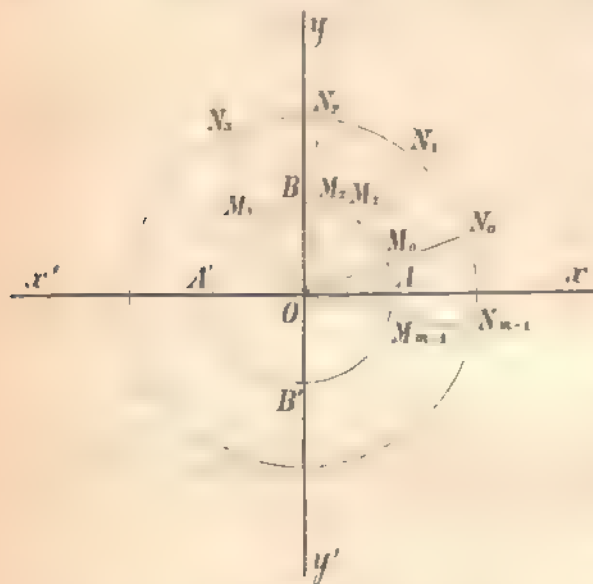
Всякое количество, действительное или мнимое, имѣетъ m различныхъ корней m -го порядка, действительныхъ или мнимыхъ, и только m

Представляя эти m корней геометрически. Возьмемъ перпендикулярныя оси x' и y' , и опишемъ изъ начала O , какъ центра, окружность радиусомъ равнымъ линейной единицѣ; пусть A будетъ точка пересѣченія этой окружности съ

положительного $\frac{2\pi}{m}$ от оси x . Отложим на этой окружности, начиная от точки A , в направлении увеличения, длину AM_0 , равную по величине и по знаку дуге $\frac{\pi}{m}$, затем, — M_0 разделим окружность на m равных частей, пусть $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{m-1}$ будут точки деления. Если соединить начало O с этими m точками деления, то m радиусов $OM_0, OM_1, \dots, OM_{m-1}$ будут комплексными мочула $= 1$, а аргументы этих комплексных будут

$$\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \dots, \frac{(m-1)\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots, \frac{(m-2)\pi}{m}, \frac{\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \dots, \frac{(m-1)\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \dots, \frac{(m-1)\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}.$$

Затем, на каждом из этих радиусов отложим, начиная с точки O , длину равную $\sqrt[m]{r}$, первые комплексные $ON_0, ON_1, \dots, ON_{m-1}$ представят m корней m -го порядка из данного количества r , а из построения видно, что их концы расположены на окружности центра O и радиуса $\sqrt[m]{r}$, образуя на этой окружности вершины правильного m -угольника.



Черт. 48.

Из этого построения непосредственно видно, что при m четномъ, m корней парами равны и противоположны по знаку, а что не может быть больше двух действительных корней, и только при m четномъ.

Изъяснение. I. Пусть данное количество будет действительное и положительное; оно будет равно своему модулю r , аргумент же, какъ кратный 2π , всегда можно принять равнымъ 0. Такимъ образомъ

$$\sqrt[m]{r_0} = (\sqrt[m]{r}) e^{i \frac{2k\pi}{m}}.$$

Чтобы получился действительный положительный корень, необходимо, чтобы аргументъ $\frac{2k\pi}{m}$ равнялся четному кратному

π , т. е. $\frac{2k\pi}{m} = 2h\pi$, откуда $k = mh$, такъ какъ k положительно и меньше m , то необходимо, чтобы $h = 0$, и след., чтобы $k = 0$; стало быть въ числе корней будетъ одинъ положительный, и только одинъ.

Чтобы получился корень действительный отрицательный, нужно, чтобы аргументъ $\frac{2k\pi}{m}$ равнялся нечетному кратному отъ π , т. е. чтобы

$$\frac{2k\pi}{m} = (2h+1)\pi, \text{ откуда } k = \frac{(2h+1)m}{2},$$

но k — целое, $2h+1$ — нечетное число, сл. при m нечетномъ равенство невозможно. Если же m — четное, то какъ k меньше m необходимо, чтобы h было

нулем, и тогда $h = \frac{m}{2}$, слѣд. при m четномъ, и только въ этомъ случаѣ, имѣется действительный отрицательный корень, по абсолютной величинѣ равный действительному положительному корню.

Чтобы два корня аргументовъ $\frac{2k\pi}{m}$ и $\frac{2k'\pi}{m}$, гдѣ k отличенъ отъ k' , были сопряженны, необходимо и достаточно, чтобы сумма ихъ аргументовъ равнялась четному кратному отъ π ,

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} = 2h\pi, \text{ откуда } k + k' = mh,$$

а такъ какъ k и k' положительны, различны и меньше m , необходимо, чтобы h равнялось 1, и чтобы

$$k + k' = m.$$

Отсюда видно, что всякому значенію k , за исключеніемъ нулевого и равнаго $\frac{m}{2}$, если m четно, т. е. за исключеніемъ случая действительныхъ корней, соответствуетъ значенію k' отличное отъ k слѣд. все мнимые корни попарно сопряжены.

Примѣръ. Если m нечетно, все же действительное положительное количество имѣетъ одинъ, и только одинъ, корень m -го порядка по величинѣ, и $m-1-m$ корней, являющихся попарно сопряженными — Если m четно, все же действительное положительное количество имѣетъ два корня m -го порядка действительныхъ, равныхъ и противоположныхъ по знаку, и $m-2$ корня мнимыхъ попарно сопряженныхъ.

Геометрическое брѣнъ абелевъ отъ m кр. при m го порядкѣ неимеетъ смысла, приваждая къ претвурдямъ результатовъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $a = 0$, то вершина M_0 совпадаетъ съ точкой A — такъ X_0 находится, поэтому, на OA , и слѣд. существуетъ единъственный коэффициентъ OX_0 . Если m четно, то будетъ три действительныхъ корня, отрицательный, двойной прицѣпѣ, и $m-2$ пр. дѣйств. положительныхъ, и $m-2$ корня мнимыхъ попарно сопряженныхъ, и такъ какъ корни не будутъ при m нечетномъ; въ обоихъ случаяхъ все количество корней мнимо; и какъ они расположены симметрично относительно Ox , эти мнимые корни попарно сопряжены.

Наступающее количество будетъ отрицательнымъ, по отрицательному, отрицательно мнимо, и $m-1$ противъ положительнаго; и если можно положить, что его аргументъ a равенъ π , такъ это количество это будетъ r или $-r$, и

$$\sqrt[m]{r} = \sqrt[m]{-r} = (\sqrt[m]{r})^{(2k+1)\pi/m}.$$

Чтобы могъ быть действительный положительный корень, необходимо, чтобы его аргументъ былъ равенъ четному кратному отъ π , т. е. чтобы $\frac{(2k+1)\pi}{m} = 2h\pi$, откуда $2k+1 = 2mh$, что невозможно, потому что $2k+1$ нечетно, $2mh$ четно; и такъ, въ данномъ случаѣ, не существуетъ ни одного действит. положит. корня.

Чтобы могъ быть действительный отрицательный корень, нужно, чтобы его аргументъ $\frac{(2k+1)\pi}{m}$ былъ равенъ нечетному кратному отъ π , $\frac{(2k+1)\pi}{m} = (2h+1)\pi$, откуда $2k+1 = (2h+1)m$, это равенство невозможно, если m четно, слѣд. при четномъ m не существуетъ ни одного действит. отрицат. корня.

Подъ являя, что m нечетно; въ этомъ случаѣ, такъ какъ k меньше m , нужно чтобы h былъ нулемъ, и тогда $h = \frac{m}{2} - 1$; слѣд. если m нечетно, будетъ одинъ действит. отрицат. корень, и только одинъ.

Чтобы два корня аргументов $\frac{(2k+1)\pi}{m}$, $\frac{(2k'+1)\pi}{m}$, где k' отлично от k , были сопряженны, необходимо и достаточно, чтобы сумма их аргументов равнялась четному кратному от π ,

$$\frac{(2k+1)\pi}{m} + \frac{(2k'+1)\pi}{m} = 2h\pi,$$

откуда

$$k + k' = mh - 1,$$

а так как k и k' положительны, различны и меньше m , необходимо, чтобы h равнялось 1, и сл. чтобы

$$k + k' = m - 1.$$

Отсюда видно, что всякому значению k , кроме $\frac{m-1}{2}$ при m нечетномъ, соответствует одно значение k' отличное от k , и только одно; слѣд. всѣ мнимые корни попарно сопряжены.

Итакъ: Если m нечетно, то действительное отрицательное количество имѣетъ одинъ m -й отрицательный корень, и только одинъ, и $m-1$ м-хъ корней мнимыхъ попарно сопряженныхъ. Если m четно, то действительное отрицательное количество не имѣетъ отрицательныхъ m -хъ корней, но имѣетъ m различныхъ корней m -го порядка мнимыхъ и попарно сопряженныхъ.

Геометрическое представлено корней приводитъ къ тѣмъ же заключеніямъ; въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $\frac{\alpha}{m} = \frac{\pi}{m}$, и каждое дѣленіе M_0M_1, M_1M_2, \dots

равно $\frac{2\pi}{m}$, а потому вершины M_0 и M_{m-1} симметричны относительно диаметра $x'Ox$; точки N_0 и N_{m-1} имѣютъ тоже свойство, и вершины $N_0, N_1, N_2, \dots, N_{m-1}$ попарно симметричны относительно $x'Ox$, отсюда видно, что корни — мнимы и попарно сопряжены.

Замѣмъ, на положительный полуоси Ox не м. б. ни одной вершины, на отрицательной же полуоси Ox будетъ вершина только при m нечетномъ: сл. если m — четно, то не существуетъ ни одного действительнаго m -го корня; при m — нечетномъ есть одинъ действительный корень отрицательный; всѣ же мнимые корни попарно сопряжены.

III. Пусть, наконецъ, данное количество r_a — мнимое; аргументъ его уже не будетъ кратнымъ π . Легко видѣть, что ни одинъ m -й корень изъ r_a не м. б. действительнымъ; въ самомъ дѣлѣ, для этого нужно бы было, чтобы

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} = h\pi, \text{ откуда } \alpha = (mh - 2k)\pi,$$

т.е. нужно, чтобы α было кратнымъ π , и слѣдовательно, чтобы данное количество было действительнымъ.

Набѣмъ, не м. б. двухъ мнимыхъ сопряженныхъ корней, ибо для этого нужно, чтобы сумма ихъ аргументовъ была четнымъ кратнымъ π , т.е. чтобы

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} + \frac{2k'\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} = 2h\pi, \text{ или } \alpha = (mh - k - k')\pi,$$

а это требуетъ, чтобы данное количество было действительнымъ.

Слѣдовательно: всякій комплексъ имѣетъ m различныхъ корней m -го порядка также комплексныхъ и не сопряженныхъ.

Геометрическое представлено корней показываетъ, что въ этомъ случаѣ m корней суть m радиусовъ правильнаго m -угольника, не имѣющаго ни одной вершины на оси $x'Ox$, и не имѣющаго радиусовъ симметричныхъ относительно $x'Ox$; а этимъ снова доказывается, что m корней комплексны и не сопряжены.

Примѣчаніе. Если взять два мнимыхъ сопряженныхъ комплекса r_a и r_{-a} ,

то каждый из них, как мы видели, имеет m различных корней m -го порядка, комплексных и не сопряженных. Можно показать, что m корней m -го порядка из r_a соответственно сопряжены m корням m -го порядка из r_{-a} . В самом деле:

$$\sqrt[m]{r_a} = (\sqrt[m]{r})^{2k\pi + \frac{a}{m}}, \quad \sqrt[m]{r_{-a}} = (\sqrt[m]{r})^{2k'\pi - \frac{a}{m}}.$$

Но очевидно, для того чтобы два комплекса были сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы модули их были равны, а сумма аргументов была кратна 2π ; по все величины $\sqrt[m]{r_a}$ и $\sqrt[m]{r_{-a}}$ имеют один и тот же модуль, след. достаточно показать, что аргументу $\frac{2k\pi}{m} + \frac{a}{m}$ какого-нибудь m -го корня из r_a соответствует аргумент $\frac{2k'\pi}{m} - \frac{a}{m}$ m -го корня из r_{-a} такой, что

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{a}{m} + \frac{2k'\pi}{m} - \frac{a}{m} = 2h\pi,$$

или что $k' + k = mh$; но если давать k и k' только значения $0, 1, \dots, m-1$, то нужно взять $h=1$, и тогда $k' = m-k$. Отсюда видно, что каждому значению k соответствуют только одно значение k' ; следовательно, если два комплекса сопряжены, то m корней m -го порядка первого соответственно сопряжены m корням m -го порядка второго.

430. Из предыдущего видно, что все действия над комплексными приводятся к выражениям того же вида; поэтому весь количественный материал алгебры, над которыми она производится, действителен и в форме которого получает результаты, выражается в следующей общей форме:

$$a + bi \text{ или } r_a,$$

где a и b — действительные величины, и i — мнимая единица. В зависимости от значений a и b эти выражения принимают следующие формы: a (или a_0), $-a$ (или a_{π}), bi (или $a_{\frac{\pi}{2}}$), $-bi$ (или $a_{\frac{3\pi}{2}}$), где a и b — числа действительные, целые, дробные или иррациональные.

Существенный характер этих величин тот, что полное определение их требует знания не только их *модулей*, но еще и *направлений*. Поэтому их называют также величинами *трективными*. Одни из этих величин имеют только два противоположных направления, вследствие чего геометрически они представляются прямыми, параллельными на неограниченной оси, от постоянного начала, то в одну, то в другую сторону, смотря по их направлению. Их называют поэтому *директами*. Другие величины могут быть изображены прямыми, параллельными на плоскости из начала в каком угодно направлении. Их называют *плоскими векторами*; двой — их частный случай. Наконец, есть величины, в представлении о которых не входит идея направления; поэтому их изображают прямыми, параллельными на оси в одну сторону от начала. Их называют *монотонами* (изучением их занимается арифметика). Все эти величины подчиняются тем же основным законам, обобщению которых и была посвящена эта глава.

Из виду сказанного, цель алгебры можно определить так: *это есть наука, занимающаяся изучением действий над плоскими векторами, и решением связанных с ними задач, относящихся к этим величинам.*

Величины, имеющие в пространстве какое угодно направление (как силы в механике, прямая, воображаемая в пространстве) не подчиняются тем же законам, как плоские векторы, и правилах умножения и деления; поэтому их изучение выходит из рамок алгебры.

ГЛАВА XXX.

Рѣшеніе квадратныхъ уравненій.—Использованіе корней.—Вычисленіе корней уравненій на 2° $bx + c = 0$, когда коэффициентъ a весьма малъ.

431. Опредѣленія. Уравненіе называется *квадратнымъ*, если, будучи *рациональнымъ* и *цѣлымъ* относительно неизвѣстнаго, не содержитъ членовъ съ степенями неизвѣстнаго, вышшими второй. Такое ур. имѣетъ троякаго рода члены: съ квадратомъ неизвѣстнаго, съ первою степенью его и извѣстные члены; *общій видъ* его будетъ, слѣдовательно,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

гдѣ a , b и c суть некоторыя числа, положительныя или отрицательныя; b и c могутъ быть имѣть или равныя нулю, и тогда ур. называется *исполнымъ*; когда a , b и c отличны отъ нуля, оно называется *полнымъ*.

432. Рѣшеніе неполныхъ ур. ній. 1 Когда $b = 0$, уравненіе будетъ

$$ax^2 + c = 0.$$

Раздѣливъ обѣ части на a , и положивъ для краткости $\frac{c}{a} = A$, можемъ дать этому ур.—нію видъ

$$x^2 - A = 0.$$

Замѣчая, что $A = (\sqrt{A})^2$, получимъ:

$$x^2 - (\sqrt{A})^2 = 0, \text{ или } (x - \sqrt{A})(x + \sqrt{A}) = 0.$$

Но чтобы произведеніе двухъ множителей равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ нихъ былъ равенъ нулю. Приравнявъ перваго множителя нулю: $x - \sqrt{A} = 0$, находимъ отсюда $x = +\sqrt{A}$, причемъ второй множитель обращается въ конечное количество $2\sqrt{A}$. Приравнявъ второго множителя нулю: $x + \sqrt{A} = 0$, имѣемъ отсюда $x = -\sqrt{A}$, причемъ другой множитель дастъ конечную величину $-2\sqrt{A}$. Итакъ, имѣемъ два рѣшенія: $x' = +\sqrt{A}$, $x'' = -\sqrt{A}$; въ условіяхъ, ради краткости, писать вѣстѣ:

$$x = \pm \sqrt{A}$$

и читать: x равенъ плюсъ или минусъ \sqrt{A} .

Если $A > 0$, оба корня действительны; при $A < 0$, оба мнимы.

Примѣры. 1. Рѣшить уравненіе $3x^2 - 75 = 0$.

Перенеся 75 во вторую часть, и раздѣливъ обѣ части на 3, получимъ ур.: $x^2 = 25$, откуда $x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$. Итакъ:

$$x' = 5; \quad x'' = -5.$$

2. Рѣшить уравненіе $3a^2 + 75 = 0$.

Выводимъ изъ него: $x^2 = -25$; откуда $x = \pm \sqrt{-25} = \pm 5i$, т.-е.

$$x' = +5i; \quad x'' = -5i.$$

II. Положивъ въ уравненіи $ax^2 + bx + c = 0$ извѣстный членъ $c = 0$, получаемъ уравненіе

$$ax^2 + bx = 0.$$

Вывода x за скобки, дадимъ ур-нію видъ $x(ax + b) = 0$. Приравнявъ перваго множителя нулю, т.-е. полагая $x = 0$, и замѣчая, что при этомъ второй множитель обращается въ конечную величину b , заключаемъ, что одинъ изъ корней ур-нія равенъ 0. Полагая затѣмъ $ax + b = 0$, откуда $x = -\frac{b}{a}$, замѣчаемъ, что и при этомъ значеніи x ур-ніе обращается въ тождество.

Итакъ, ур-ніе $ax^2 + bx = 0$ имѣетъ два корня

$$x' = 0, \quad x'' = -\frac{b}{a}.$$

Примѣчаніе. Если бы, въ видахъ упрощенія, мы сократили первоначально ур. на x , то, рѣшивъ полученное ур-ніе, нашли бы только одинъ корень $x = -\frac{b}{a}$; другой корень $x = 0$ потеряли бы при сокращеніи. Но едва ли не лишнее снова напоминать, что не позволительно дѣлать ур. на множителя, который можетъ обратиться въ нуль.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $3x^2 - 7x = 0$.

Давъ ему видъ $x(3x - 7) = 0$, по предыдущему, находимъ два корня:

$$x' = 0; \quad x'' = \frac{7}{3}.$$

III. Если $b = c = 0$, то ур. принимаетъ видъ

$$ax^2 = 0.$$

Такъ какъ a отлично отъ нуля, то произведеніе ax^2 можетъ обратиться въ нуль только при $x = 0$. И въ этомъ случаѣ можно сказать, что ур. имѣетъ два корня

$$x' = 0 \quad \text{и} \quad x'' = 0,$$

равныхъ между собою.

433. Рѣшеніе полного квадратнаго уравненія. Рѣшимъ теперь квадратное уравненіе общаго вида

$$ax^2 + bx + c = 0 \dots (1).$$

Первый приемъ. Принимая a отличнымъ отъ нуля, выносимъ a за скобки, вслѣдствіе чего получимъ ур.

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0 \dots (2)$$

Замѣчая, что $\frac{b}{a} \cdot x$ можно представить въ видѣ $2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x$, рассматриваемъ x^2 какъ квадратъ перваго члена x нѣкотораго бинома, а $2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$ какъ удвоенное произведеніе перваго члена (x) искомаго бинома на второй, который равенъ, поэтому, $\frac{b}{2a}$. Такимъ образомъ, если въ скобкахъ ур—нія (2) прибавимъ и вычтемъ квадратъ второго члена $\frac{b}{2a}$ бинома, то составимъ {ур—ніе эквивалентное (2):

$$a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = 0$$

Первые три члена въ скобкахъ составляютъ квадратъ бинома $x + \frac{b}{2a}$. Поэтому послѣднее ур. можно написать въ видѣ:

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0 \quad . \quad . \quad (3).$$

Каковъ бы ни былъ знакъ разности $b^2 - 4ac$, мы всегда можемъ рассматривать $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ какъ квадратъ дроби $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, и дать уравненію (3) видъ

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] = 0$$

или, по разложеніи на множители, видъ

$$a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0.$$

Но какъ a отлично отъ нуля, то, чтобы первая часть была нулемъ, необходимо и достаточно, чтобы тотъ или другой изъ остальныхъ двухъ множителей былъ нулемъ. Итакъ, послѣднему, а потому и эквивалентному ему данному уравненію, мы удовлетворимъ, положивъ

$$\text{либо } x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0, \quad \text{откуда } x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\text{либо } x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0, \quad \text{откуда } x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Итакъ, квадратному ур—нію удовлетворяютъ два значенія неизвѣстнаго, два корня. Для краткости оба корня пишемъ въ одной формулѣ:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

изъ которой выводимъ слѣдующее

Правило. Чтобы найти значенія неизвѣстнаго, удовлетворяющія полному квадр. ур—нію, нужно: выраженіе, составленное изъ коэффициента при неизвѣстномъ въ 1-й степени, взятаго съ обратнымъ знакомъ, плюс или минусъ квадратный корень изъ квадрата того же коэф—

коэффициента без учетвереннаго произведенія крайнихъ коэффициентовъ, разделить на удвоенный первый коэффициентъ.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $99x^2 - 37x - 10 = 0$.

Сравнивая это уравненіе, которому можно дать видъ

$$99x^2 + (-37)x + (-10) = 0$$

съ общими, замѣчаемъ, что нужно положить

$$a = 99, \quad b = -37, \quad c = -10.$$

Вставляя въ общую формулу эти числа, найдемъ:

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 99 \cdot (-10)}}{2 \cdot 99} = \frac{37 \pm \sqrt{5329}}{198} = \frac{37 \pm 73}{198},$$

и наконецъ:

$$x' = \frac{37 + 73}{198} = \frac{5}{9}, \quad x'' = \frac{37 - 73}{198} = -\frac{2}{11}.$$

434. Второй приемъ. Умножая обѣ части уравненія (1) на $4a$, что позволительно, если a не равно нулю, получимъ уравненіе

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

заменяя въ данномъ, или перенеся $4ac$ во вторую часть:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Рассматривая $4a^2x^2$ и $4abx$ какъ два первые члена квадрата бинома, у котораго первый членъ $= 2ax$, а второй b , и придавая къ обѣимъ частямъ ур-нія по b^2 , находимъ уравненіе $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$, котораго первая часть есть ничто иное какъ $(2ax + b)^2$. Приведа такимъ образомъ ур. къ виду

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

замѣчаемъ, что $2ax + b$ есть алгебраич. квадр. корень изъ $b^2 - 4ac$, т.-е.

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

откуда

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

формула, совершенно одинаковая съ найденной въ § 433.

435. Третій приемъ. Найдемъ формулу корней при помощи введенія неопредѣленнаго количества. Имѣя ур.

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

положить $x = z + k$, гдѣ z новое неизвѣстное, а k нѣкоторое произвольное количество, и подставимъ въ ур. вмѣсто x сумму $z + k$. Найдёмъ ур-ніе

$$a(z + k)^2 + b(z + k) + c = 0;$$

раскрывъ въ немъ скобки и расположивъ по степенямъ z , получимъ

$$az^2 + (2ak + b)z + ak^2 + bk + c = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

Воспользуемся произволомъ количества k для того, чтобы уничтожить членъ съ первою степенью z , $(2ak + b)z$, и получить такимъ образомъ неполное уравненіе: очевидно, для k надо выбрать такое значеніе, чтобы $2ak + b = 0$, откуда $k = -\frac{b}{2a}$.

Подставивъ это значеніе k къ ур. (2), имѣемъ

$$az^2 + a \frac{b^2}{4a^2} + b \cdot \frac{b}{2a} + c = 0, \text{ или } az^2 + \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

$$\text{откуда } z^2 = -\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}, \text{ и слѣд. } z = \pm \frac{b^2 + 4ac}{2a}.$$

$$\text{Такимъ образомъ: } x = z + k = -\frac{b}{2a} \pm \frac{b^2 + 4ac}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{b^2 + 4ac}{2a}.$$

Этотъ способъ, состоящій въ уничтоженіи 2-го члена, предложенъ Карономъ (1501—1576).

436. Замѣчанія относительно примѣненія предыдущихъ формулъ.

1. Когда коэффициенты a , b и c числа пѣлыя и b число четное, формула корней допускаетъ упрощеніе. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $b = 2b'$, имѣемъ

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a},$$

по сокращеніи на 2.

Напр., если дано уравненіе

$$77x^2 + 50x + 8 = 0,$$

то, полагая въ послѣдней формулѣ $a = 77$, $b' = 25$ и $c = 8$, найдемъ

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 77 \cdot 8}}{77},$$

откуда

$$x' = -\frac{2}{7}, \quad x'' = -\frac{4}{11}.$$

2. Когда коэффициентъ при x^2 равенъ 1, и ур. имѣетъ видъ

$$x^2 - px - q = 0,$$

то, полагая въ общей формулѣ $a = 1$, $b = p$ и $c = q$, получимъ

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Если въ сѣмъ p — четное число, то для удобства вычислений выгодно этой формулѣ дать видъ

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Напрѣмръ, въ уравненіи $x^2 - 10x + 21 = 0$ имѣемъ: $p = -10$, слѣд. $p = 10$, и $q = 21$; применяя послѣднюю формулу, найдемъ

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2; \text{ слѣд. } x' = 7, \quad x'' = 3.$$

437 Приводимъ еще нѣсколько примѣровъ на примѣненіе выведенныхъ формулъ.

1. Рѣшить уравненіе $3x^2 - 7x - 2 = 0$.

Примѣняемъ первую формулу, полагая въ ней $a = 3$, $b = -7$, $c = -2$, и находимъ

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6},$$

откуда

$$x' = \frac{7 + \sqrt{25}}{6} = 2.591, \text{ съ точностью до } 0.001 \text{ по избытку;}$$

$$x'' = \frac{7 - \sqrt{25}}{6} = 0.257, \text{ съ точностью до } 0.001 \text{ по недостатку.}$$

2. Рѣшить уравненіе $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$.

Примѣняя первую формулу, находимъ

$$x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}}{2ab} \\ = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2)}{2ab}.$$

Отдѣляя корни, имѣемъ

$$x = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{2ab} = \frac{a}{b}, \quad x' = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{2ab} = \frac{b}{a}.$$

3. Рѣшить уравненіе

$$\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} + \frac{c}{x-c} = 3. \quad (1)$$

Перепишем 3-е уравнение, напомнимъ:

$$\frac{a}{x+a} - 1 + \frac{b}{x+b} - 1 + \frac{c}{x+c} - 1 = 0,$$

или

$$\frac{x}{x+a} + \frac{x}{x+b} + \frac{x}{x+c} = 0,$$

или

$$x \left[\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} \right] = 0.$$

Приравнявая нулю 1-й множитель, имеемъ

$$x = 0 \dots (2).$$

Приравнявая нулю 2-й множитель, по приведении къ общему знаменателю и по упрощении числителя, найдемъ

$$3x^2 - \frac{2(a+b+c)x - bc - ca - ab}{(x+a)(x+b)(x+c)} = 0 \dots (3).$$

Приравнявъ числителя нулю, имеемъ: ур.

$$3x^2 + 2(a+b+c)x + bc + ca + ab = 0 \dots (4)$$

корни котораго будутъ требуемые, если убѣдимся, что они не обращаютъ знаменателя въ 0; въ противномъ случаѣ, ихъ слѣдуетъ принять только тогда, когда истинное значеніе неопредѣленности $\frac{0}{0}$, въ которую обратится 1-ая часть уравненія (3), будетъ = 0. Корни (4) суть

$$-\frac{1}{3}[a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2 - bc - ca - ab}] \dots (5).$$

Они не обращаютъ въ нуль $x+a$, $x+b$, $x+c$; сл. удовлетворяютъ уравненію (3), а слѣд. и (4), которое так. обр. имѣетъ три корня: (2) и (5).

Оба корня (5), какъ легко видѣть, действительны, такъ какъ подрадикальное выраженіе приводится къ виду

$$\frac{1}{2}[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2].$$

4. Рѣшить уравненіе

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x(x-1)}.$$

Собравъ всѣ члены въ первую часть, приведемъ къ общему знаменателю $x(x+1)(x-1)$ и сдѣлавъ приведеніе въ числитель, дадимъ уравненію видъ

$$\frac{-x^2-4x-3}{x(x+1)(x-1)} = 0 \dots (1).$$

Приравнявъ числителя нулю, рѣшаемъ ур—ніе

$$-x^2 + 4x - 3 = 0,$$

и находимъ, что корни его суть: $x = 3$ и $x = 1$.

Первый корень не обращаетъ знаменателя въ нуль, а потому удовлетворяетъ данному уравненію. Второй же, обращая знаменателя въ нуль, даетъ первой части уравненія (1) видъ $\frac{0}{0}$. Опредѣляя истинное значеніе этой неопредѣленности, имѣемъ

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x(x-1)(x-1)} = \frac{(x-1)(3-x)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3-x}{x(x+1)};$$

эта дробь при $x = 1$ обращается въ 1, а ур—ніе (1) въ $1 = 0$. заключаемъ, что корень $x = 1$ не удовлетворяетъ данному ур—нію.

Кромѣ корня, равнаго 3, данное ур—ніе имѣетъ еще корень ∞ , ибо степень знаменателя выше степени числителя.

438. Рѣшая квадратное уравненіе, мы нашли два корня; болѣе двухъ корней оно имѣть не можетъ: въ самомъ дѣлѣ, если бы ур—ніе $ax^2 + bx + c = 0$ имѣло болѣе двухъ различныхъ корней, оно было бы тождествомъ, такъ какъ цѣлый по бунѣ x квадратный полиномъ, обращающійся въ нуль болѣе нежели при двухъ различныхъ значеніяхъ x , тождественно равенъ нулю.

Изслѣдованіе корней квадратнаго уравненія.

439. Рѣшая общее уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$, мы нашли два корня:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Вычисленіе корней зависить, такимъ образомъ, отъ извлеченія квадратнаго корня изъ разности $b^2 - 4ac$, которая можетъ быть положительною, нулемъ, или отрицательною. Опредѣленіе природы корней въ каждомъ изъ этихъ случаевъ: указаніе, что значенія корней въ каждомъ случаѣ соответствуютъ формѣ уравненія, которому они удовлетворяютъ; наконецъ, опредѣленіе знаковъ действительныхъ корней,—все это составляетъ *цѣль изслѣдованія корней*.

Относительно разности $b^2 - 4ac$, которую будемъ называть *реализантомъ* уравненія, можетъ быть три предположенія: она можетъ быть положительною, нулемъ и отрицательною:

$$b^2 - 4ac > 0, \quad b^2 - 4ac = 0, \quad b^2 - 4ac < 0.$$

При этомъ условіи коэффициентъ a считать положительнымъ; когда $a = 0$ то умножимъ уравненіе на -1 , сдѣлаемъ этотъ коэффициентъ положительнымъ.

440. Первый случай:

$$b^2 - 4ac > 0.$$

Въ формулахъ корней подрадикальное количество будетъ, такимъ образомъ, положительное, следовательно, *оба корня действительные*. Вычитая изъ первого второй, найдемъ

$$x' - x'' = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a};$$

такъ какъ при данномъ условіи выраженіе это отлично отъ нуля, то заключаемъ, что корни *не равны между собою*.

Далѣе замѣчаемъ, что количество $b^2 - 4ac$ представляетъ или сумму или разность арифметическую, смотря по тому, будетъ ли c отрицательно или положительно.

$$1. \ c > 0.$$

Такъ какъ по условію и $a > 0$, то $4ac > 0$, вычитаніе положительнаго количества ведетъ къ уменьшенію, слѣд.

$$b^2 - 4ac < b^2,$$

а потому арифметическая величина $\sqrt{b^2 - 4ac}$ меньше арифмет. величины $\sqrt{b^2}$ или количества b . Означимъ абсолютную величину коэффициента b буквою β , въ такомъ случаѣ:

Если $b > 0$, то $b = \beta$, и корни можно написать въ видѣ:

$$x' = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4ac}}{2a};$$

такъ какъ $a > 0$, то знаки корней зависятъ отъ числителей: второй числитель, какъ состоящій изъ двухъ существенно-отрицательныхъ членовъ, отрицателенъ; въ первомъ — абсолютная величина отрицательнаго члена больше чѣмъ положительнаго, слѣд. и этотъ числитель отрицателенъ. Значитъ *при b положительномъ оба корня отрицательны*.

Если $b < 0$, то $b = -\beta$, и корни будутъ

$$x' = \frac{+\beta + \sqrt{\beta^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4ac}}{2a}.$$

Первый числитель, какъ состоящій изъ двухъ существенно-положительныхъ членовъ, положителенъ; во второй — абсолютная величина положительнаго члена больше, нежели отрицательнаго, слѣд. и второй — положителенъ. Такимъ образомъ, *при b отрицательномъ оба корня положительны*.

Итакъ: при $c > 0$ *действительные корни имѣютъ знаки одинаковые, противоположные знаку коэффициента b* .

$$2. \ c < 0.$$

Тогда какъ $a > 0$, то $4ac < 0$; отсюда заключаемъ: во-первыхъ, что при $c < 0$ выраженіе $b^2 - 4ac$ представляетъ количество существенно-положительное, и слѣд. корни безусловно действительны; во-вторыхъ, что

$$b^2 - 4ac > b^2,$$

и слѣд. абсолютная величина $\sqrt{b^2 - 4ac}$ больше абсолютной $\sqrt{b^2}$, т.-е. абсолютной величины количества b .

Если $b > 0$, т.-е. $b = +\beta$, то

$$x' = \frac{-\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Отсюда видно, что первый числитель имѣетъ болѣе по абсолютной величинѣ членъ положительный, слѣд. $x' > 0$; во второмъ числитель оба члена существенно отрицательны, слѣд. $x'' < 0$. Итакъ: *знаки корней различны*. При этомъ абсолютная величина числителя корня x' есть разность

$$\sqrt{b^2 - 4ac} - \beta,$$

абсолютная величина числителя корня x'' есть сумма

$$\sqrt{b^2 - 4ac} + \beta$$

тѣхъ же количествъ, и слѣд. больше абс. вел. числителя корня x'' ; такъ, обр. *большую абсолютную величину имѣетъ тотъ корень, знакъ котораго противоположенъ знаку b* .

Если $b < 0$, то $b = -\beta$, и

$$x' = \frac{-\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Первый числитель, очевидно, положительный, слѣд. $x' > 0$; у второго отрицательный членъ имѣетъ болѣе по абсолютной величинѣ, чѣмъ положительный, слѣд. $x'' < 0$; *знаки корней опять различны*. При этомъ, абсолютная величина числителя положительнаго корня равна суммѣ

$$\sqrt{b^2 - 4ac} + \beta,$$

а отрицательнаго—разности тѣхъ же количествъ,

$$\sqrt{b^2 - 4ac} - \beta,$$

т.-е. опять болѣе по абсолютной величинѣ имѣетъ тотъ корень, котораго знакъ противоположенъ знаку коэффициента b .

Резюмируя сказанное, заключаемъ, что: когда $b^2 - 4ac > 0$, уравненіе имѣетъ корни *оцѣствительные и неравные*; при этомъ (полагая $a = 1$), если свободный членъ положителенъ, знаки корней одинаковы и противоположны знаку коэффициента b ; если же свободный членъ отрицателенъ, то знаки корней различны, и знакъ корня, болѣе по абсолютной величинѣ, противоположенъ знаку b .

441. Примѣры. I. Исслѣдовать корни уравненія $8x^2 + 57x + 10 = 0$.

Такъ какъ $b^2 - 4ac = 57^2 - 320 = +2929 > 0$, то корни действительные и неравные; при $a = 1$ здѣсь и $c > 0$, сл. знаки корней одинаковы; $b > 0$, слѣд. оба корня отрицательны.

II. Исследовать корни уравнения $8x^3 - 57x - 10 = 0$.

Здѣсь при $a > 0$ имѣемъ $c < 0$, слѣд. не составляя разности $b^2 - 4ac$, заключаемъ, что корни — дѣйствительные и неравные; знаки ихъ различны, ибо $c < 0$; больший корень, имѣя знакъ противоположный коэффициенту b , положительный.

442. Докажемъ теперь, что при условіи $b^2 - 4ac > 0$ изъ самой формы уравненія вытекаетъ, что оно можетъ быть удовлетворено двумя различными дѣйствительными значеніями x .

Выводя въ уравненіи a за скобки, имѣемъ:

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0.$$

Изъ условія $b^2 - 4ac > 0$ имѣемъ $4ac < b^2$, откуда, раздѣливъ обѣ части неравенства на существенно-положительное количество $4a^2$, находимъ:

$$\frac{c}{a} < \frac{b^2}{4a^2}, \quad \text{и слѣд.} \quad \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - K^2,$$

гдѣ K^2 должно быть существенно-положительнымъ количествомъ, и слѣд. K — дѣйствительнымъ. Уравненіе принимаетъ видъ

$$a \left\{ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - K^2 \right\} = 0, \quad \text{или} \quad a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - K^2 \right\} = 0,$$

или, наконецъ, разложивъ выражение въ скобкахъ на множители:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} - K \right) \left(x + \frac{b}{2a} + K \right) = 0.$$

Такъ какъ a отлично отъ нуля, то этому уравненію удовлетворимъ, полагая

$$\text{или} \quad x + \frac{b}{2a} - K = 0, \quad \text{откуда} \quad x = -\frac{b}{2a} + K;$$

$$\text{или} \quad x + \frac{b}{2a} + K = 0, \quad \text{откуда} \quad x = -\frac{b}{2a} - K,$$

откуда и видно, что уравненіе удовлетворяется двумя дѣйствительными неравными значеніями x .

443. Второй случай.

$$b^2 - 4ac = 0.$$

При этомъ условіи подкоренное количество въ формулахъ корней обращается въ нуль, слѣд. радикальные члены исчезаютъ, и получается

$$x' = -\frac{b}{2a} \quad \text{и} \quad x'' = -\frac{b}{2a},$$

т.-е. оба корня дѣйствительные и равные, а общая величина ихъ есть $-\frac{b}{2a}$.

Хотя въ данномъ случаѣ ур—ніе имѣетъ только одинъ корень, но говорятъ, что оно имѣетъ *два*, но *равныя* между собою *корни*. Чтобы оправдать такое условное выраженіе, достаточно предположить, что количество $b^2 - 4ac$ сначала положительно, и что оно постепенно уменьшается до нуля; тогда неравные корни будутъ болѣе и болѣе приближаться къ равенству, и наконецъ, когда разность ихъ, выражаемая формулою $\sqrt{b^2 - 4ac}$, дѣлается нулемъ, оба корня становятся равными.

Примѣръ. Уравненіе $9x^2 + 12x + 4 = 0$ имѣетъ корни дѣйствительные равные, ибо $b^2 - 4ac = 6^2 - 9 \cdot 4 = 0$; а общая величина ихъ равна

$$-\frac{b}{a} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}.$$

444. Что равенство корней при условіи $b^2 - 4ac = 0$ обусловливается самою формою ур—нія, легко обнаружить слѣдующимъ образомъ. Давъ ур—нію видъ

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0,$$

и замѣчая, что изъ условія $b^2 - 4ac = 0$ сперва имѣемъ $4ac = b^2$, а затѣмъ, раздѣливъ обѣ части на $4a^2$, получаемъ $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$, поставивъ вѣсто $\frac{c}{a}$ его величину въ ур—ніе, найдемъ

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) = 0, \quad \text{или} \quad a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0.$$

Такъ какъ a отлично отъ нуля, то очевидно, что этому ур—нію можно удовлетворить единственнымъ способомъ, положивъ

$$x + \frac{b}{2a} = 0, \quad \text{откуда} \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

445. Третій случай.

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Такъ какъ квадратный корень изъ отрицательнаго количества $b^2 - 4ac$ есть выраженіе мнимое, то изъ самой формулы корней видно, что оба корня будутъ *мнимые*.

Имъ можно дать видъ $A + Bi$. Въ самомъ дѣлѣ, $b^2 - 4ac = (4ac - b^2) \cdot (-1)$; слѣд. $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{4ac - b^2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{4ac - b^2} \cdot i$, гдѣ количество $\sqrt{4ac - b^2}$ дѣйствительно, такъ какъ $4ac - b^2 > 0$.

Корни берутъ видъ

$$x' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot i, \quad x'' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot i,$$

откуда видно, что это—*мнимыя сопряженные количества*.

Примѣръ. Рѣшить ур—ніе $7x^2 - 3x + 2 = 0$.
 $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 7 \times 2 = -47$, слѣдов. корни *мнимые*. По предыду-
 щимъ формуламъ имѣемъ:

$$x' = \frac{3}{14} + \frac{\sqrt{47}}{14} \cdot i, \quad x'' = \frac{3}{14} - \frac{\sqrt{47}}{14} \cdot i.$$

446. Покажемъ изъ самой формы ур—нія, что при условіи $b^2 - 4ac < 0$ ему нельзя удовлетворить *никакимъ действительнымъ значеніемъ* x .

Въ самомъ дѣлѣ, изъ условія $b^2 - 4ac < 0$ имѣемъ $\frac{c}{a} > \frac{b^2}{4a^2}$, а это нера-
 венство можно замѣнить равенствомъ $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} + K^2$, гдѣ K^2 существенно по-
 ложительное количество, не могущее обратиться въ нуль. Внося это выраженіе
 вмѣсто $\frac{c}{a}$ въ уравненіе

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0,$$

даемъ ему видъ

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + K^2 \right) = 0, \quad \text{или} \quad a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + K^2 \right\} = 0.$$

Отсюда очевидно, что ур—ніе не м. б. удовлетворено *никакимъ* дѣйстви-
 тельнымъ значеніемъ x , потому что сумма двухъ положительныхъ количествъ
 можетъ обратиться въ нуль только тогда, когда каждое изъ нихъ въ отдѣль-
 ности обращается въ нуль, но мы знаемъ, что K^2 не м. б. нулемъ.

Изъ формулъ корней видно, что въ данномъ случаѣ ур. м. б. удовлетворено
 мнимыми значеніями неизвѣстнаго.

447. Задача. *Определить параметръ t такъ, чтобы ур—ніе*

$$x^2 - 4bx + 4ab + t^2 - 2tx = 0$$

имѣло корни равные.

Написавъ ур—ніе въ видѣ

$$x^2 - 2(2b + t)x + 4ab + t^2 = 0,$$

замѣчаемъ, что должно быть $b^2 - ac = 0$, т.-е. $(2b + t)^2 - (4ab + t^2) = 0$,
 или $b + t - a = 0$, откуда $t = a - b$.

448. Задача. *Въ уравненіи $5x^2 - 4x + \lambda = 0$ определить пара-
 метръ λ такъ, чтобы первая часть уравненія представляла:*

- 1) *сумму двухъ квадратовъ;*
- 2) *разность двухъ квадратовъ;*
- 3) *точный квадратъ.*

1) Первое требованіе равносильно условію $b^2 - ac < 0$, или $4 - 5\lambda < 0$,
 откуда $\lambda > \frac{4}{5}$. Слѣдовательно, когда λ больше $\frac{4}{5}$, первая часть ур—нія пред-
 ставляетъ сумму двухъ квадратовъ; корни ур—нія будутъ мнимые.

2) Второе требование равносильно условию $b'^2 - ac > 0$; пайдемъ: $\lambda < \frac{4}{5}$, и корни ур—нія будутъ дѣйствительные неравные.

3) Третье требование равносильно условию $b'^2 - ac = 0$, откуда $\lambda = \frac{4}{5}$, и ур—ніе будетъ имѣть равные корни.

449 ТЕОРЕМА. Если уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$, въ которомъ коэффициенты a , b и c соизмѣримы, удовлетворяется несоизмѣримымъ корнемъ $\alpha = \sqrt[3]{\beta}$, то другой его корень будетъ несоизмѣримое количество $\alpha = \sqrt[3]{\beta}$, сопряженное первому.

Въ самомъ дѣлѣ, по условию, $\alpha = \sqrt[3]{\beta}$ есть корень данного уравненія, слѣд. имѣемъ тождество

$$a(\alpha + \sqrt[3]{\beta})^2 + b(\alpha + \sqrt[3]{\beta}) + c = 0,$$

или, раскрывъ скобки и собравъ въ отдѣльныя группы соизмѣримыя и несоизмѣримыя члены, найдемъ

$$(a\alpha^2 + a\beta + b\alpha + c) + (2a\alpha + b)\sqrt[3]{\beta} = 0 \dots (1).$$

Первая часть этого тождества имѣетъ видъ $M + N\sqrt[3]{\beta}$, гдѣ M и N соизмѣримы. Въ силу (1) это выраженіе должно равняться нулю; но можно доказать, что оно можетъ равняться нулю только тогда, когда $M = 0$ и $N = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, пока N отлично отъ нуля, мы можемъ обѣ части раздѣлить на N и отъ этого получимъ равенство

$$\sqrt[3]{\beta} = -\frac{M}{N} \dots (2)$$

эквивалентное ур—нію $M + N\sqrt[3]{\beta} = 0$; но равенство (2) невозможно, ибо оно выражаетъ, что несоизмѣримое количество $\sqrt[3]{\beta}$ равно соизмѣримому $-\frac{M}{N}$. Итакъ, необходимо, чтобы N было нулемъ; но тогда изъ равенства $M + N\sqrt[3]{\beta} = 0$ слѣдуетъ, что и $M = 0$.

Такимъ образомъ, тождество (1) ведетъ за собою слѣдствія

$$\left. \begin{aligned} a\alpha^2 + a\beta + b\alpha + c &= 0 \\ 2a\alpha + b &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

Гдѣ теперь въ триномѣ $a\alpha^2 + b\alpha + c$ замѣнимъ α выраженіемъ $\alpha = \sqrt[3]{\beta}$, т. е. получимъ

$$(a\alpha^2 + a\beta + b\alpha + c) = (2a\alpha + b)\sqrt[3]{\beta},$$

т. е. данное выраженіе, въ силу (3), равно нулю, т. е. триномъ обращается въ нуль при $\alpha = \sqrt[3]{\beta}$; слѣдов., послѣднее выраженіе служитъ корнемъ данного уравненія.

450. ТЕОРЕМА. Если ур—ніе $ax^2 + bx + c = 0$, въ которомъ a , b и c числа цѣлыя, имѣетъ соизмѣримый корень, выражающійся въ видѣ

несократимой дроби $\frac{\alpha}{\beta}$, то α служить дѣлителем c , а β — дѣлителем a .

Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{\alpha}{\beta}$ есть корень данного уравненія, то имѣемъ тождество

$$a \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} + b \cdot \frac{\alpha}{\beta} + c = 0, \quad \text{или} \quad a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 = 0.$$

Но $a\alpha^2 + b\alpha\beta$ дѣлится на α , слѣд. и $c\beta^2$ должно дѣлиться на α ; но α есть число первое съ β и β^2 , слѣд. c должно дѣлиться на α . Такимъ же образомъ докажемъ, что β , будучи дѣлителемъ суммы $b\alpha\beta + c\beta^2$, дѣлится непремѣнно и a .

Слѣдствіе. Уравненіе $x^2 + px + q = 0$, въ которомъ p и q — числа ирраціональны, не можетъ имѣть сопряженныхъ дробныхъ корней.

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что уравненіе имѣетъ такой корень $\frac{\alpha}{\beta}$, на основаніи предыдущей теоремы нашли бы, что цѣлое число β дѣлитъ коэффициенты при x^2 , т.-е. 1.

Изъ этого слѣдуетъ, что наше уравненіе можетъ имѣть дѣйствительные корни: или цѣлые, и тогда оба они цѣлые, или же оба несоизмѣримые.

451. ТЕОРЕМА. Если уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$, въ которомъ коэффициенты a , b и c действительны, имѣетъ мнимый корень, то другой его корень есть мнимое количество, сопряженное съ первымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha + \beta i$ есть корень данного уравненія; въ такомъ случаѣ имѣемъ тождество

$$a(\alpha + \beta i)^2 + b(\alpha + \beta i) + c = 0,$$

или, группируя дѣйствительные и мнимые члены, находимъ:

$$(a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c) + (2a\alpha\beta + b\beta)i = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

Первая часть имѣетъ видъ $A + Bi$, гдѣ A и B дѣйствительны; но такое выраженіе можетъ равняться нулю только тогда, когда одновременно $A = 0$ и $B = 0$. Итакъ, два условія необходимы и достаточны для того, чтобы $\alpha + \beta i$ было корнемъ данного уравненія, суть

$$\left. \begin{aligned} a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c &= 0 \\ 2a\alpha\beta + b\beta &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Замѣняя въ триномѣ $ax^2 + bx + c$ количество x выраженіемъ $\alpha - \beta i$, найдемъ

$$(a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c) - (2a\alpha\beta + b\beta)i,$$

а въ силу условій (2) это выраженіе обращается въ нуль. Итакъ, предложенное уравненіе, въ которомъ коэффициенты действительны, имѣя мнимый корень $\alpha + \beta i$, имѣетъ и сопряженный ему корень $\alpha - \beta i$.

Исследование частных случаев.

452. До сих пор мы предполагали, что коэффициенты отличны от нуля. Положим теперь, что:

1. Коэффициент a равен нулю. При решении квадратного уравнения нам приходилось или делить, или умножить уравнение на выражение, содержащее a ; но мы знаем, что это действие непозволительно, когда $a = 0$, ибо может повести к уравнению, неэквивалентному данному. Поэтому является необходимость в исследовании, представляют ли найденные формулы для x' и x'' решения уравнения и в случае когда $a = 0$.

Обращаясь к формулам корней:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

и полагая в них $a = 0$, найдем:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{0}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2}}{0},$$

где $\sqrt{b^2}$ есть абсолютное значение числа b . Следовательно, различаем два случая.

1. $b > 0$. Имеем: $\sqrt{b^2} = |b| = b$. При $a = 0$ найдем:

$$x' = \frac{-b + b}{0} = \frac{0}{0}; \quad x'' = \frac{-b - b}{0} = \frac{-2b}{0} = \infty.$$

Таким образом, первый корень принимает неопределенный вид, а второй обращается в ∞ . Чтобы раскрыть неопределенность, умножим числителя и знаменателя дроби x' на $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$, количество сопряженное числителю, и найдем:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \\ &= \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что неопределенность корня x' зависит от присутствия в числителе и знаменателе общего множителя $2a$, который при $a = 0$ обращается в нуль. Сократив на $2a$, имеем

$$x' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

II, положив здесь $a = 0$, найдем:

$$x' = \frac{2c}{-2b} = -\frac{c}{b}.$$

количество определенное.

$b < 0$. Ищемъ: $|b^2 = |b| = -b$. При $a = 0$ будетъ

$$x' = \frac{-b - b}{0} = -\frac{2b}{0} = \infty,$$

слѣд. когда a приближается къ 0, корень x' стремится къ ∞ . Что касается x'' , то числитель этого корня при $a = 0$ есть $-b + b = 0$, и x'' принимаетъ форму $\frac{0}{0}$. Для опредѣленія истиннаго значения этой неопредѣленности поступаемъ по предыдущему и находимъ

$$x'' = \frac{2c}{-b + b^2 - 4ac},$$

что при $a = 0$ даетъ

$$x'' = \frac{2c}{-2b} = -\frac{c}{b};$$

слѣд. въ этомъ случаѣ второй корень $= -\frac{c}{b}$, а первый обращается въ ∞ .

Итакъ, при $a = 0$ одинъ изъ корней обращается въ ∞ , а другой равенъ корню уравненія первой степени $b x + c = 0$, въ которое обращается квадратное уравненіе при $a = 0$.

453. Обратимся теперь къ самому уравненію, и посмотримъ, что оно даетъ при $a = 0$.

Уравненію можно дать видъ

$$b x + c = -a x^2;$$

и какъ оно не удовлетворяется при $x = 0$, ибо обращается въ $c = 0$, между тѣмъ какъ c отлично отъ нуля, то можно раздѣлить обѣ части на x^2 , вслѣдствіе чего получимъ уравненіе, эквивалентное данному:

$$\left(b + \frac{c}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = -a.$$

Такъ какъ, по условію, $a \neq 0$, то произведеніе множителей $b + \frac{c}{x}$ и $\frac{1}{x}$ должно быть нулемъ; а для этого необходимо, чтобы либо тотъ, либо другой множитель обращался въ нуль. Положимъ

$$b + \frac{c}{x} = 0, \text{ откуда } x = -\frac{c}{b},$$

замѣчаемъ, что при этомъ другой множитель $\frac{1}{x}$ равенъ $-\frac{b}{c}$, т.-е. конеченъ.

Поэтому $x = -\frac{c}{b}$ есть корень даннаго уравненія.

Положивъ

$$\frac{1}{x} = 0, \text{ откуда } x = \infty,$$

находимъ, что другой множитель обращается въ b , и слѣд. конеченъ. Поэтому $x = \infty$ есть также корень уравненія. Эти результаты вполне согласуются съ

выводомъ, полученнымъ изъ формулъ корней; поэтому, послѣднія приложимы и къ случаю $a = 0$.

Примѣръ. Во что обращаются корни уравненія

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2(2a^2 - b^2)x + 4a^2 - b^2 = 0$$

при $a = b$?

Такъ какъ при $a = b$ коэффициентъ при x^2 обращается въ нуль, то одинъ изъ корней обращается въ ∞ , а другой принимаетъ значение дроби $\frac{4a^2 - b^2}{2(2a^2 - b^2)}$ при $a = b$, т.-е. $= \frac{3}{2}$.

Это можно проверить и общими формулами корней, которыя даютъ

$$x' = \frac{2a - b}{a - b}, \quad x'' = \frac{2a + b}{a + b}.$$

454. II. Коэффициенты a и b одновременно равны нулю. Обращаясь къ формуламъ корней, находимъ, что при $a = b = 0$ оба корня принимаютъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$.

Чтобы раскрыть неопредѣленность, преобразуемъ формулы корней такимъ же точно образомъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ; найдемъ:

$$x' = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad x'' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Положивъ здѣсь $a = 0$ и $b = 0$, имѣемъ

$$x' = \frac{2c}{0} = \infty, \quad x'' = \frac{2c}{0} = \infty.$$

Итакъ, при $a = b = 0$ оба корня безконечны.

Обращаясь къ уравненію, даемъ ему видъ

$$\left(\frac{1}{x} + b + \frac{c}{x}\right) = -a,$$

т.е. такъ какъ $a = b = 0$, видъ

$$\frac{c}{x^2} = 0.$$

Такъ какъ c конечно, то этому уравненію можно удовлетворить единственнымъ способомъ, положивъ $x = \infty$.

Примѣръ. Каковы корни уравненія

$$(a - b)^2 x^2 - (a^2 - ab - 2b^2)x + (2a^2 - 3ab + b^2) = 0$$

при $a = -b$?

Когда $a = -b$, коэффициенты $(a+b)^2$ и $(a^2 - ab - 2b^2)$ при x^2 и x обращаются въ нули, между тѣмъ какъ свободный членъ въ $6b^2$; заключаемъ, что при $a = -b$ оба корня безконечны.

То же можно видѣть и изъ формулъ корней; рѣшая данныя уравненія, имѣемъ

$$x' = \frac{a-b}{a+b}, \quad x'' = \frac{2a-b}{a+b};$$

сдѣлавъ $a = -b$, имѣемъ

$$x' = \frac{-2b}{0} = \infty; \quad x'' = \frac{-3b}{0} = \infty.$$

455. III. Всѣ три коэффициента a , b и c равны нулю. Изъ формулъ корней убѣдимся, что онѣ представляютъ дѣйствительную неопредѣленность.

Обращаясь къ уравненію, заключаемъ, что оно принимаетъ видъ

$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0,$$

и следовательно удовлетворяется всякимъ значеніемъ x ; это — тождество.

Вычисленіе корней уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, когда коэффициентъ a весьма малъ.

456. Когда коэффициентъ a весьма малъ, то изъ предыдущаго изслѣдованія (§ 452) видно, что одинъ изъ корней будетъ, по абсолютной величинѣ, весьма великъ, другой же близокъ къ $-\frac{c}{b}$. Общая формулы корней

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

въ данномъ случаѣ будутъ неудобны для вычисленій. Въ самомъ дѣлѣ, $b^2 - 4ac$ вообще не есть точный квадратъ, и слѣд. $\sqrt{b^2 - 4ac}$ придется вычислять приблизительно. Ошибку, сдѣланную при вычисленіи $\sqrt{b^2 - 4ac}$ нужно будетъ раздѣлить на $2a$ для нахожденія ошибки x' или x'' ; и если a весьма мало, напр. $\frac{5}{100000}$, то $2a = \frac{1}{10000}$, а потому ошибка ε , сдѣланная при вычисленіи $\sqrt{b^2 - 4ac}$, поведетъ за собою погрѣшность, равную 10000ε въ величинахъ x и x' . Такъ что, если бы мы пожелали вычислить корни уравненія съ точностью до $\frac{1}{10^4}$, то должны бы были $\sqrt{b^2 - 4ac}$ найти съ точностью до $\frac{1}{10000} \times \frac{1}{10^4}$, т. е. съ 4 лишними десятичными знаками.

Отсюда понятно, что сложность вычисленій будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ меньше a .

Несравненно легче, при маломъ a , вычислять корни особымъ способомъ, называемымъ *методомъ послѣдовательныхъ приближеній*. Этимъ способомъ достаточно вычислить одинъ изъ корней; въ самомъ дѣлѣ, сумма корней известна

и равна $-\frac{b}{a}$ (въ чемъ убѣдимся, сложивъ формулы x' и x''), и если будетъ вычисленъ корень x' , то другой найдемъ, вычтя изъ суммы извѣстный корень:

$$x'' = -\frac{b}{a} - x.$$

Нужно разсмотрѣть два случая: корни одинаковаго знака, и корни разнаго знака. Если черезъ a , b и c означить абсолютныя числа, то уравненіе съ положительными корнями будетъ вида: $ax^2 - bx + c = 0$; съ отрицательными: $ax^2 + bx + c = 0$. Достаточно указать вычисленіе положительныхъ корней, т.-е. ур—нія $ax^2 - bx + c = 0$; ибо, если оба корня отрицательны, то перемѣнивъ у b знакъ $+$ на $-$, получимъ ур—ніе съ положительными корнями, вычисливъ которые и перемѣнивъ у нихъ знакъ, получимъ корни ур—нія $ax^2 + bx + c = 0$.

457. 1-й случай. Знаки корней одинаковы. Итакъ, разсмотримъ уравненіе съ положительными корнями, т.-е. вида

$$ax^2 - bx + c = 0, \dots (1)$$

гдѣ a , b и c —абсолютнымъ числамъ, и слѣд. знаки окончательныя.

Меньшій корень этого уравненія есть

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})} \cdot \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \dots (2).$$

Этотъ корень мы и вычисляемъ.

Рѣшая ур. (1) относительно bx , получимъ

$$bx = c + ax^2,$$

$$x = \frac{c}{b} + \frac{a}{b} x^2 \dots (3).$$

Такъ a весьма мало, b величина конечная, x представляетъ въ этой формулѣ меньшій корень, имѣющій также конечную величину, то и $\frac{a}{b} x^2$ будетъ весьма мало. Поэтому, откинувъ членъ $\frac{a}{b} x^2$, мы сдѣлаемъ небольшую ошибку, и слѣд. первымъ приближеніемъ корня x будемъ имѣть

$$x_1 = \frac{c}{b}.$$

Это приближеніе меньше настоящей величины x , ибо откинули положительный членъ $\frac{a}{b} x^2$.

Если теперь въ формулѣ (3) замѣнимъ во второй части x величиною $\frac{c}{b}$ меньшею чѣмъ x , то получимъ второе приближеніе

$$x_2 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{c}{b} + \frac{ac^2}{b^3}.$$

и горѣ опять меньше настоящей величины x , но больше чѣмъ x_1 , такъ какъ $\frac{ac^2}{b^3}$.

Замѣнивъ снова въ ур. (3) во второй части x черезъ x_2 , найдемъ третье приближеніе

$$x_3 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_2)^2,$$

снова меньшее истинной величины x' , ибо x_2 меньше x' . Но x_3 будетъ больше x_2 ; въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что $x_2 > x_1$; возвысивъ обѣ части послѣдняго неравенства въ квадраты, помноживъ на $\frac{a}{b}$ и придавъ по $\frac{c}{b}$, получимъ

$$\frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_2)^2 > \frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_1)^2$$

то-есть $x_3 > x_2$ и т. д.

Итакъ, послѣдовательныя приближенія идутъ все увеличиваясь, но всегда остаются меньше x' , сл. они приближаются къ x' . Докажемъ теперь, что разность между x' и приближеніями стремится къ нулю, и сл. можетъ быть сдѣлана какъ угодно малю.

Разность между x' и первымъ приближеніемъ x_1 , т.-е. погрѣшность перваго приближенія мы выразимъ изъ уравненія (3), которое даетъ (замѣтивъ, что $\frac{c}{b} = x_1$):

$$x' - x_1 = \frac{a}{b}(x')^2.$$

Но x' , на основаніи (2), равняется $\frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$, и слѣд. x' меньше $\frac{2c}{b}$; написавъ неравенство

$$x' < \frac{2c}{b},$$

возвысивъ обѣ его части въ квадраты и умноживъ на $\frac{a}{b}$, найдемъ

$$\frac{a}{b}(x')^2 < \frac{a}{b} \times \frac{4c^2}{b^2};$$

замѣнивъ первую часть равною ей величиною $x' - x_1$, которую обозначимъ черезъ ϵ_1 , имѣемъ:

$$\epsilon_1 < \frac{4ac}{b^2} \times \frac{c}{b}.$$

Эта формула даетъ предѣлъ погрѣшности 1-го приближенія.

Вообще, погрѣшность n -го приближенія

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= x' - x_n = \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b}x'^2 \right) - \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b}x_{n-1}^2 \right) = \frac{a}{b}(x'^2 - x_{n-1}^2) \\ &= \frac{a}{b}(x' + x_{n-1})(x' - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Но

$$x' - x_{n-1} = \epsilon_{n-1}; \quad \text{а} \quad x' + x_{n-1} < 2x'$$

ибо $x_{n-1} < x'$; но $x' < \frac{2c}{b}$, откуда $2x' < \frac{4c}{b}$, а потому и подално

$$x' - x_{n-1} < \frac{4c}{b}.$$

Слѣдовательно

$$\varepsilon_n < \frac{4ac}{b^2} \cdot \varepsilon_{n-1}$$

Дѣлая въ этой формулѣ послѣдовательно $n = 2, 3, 4, \dots$, и принявъ формулу для 1-го приближенія, имѣемъ

$$\begin{cases} \varepsilon_1 < \frac{4ac}{b^2} \times \frac{c}{b} \\ \varepsilon_2 < \frac{4ac}{b^2} \times \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 < \frac{4ac}{b^2} \times \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n < \frac{4ac}{b^2} \times \varepsilon_{n-1} \end{cases}$$

Перемножая почленно эти неравенства, сокращая общіе части на общаго множителі

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 \cdot \dots \cdot \varepsilon_{n-1},$$

получимъ

$$\varepsilon_n < \left(\frac{4ac}{b^2} \right)^n \cdot \frac{c}{b}.$$

Но корни дѣйствительные, слѣд.

$$b^2 - 4ac > 0.$$

откуда

$$\frac{4ac}{b^2} < 1.$$

Если количество, меньшее 1, возвышать въ возрастающія степени, то степени эти приближаются къ нулю, если же $\left(\frac{4ac}{b^2} \right)^n$ приближается къ нулю, то и произведеніе его на конечную величину $\frac{c}{b}$ также стремится къ 0.

Итакъ, количеству n всегда можно дать такую величину, чтобы ε_n было какъ угодно мало.

Итакъ, указаннымъ способомъ всегда можно найти приближенную величину x — корня съ какою угодно точностью; причемъ, останавливаясь на приближеніи x_n , дѣлаемъ ошибку меньшую

$$\left(\frac{4ac}{b^2} \right)^n \times \frac{c}{b}.$$

Этотъ способъ приложимъ всякій разъ, когда $\frac{4ac}{b^2} < 1$, т.-е. когда корни

действительные; но практически пригоден тогда, когда $\frac{4ac}{b^2}$ весьма малая дробь сравнительно съ 1, ибо только въ этомъ случаѣ x_1, x_2, \dots, x_n достаточно быстро приближаются къ x' .

Примѣръ. Дано ур.

$$3x^2 - 7640x + 400 = 0.$$

Имѣемъ:

$$a = 3; \quad b = 7640; \quad c = 400.$$

$$\frac{4ac}{b^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 400}{58369600} = \frac{4800}{58369600} = \frac{48}{583696} \dots (1)$$

если бы имѣли дробь $\frac{48}{480000} \dots (1)$, то по сокращеніи она дала бы $\frac{1}{10000}$; но (1) имѣетъ такого же числителя какъ (1), но большаго знаменателя, слѣд. (1) или

$$\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}.$$

Эта дробь весьма мала сравнительно съ 1, слѣд. наша метода приложима.

Первое приближеніе для меньшаго корня есть

$$x_1 = \frac{c}{b} = \frac{400}{7640} = \frac{40}{764};$$

его ошибка

$$\varepsilon_1 < \frac{4ac}{b^2} \times \frac{c}{b};$$

но $\frac{4ac}{b^2} = \frac{1}{10000}$; а $\frac{c}{b}$, по обращеніи въ десятичную дробь, даетъ

$$\frac{c}{b} = 0,05235602 \dots$$

слѣд.

$$\frac{c}{b} = 0,06.$$

Поэтому

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{10000} \times \frac{6}{100} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 = \frac{6}{1000000}$$

сл. ε_1 навѣрное меньше $\frac{1}{100000}$.

Слѣд., взявъ для x' число 0,05235, получимъ меньшій корень съ ошибкою, меньшею $\frac{1}{100000}$; итакъ

$$x_1 = 0,05235.$$

Вычисляя еще второе приближеніе; оно будетъ

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_1^2.$$

Ошибка этого приближения $\varepsilon_2 = \frac{4ac}{b^2} \cdot \varepsilon_1$; но мы видели, что $\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}$, а $\varepsilon_1 < \frac{6}{1000000}$; значитъ

$$\varepsilon_2 < \frac{6}{1000000000}.$$

Вычисляя $\sqrt{\frac{a}{b} \left(x_1 \right)^2}$ съ 10-ю дес. знаками, имѣемъ

$$\frac{c}{b} = 0,0523560209 \dots$$

$$\frac{a}{b} \left(x_1 \right)^2 = 0,0000010763 \dots$$

$$0,0523570972.$$

Для 9 десятичныхъ мѣстъ, имѣемъ:

$$x_1 = 0,052357097$$

с ошибкою $< \frac{1}{10^9}$.

Чтобы вычислить другой корень, нужно изъ суммы корней, равной $\frac{7640}{3}$ вычесть найденный; взявъ въ $\frac{7640}{3}$ девять десятичныхъ мѣстъ, имѣемъ:

$$\begin{array}{r} 2546,666666666 \\ - 0,052357097 \\ \hline 2546,614309569, \end{array} \text{ съ точн. до } \frac{1}{10^9}.$$

458. 2-й случай. Знаки корней различны.

Если знаки корней различны, что будетъ, когда c отрицательно, то, назвавъ абсолютныя величины коэффициентовъ черезъ a , b и c , уравнение будетъ одного изъ слѣдующихъ видовъ:

$$ax^2 + bx - c = 0, \quad ax^2 - bx - c = 0.$$

Въ первомъ уравненіи меньшій корень положительнъ, во второмъ отрицателенъ; но если во второе вм. x подставимъ $-x$, то превратимъ его въ первый видъ, т.-е. меньшій корень сдѣлаемъ положительнымъ.

Поэтому рассмотримъ, какъ найти положит. корень уравненія

$$ax^2 + bx - c = 0$$

2-мъ способомъ послѣдовательныхъ приближеній.

опредѣляя bx , находимъ

$$bx = c - ax^2,$$

3-мъ способомъ

$$x = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x^2.$$

Послѣдовательныя приближенія будутъ:

$$x_1 = \frac{c}{b}; \quad x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot (x_1)^2; \quad x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} (x_2)^2; \quad x_4 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} (x_3)^2;$$

и вообще

$$x_n = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot (x_{n-1})^2.$$

Искомый меньшій корень выражается формулою

$$x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2. \quad (1)$$

Очевидно, что

$$x_1 < x'. \quad (2)$$

Возвышая обѣ части этого неравенства въ квадратъ и затѣмъ умножая на $\frac{a}{b}$, найдемъ

$$\frac{a}{b} (x_1)^2 > \frac{a}{b} (x')^2;$$

вычитая это неравенство изъ равенства $\frac{c}{b} = \frac{c}{b}$, получ.

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b} (x_1)^2 < \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \cdot x'^2;$$

первая часть есть x_2 , а вторая есть x' , слѣд.

$$x_2 < x'.$$

Возвышая обѣ части этого неравенства въ квадратъ, затѣмъ умножая на $\frac{a}{b}$, имѣемъ

$$\frac{a}{b} (x_2)^2 < \frac{a}{b} \cdot (x')^2;$$

вычитая это неравенство изъ равенства $\frac{c}{b} = \frac{c}{b}$, имѣемъ:

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b} (x_2)^2 > \frac{c}{b} - \frac{a}{b} (x')^2;$$

первая часть есть x_3 , а вторая $= x'$, слѣд.

$$x_3 > x';$$

и т. д.

Продолжая такимъ образомъ, убѣдимся, что всѣ приближенія нечетнаго порядка больше настоящей величины x' , а четнаго — меньше x .

Кромѣ того, если выпишемъ всѣ четныя, затѣмъ всѣ нечетныя приближенія, получимъ два ряда:

$$\begin{array}{ll} x_1 = \frac{c}{b} & x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_1)^2 \\ x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_2)^2 & x_4 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_3)^2 \\ x_5 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_4)^2 & x_6 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_5)^2 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Разсматривая первую пару нечетныхъ приближеній, замѣчаемъ, что, очевидно:

$$x_3 < x_1.$$

Обращаясь затѣмъ къ первой парѣ четныхъ приближеній, и взявъ ихъ разность, имѣемъ

$$x_4 - x_2 = \frac{a}{b}(x_1^2 - x_3^2); \text{ но } x_3 < x_1, \text{ слѣд.}$$

$$x_4 > x_2.$$

Переходя ко второй парѣ нечетныхъ приближеній и взявъ ихъ разность, находимъ:

$$x_5 - x_3 = \frac{a}{b}(x_4^2 - x_2^2); \text{ но } x_4 > x_2, \text{ слѣд.}$$

$$x_5 < x_3.$$

Взявъ разность второй пары четныхъ приближеній:

$$x_6 - x_4 = \frac{a}{b}(x_5^2 - x_3^2); \text{ но } x_5 < x_3, \text{ слѣд.}$$

$$x_6 > x_4; \text{ и т. д.}$$

Заключаемъ, что приближенія нечетнаго порядка, оставаясь всегда больше x' , идутъ постепенно уменьшаясь и слѣд. приближаются къ x' ; приближенія же четнаго порядка, всегда оставаясь меньше x' , идутъ увеличиваясь, и слѣд. также приближаются къ x' .

Докажемъ, что разность между тѣми и другими приближеніями и x' стремится къ нулю, и слѣд. м. б. сдѣлана какъ угодно малою.

Возьмемъ приближеніе нечетнаго порядка x_{2p+1} , которое больше x' , и назовемъ погрѣшность этого приближенія, т.-е. разность между нимъ и x' , черезъ ϵ_{2p+1} ; имѣемъ:

$$\begin{aligned} \epsilon_{2p+1} &= x_{2p+1} - x' = \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_{2p}^2 \right) - \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2 \right) \\ &= \frac{a}{b} (x'^2 - x_{2p}^2) = \frac{a}{b} (x' + x_{2p})(x' - x_{2p}) = \frac{a}{b} (x' + x_{2p}) \cdot \epsilon_{2p} \end{aligned}$$

Но, по (2), $x = x_1$ или $\frac{c}{b}$; x_{2p} , какъ приближеніе четнаго порядка, меньше c' , а сл. и подавно x_1 или $\frac{c}{b}$; итакъ

$$x' = \frac{c}{b}$$

$$x_{2p} = \frac{c}{b} \quad \text{складывая, имѣемъ}$$

$$x' - x_{2p} = \frac{2c}{b}$$

слѣд.

$$\varepsilon_{2p-1} = \frac{2ac}{b^2} = \varepsilon_{2p}.$$

Кромѣ того

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{b} \cdot x^2, \quad \text{но } x' < \frac{c}{b}, \quad \text{сл. } x'^2 < \frac{c^2}{b^2},$$

потому

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{b} \times \frac{c^2}{b^2}$$

или множимъ дѣля вторую часть на 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{2ac}{b^2} = \frac{c}{2b}$$

Выразимъ теперь предѣлъ погрѣшности приближенія четнаго порядка, принимая x_{2p} . Имѣемъ

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2p} = x' - x_{2p} &= \frac{c}{b} - \left(\frac{a}{b} \cdot x^2 \right) = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_{2p-1}^2 \\ &= \frac{a}{b} \cdot x_{2p-1}^2 - x'^2 = \frac{a}{b} (x_{2p-1} - x')(x_{2p-1} + x') \\ &= \frac{a}{b} (x_{2p-1} + x') \cdot \varepsilon_{2p-1}. \end{aligned}$$

Но x_{2p-1} и x' меньше x_1 или $\frac{c}{b}$, сл.

$$\varepsilon_{2p} < \frac{2ac}{b^2} = \varepsilon_{2p-1}$$

Итакъ, предѣлъ погрѣшности четнаго и нечетнаго порядка выражается одинаково: произведеніемъ $\frac{2ac}{b^2}$ на погрѣшность предшествующаго приближенія. Слѣд., будетъ ли n четное или нечетное, всегда

$$\varepsilon_n < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_{n-1}.$$

Полагая въ этой формулѣ $n = 2, 3, 4, \dots, n$, получимъ формулы по-

погрѣшностей 2-го, 3-го, . . . приближеній; присоединивъ сюда формулу погрѣшности 1-го приближенія, имѣемъ:

$$\varepsilon_1 < \frac{2ac}{b^2} \times \frac{c}{2b}$$

$$\varepsilon_2 < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_3 < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\varepsilon_n < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_{n-1};$$

Перемножая и сокращая общихъ множителей, найдемъ

$$\varepsilon_n < \left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}.$$

Отсюда видно, что если $\frac{2ac}{b^2}$ будетъ < 1 , или, что все равно, если

$$a < \frac{b^2}{2c},$$

то всегда можно взять n достаточно большимъ, чтобы сдѣлать $\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}$ меньше данной величины; и сл. что погрѣшность ε_n , и подавно, была меньше той же величины.

Но и въ этомъ случаѣ метода удобна только тогда, когда $\frac{2ac}{b^2}$ будетъ *значительно* меньше 1, ибо только при такомъ условіи x_1, x_2, x_3, \dots будутъ быстро приближаться къ искомой величинѣ. Остановливаясь на приближеніи нечетнаго порядка, получимъ величину ошибочную по избытку; останавливаясь на приближеніи четнаго порядка, имѣемъ величину съ ошибкою по недостатку; въ обоихъ случаяхъ высшій предѣлъ сдѣланной погрѣшности узнаемъ, вычисливъ

$$\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}.$$

Примѣръ. $5x^2 + 140x - 7 = 0$. Здѣсь

$$a = 5; \quad b = 140; \quad c = 7;$$

$\frac{2ac}{b^2} = \frac{70}{140^2} = \frac{1}{280}$; это число значительно < 1 , поэтому метода приложима. Первое приближеніе

$$x_1 = \frac{c}{b} = \frac{7}{140} = \frac{1}{20} = 0,05$$

Погрѣшность этого приближенія, ε_1 , будетъ меньше $\frac{2ac}{b^2} \times \frac{c}{2b} = \frac{1}{280} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{11200}$, а сл. и подавно, $< \frac{1}{10000}$.

Второе приближеніе

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_1^2 = 0,05 - \frac{1}{28} \cdot 0,0025 = 0,0499107.$$

Ошибка $\varepsilon_2 < \frac{(2ac)^2}{b^2} \times \frac{c}{2b}$, или $< \frac{1}{(280)^2} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{3136000}$, а потому и по-
давно меньше $\frac{1}{8} \times \frac{1}{1000000}$.

Значить, положительный корень, съ ошибкою меньшею одвой полу-милліон-
ной, равенъ

$$0,049911.$$

Сумма корней — 28, сл. отриц. корень, съ тою же точностью, равенъ

$$-27,950089.$$

ГЛАВА XXXI.

Связь между коэффициентами и корнями квадратнаго уравненія.—Приложенія.—По-
строеніе корней квадратнаго уравненія.

459. Теорема. *Каковы бы ни были корни уравненія*

$$ax^2 + bx + c = 0:$$

1) *ихъ сумма равна взятому съ обратнымъ знакомъ частному отъ
раздѣленія втораго коэффициента на первый, т.-е.*

$$-\frac{b}{a};$$

2) *а произведеніе равно частному отъ раздѣленія третьаго коэф-
фициента на первый, т.-е.*

$$\frac{c}{a}.$$

Повѣрка. Мы знаемъ, что во всѣхъ случаяхъ корни даннаго уравненія
выражаются формулами

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

складывая которыя, находимъ

$$x' + x'' = -\frac{b}{a};$$

а перемножая, находимъ

$$x \cdot x' = \frac{(-b + 1) b^2 - 4ac}{4a^2} \cdot \frac{(-b - 1) b^2 - 4ac}{4a^2};$$

замѣчая, что числитель представляетъ произведение суммы двухъ количествъ на ихъ разность, и слѣд. равенъ разности ихъ квадратовъ, имѣемъ:

$$x \cdot x' = \frac{(-b)^2 - (1 b^2 - 4ac)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Первое доказательство. Такъ какъ корни x' и x'' , при подстановкѣ въ уравненіе, обращаютъ его въ тождество, то имѣемъ два тождества

$$ax'^2 - bx' + c = 0, \quad ax''^2 + bx'' + c = 0.$$

Принимая за неизвѣстныя—коэффициенты a , b и c , видимъ, что они удовлетворяютъ двумъ ур—мъ, и потому задача объ ихъ нахожденіи неопредѣленна.

Но если оба равенства раздѣлимъ на a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad x''^2 + \frac{b}{a}x'' + \frac{c}{a} = 0,$$

то, принимая за неизвѣстныя—отношенія $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$, находимъ, что эти отношенія должны удовлетворять двумъ уравненіямъ, и потому задача объ ихъ нахожденіи опредѣленна. Эти два ур—нія и дадутъ намъ величины $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ въ функціи корней. Для исключенія $\frac{c}{a}$ вычитаемъ 2-е ур—ніе изъ 1-го и находимъ

$$(x'^2 - x''^2) + \frac{b}{a}(x' - x'') = 0.$$

Положимъ, что $x' \leq x''$; въ такомъ случаѣ позволительно сократить ур—ніе на количество $x - x'$ (какъ неравное нулю), и получится

$$x' + x'' + \frac{b}{a} = 0, \quad \text{откуда} \quad x' + x'' = -\frac{b}{a}.$$

Внеся вмѣсто $\frac{b}{a}$ равную ему величину $-(x' + x'')$ въ первое уравненіе, найдемъ

$$x'^2 - (x' + x'')x' + \frac{c}{a} = 0, \quad \text{или} \quad -x'x'' + \frac{c}{a} = 0,$$

откуда

$$x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Теорема доказана; но опредѣленіе $\frac{b}{a}$ сдѣлано въ предположеніи, что корни неравны. Остается доказать, что теорема справедлива и въ случаѣ равныхъ корней. Мы знаемъ, что если корни равны, то каждый изъ нихъ $= -\frac{b}{2a}$, слѣд., ихъ сумма $= -\frac{b}{a}$; а отсюда, какъ и выше, найдемъ, что $x'x'' = \frac{c}{a}$.

Второе доказательство. Такъ какъ x' и x'' суть корни уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, то триномъ $ax^2 + bx + c$ обращается въ нуль при постановкѣ въ него x' и x'' вмѣсто x , и слѣд. дѣлится какъ на $x - x'$, такъ и на $x - x''$; слѣд., если x не равно x' , то этотъ триномъ, на основ. теоремы § 65, дѣлится и на произведение $(x - x')(x - x'')$, а какъ дѣлитель—одннковой степени съ дѣляемымъ, то частное будетъ нулевой степени относительно x , и потому приводится къ одному члену, именно къ частному отъ раздѣленія перваго члена, ax^2 , дѣляимаго на первый членъ x^2 дѣлителя, что даетъ a . Итакъ

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x''),$$

или, раскрывъ вторую часть и расположивъ по степенямъ буквы x , находимъ тождество

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x'';$$

а отнявъ отъ обѣихъ частей по ax^2 ,

$$bx + c = -a(x' + x'')x + ax'x''.$$

Отсюда, по теоремѣ § 71, имѣемъ

$$b = -a(x' + x'') \quad \text{и} \quad c = ax'x'';$$

выражая изъ 1-го равенства $x' + x''$, а изъ 2-го $x'x''$, находимъ:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}; \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

И это доказательство предполагаетъ, что $x \neq x'$. Но нужно замѣтить, что если найденныя соотношенія вѣрны, когда корни различны, то они справедливы и тогда, когда корни разнятся между собою какъ угодно мало, а потому справедливы и для равныхъ корней.

460. Примѣчаніе. Если уравненіе имѣетъ видъ

$$x^2 + px + q = 0,$$

то, чтобы перейти къ нему отъ уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, надо положить: $a = 1$, $b = p$, $c = q$.

Тогда формулы соотношеній примутъ видъ:

$$x' + x'' = -\frac{p}{1} = -p; \quad x'x'' = \frac{q}{1} = q;$$

слѣд., сумма корней уравненія $x^2 + px + q = 0$ равна коэффициенту при первой степени неизвестнаго, взятому съ обратнымъ знакомъ, а произведение корней равно известному члену.

461. Слѣдствія. I. Вычислить разность корней уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, не рѣшая уравненія.

Обозначивъ разность корней буквою z , можемъ выразить z^2 по суммѣ и произведенію корней; въ самомъ дѣлѣ:

$$z^2 = (x' - x'')^2 = x'^2 + x''^2 - 2x'x'' = x'^2 + x''^2 + 2xx' - 4x'x'' \\ (x' + x'')^2 - 4x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2},$$

откуда

$$z = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$$

Тотъ же результатъ нашли бы и прямымъ вычитаніемъ корней.

II. Когда извѣстенъ одинъ изъ корней квадратнаго уравненія, то другой можно найти, не рѣшая уравненія, а: 1) раздѣливъ произведеніе корней $\frac{c}{a}$ на извѣстный корень, или: 2) вычитъ извѣстный корень изъ суммы корней, т.-е. изъ $-\frac{b}{a}$.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a-b}$. Прямо видно, что уравненіе имѣетъ корень $x = a$, ибо при $x = a$ обѣ части дѣлаются тождественными.

Для нахожденія второго корня приводимъ уравненіе къ пблному виду:

$$(2a + b)x^2 + (b^2 - 2a^2)x - ab(a + b) = 0;$$

и раздѣливъ произведеніе корней $-\frac{ab(a+b)}{2a+b}$ на извѣстный корень a , найдемъ другой корень

$$x'' = -\frac{b(a+b)}{2a+b}.$$

Можно рѣшить это ур—ніе и другимъ приемомъ; напишемъ его въ видѣ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a-b} = 0, \text{ или } (a-x)(x+b)(a-b) - ax = 0.$$

Приравнявая нулю первый множитель, находимъ одинъ корень $x' = a$; приравнявъ нулю второй множитель, получаемъ ур—ніе первой степени

$$(x+b)(a+b) + ax = 0.$$

откуда и найдемъ второй корень.

III. Когда коэффициенты уравненія сопряжены, то действительные корни или оба сопряжены, или оба несопряжены, потому что нѣтъ суммы, напр., сопряженныхъ; и когда они несопряжены, то сопряжены.

IV. — Когда коэффициенты ур—нія действительны, то или оба корня действительны, или оба мнимы, ибо ихъ сумма действительна, и когда они мнимы, то сопряжены.

Переходимъ къ изученію приложений теоремы § 459.

462. Приложение I. Исследование, à priori, корней квадратнаго уравненія.

Определение.—Исследовать à priori квадратное уравнение значитъ: не рѣшая его, определить, будутъ ли корни его действительные или мнимые; когда они действительны, узнать равные они, или неравные; въ случаѣ ихъ равенства, указать ихъ общую величину, въ случаѣ же неравенства указать—одинаковаго они знака, или имѣютъ знаки противоположные; если имѣютъ общій знакъ, то указать—какой именно; если же знаки корней различны, то указать знакъ корня, имѣющаго большую абсолютную величину.

I. Если окажется, что

$$b^2 - 4ac < 0,$$

то корни уравненія будутъ мнимые сопряженные.

II. Если

$$b^2 - 4ac = 0,$$

то мы знаемъ, что корни уравненія действительные равные, и общая величина ихъ есть

$$-\frac{b}{2a}.$$

откуда видно, что оба корня положительны, когда $\frac{b}{a} < 0$, оба отрицательны, когда $\frac{b}{a} > 0$, и оба равны нулю, когда $\frac{b}{a} = 0$.

III. Наконецъ, если окажется, что

$$b^2 - 4ac > 0,$$

то заключаемъ, что уравненіе имѣетъ корни действительные неравные. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что для опредѣленія знака разности $b^2 - 4ac$ не всегда необходимо вычислять эту разность, а именно если $ac < 0$, т.е. a и c имѣютъ знаки противоположные, то разность $b^2 - 4ac$ необходимо положительна. Въ самомъ дѣлѣ, если $ac < 0$, то можно положить $4ac = -a^2$, гдѣ $-a^2$ количество существенно-отрицательное, и слѣд. $b^2 - 4ac = b^2 - (-a^2) = b^2 + a^2$, а сумма квадратовъ действительныхъ количествъ существенно положительна. Значитъ, при $ac < 0$ корни уравненія безусловно действительны.

Когда уравненіе имѣетъ корни действительные и неравные, то:

1) Если $\frac{c}{a} > 0$, т.е. произведеніе корней положительно, оба корня имѣютъ одинаковые знаки. Но если знаки корней одинаковы, то общій знакъ будетъ такой, какъ у ихъ суммы, которая равна $-\frac{b}{a}$.

Отсюда:

Если $\frac{b}{a} > 0$, то $-\frac{b}{a}$ будетъ количество отрицательное, и слѣд. оба корня отрицательны.

Если $\frac{b}{a} < 0$, то $-\frac{b}{a}$ положительно, и потому оба корня положительны.

Предположеніе $\frac{b}{a} = 0$ невозможно, ибо изъ него слѣдовало бы, что корни

равны и *противоположны по знаку*, что противно предположению $\frac{c}{a} > 0$, которое требует, чтобы знак корней был одинаковъ.

2) Если $\frac{c}{a} < 0$, т.-е. произведение корней отрицательно, то знаки корней противоположны. Но въ такомъ случаѣ сумма ихъ имѣетъ такой знакъ, какой у корня съ большею абсолютною величиной. Отсюда:

Если $\frac{b}{a} > 0$, то сумма корней $-\frac{b}{a}$ будетъ *отрицательна*, и слѣд. большій, по абсолютной величинѣ, корень *отрицателенъ*.

Если $\frac{b}{a} < 0$, и слѣд. $-\frac{b}{a} > 0$, то большій, по абсолютному значенію, корень *положителенъ*.

Наконецъ, если $\frac{b}{a} = 0$, то сумма корней $=$ нулю, сл. корни равны по величинѣ и противоположны по знаку.

3) Если $\frac{c}{a} = 0$, то одинъ корень $=$ нулю. Что касается другого, то:

Когда $\frac{b}{a} > 0$, сумма корней *отрицательна*, а, слѣд., другой корень *отрицателенъ*.

Когда $\frac{b}{a} < 0$, сумма *положительна*, и другой корень *положителенъ*.

Гипотеза $\frac{b}{a} = 0$ не имѣетъ мѣста, ибо въ этомъ случаѣ выходило бы $b = 0$, $c = 0$, а слѣдовательно вышло бы и $b^2 = 4ac = 0$, что противорѣчитъ условію $b^2 = 4ac > 0$.

Использованіе можно резюмировать такъ:

I. $b^2 = 4ac < 0$, корни уравненія *чуждые сопряженные*.

Первую часть уравненія можно представить въ формѣ суммы двухъ квадратовъ.

II. $b^2 = 4ac = 0$.

Корни действительные равные.	{	$\frac{b}{a} < 0$, корни <i>положительны</i> .
		$\frac{b}{a} > 0$, корни <i>отрицательны</i> .
		$\frac{b}{a} = 0$, корни <i>равны нулю</i> .

Первую часть уравненія можно представить въ формѣ полного квадрата.

III. $b^2 = 4ac > 0$.

Корни действительные неравные.	{	Знаки корней одинаковы	$\frac{c}{a} > 0 \dots$	$\frac{b}{a} < 0$, оба корня <i>положительны</i> .
			$\frac{c}{a} < 0 \dots$	$\frac{b}{a} > 0$, оба корня <i>отрицательны</i> .
		знаки корней различны	$\frac{c}{a} = 0 \dots$	$\frac{b}{a} > 0$, корень съ большею абсолютною величиною <i>отрицателенъ</i> .
			$b = 0$, большій по абсолютн. величинѣ корень <i>положителенъ</i> .	
			$a = 0$, корни равны и <i>противоположны по знаку</i> .	
одинъ корень $=$ нулю.	{	$\frac{b}{a} < 0$, другой корень <i>положителенъ</i> .		
		$\frac{b}{a} > 0$, другой корень <i>отрицателенъ</i> .		

Первую часть уравнения можно представить въ формѣ разности двухъ квадратовъ.

Примѣры. I. *Измѣловать корни уравненія*

$$7x^2 + 3x + 5 = 0;$$

въ данномъ случаѣ $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 7 \times 5 = -131$, т.-е. количеству отрицательному, слѣд. корни ~~—~~ мнимые.

II. *Измѣловать корни уравненія*

$$9x^2 - 12x - 4 = 0.$$

Такъ какъ коэффициентъ при x четный, то составляемъ разность $b^2 - ac$; имѣемъ $b^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 \times 4 = 0$, а потому корни уравненія *дѣйствительныя равны*. Общая величина ихъ $= -\frac{b}{a} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$.

III. *Измѣловать корни уравненія*

$$3x^2 - 8x + 4 = 0;$$

$b^2 - ac = 4^2 - 3 \times 4 = 4$, слѣд. корни *дѣйствительныя неравны*. Произведение корней $= +\frac{4}{3}$, т.-е. положительно, слѣд. знаки корней одинаковы. Сумма корней $= +\frac{8}{3}$, т.-е. > 0 , слѣд. оба корня положительны.

IV. *Измѣловать корни уравненія*

$$8x^2 + 57x + 10 = 0;$$

$b^2 - 4ac = 57^2 - 4 \times 8 \times 10 = +2929$, количеству положительному, потому корни *— дѣйствительныя неравны*. Произведение ихъ, равное $+\frac{10}{8}$, положительно, слѣд. знаки корней одинаковы. Сумма корней, равная $-\frac{57}{8}$, отрицательна, слѣд. оба корня отрицательны.

V. *Измѣловать корни уравненія*

$$3x^2 - 8x - 3 = 0;$$

a и c имѣютъ знаки противоположныя, слѣд. корни *дѣйствительныя неравны*. Произведение ихъ, равное -1 , отрицательно, потому знаки корней различны. Сумма корней, равная $+\frac{8}{3}$, положительна, слѣд. больши́й по абсолютной величинѣ корень положителенъ.

VI. *Измѣловать корни уравненія*

$$3x^2 + 8x - 3 = 0;$$

a и c — разнаго знака, сл. опять корни уравненія *дѣйствительныя, неравные*

и разнаго знака. Сумма ихъ, равная $-\frac{8}{3}$, отрицательна, слѣд. большій по абсолютной величинѣ корень отрицателенъ.

463. Приложение II. Составленіе квадратнаго уравненія по даннымъ корнямъ.

Пусть требуется составить квадратное уравненіе, корнями котораго были бы количества α и β . Искомое ур—ніе должно быть вида

$$x^2 + px + q = 0;$$

нужно определить коэффициенты p и q ; соотношенія между коэффициентами и корнями дадутъ:

$$p = -(\alpha + \beta), \quad q = \alpha \cdot \beta;$$

искомое ур—ніе такимъ образомъ есть

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Примѣръ I. Составить ур—ніе, котораго корни были бы: $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{4}$.

Искомое ур—ніе должно быть вида

$$x^2 + px + q = 0,$$

причемъ должно быть:

$$p = -\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) = -\frac{7}{20}, \quad q = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{20};$$

слѣд. исконое ур—ніе будетъ:

$$x^2 + \frac{7}{20}x - \frac{6}{20} = 0, \quad \text{или} \quad 20x^2 + 7x - 6 = 0.$$

II Составить ур—ніе, корнями котораго были бы $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a-b}$;

Искомое ур—ніе должно быть вида

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$\text{гдѣ } p = -\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right) = -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, \quad q = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{ab}{a^2-b^2};$$

слѣд. ур—ніе будетъ

$$x^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x + \frac{ab}{a^2-b^2} = 0, \quad \text{или} \quad (a^2-b^2)x^2 - (a^2+b^2)x + ab = 0.$$

III. Составить квадратное уравненіе, съ неизмѣримыми коэффициентами, которое имѣло бы корень $5\sqrt{3}$.

Искомое ур—ніе должно быть вида

$$x^2 + px + q = 0;$$

такъ какъ, по условію, p и q должны быть *соизмѣримы*, и мы доказали, что ур—ніе съ соизмѣримыми коэффициентами, имѣющее корень $5 - 3\sqrt{7}$, имѣетъ другой корень сопряженный съ первымъ; слѣд. второй корень будетъ $5 + 3\sqrt{7}$; поэтому

$$p = -(5 - 3\sqrt{7} + 5 + 3\sqrt{7}) = -10;$$

$$q = (5 - 3\sqrt{7})(5 + 3\sqrt{7}) = -38;$$

слѣд. искомое уравненіе есть

$$x^2 - 10x - 38 = 0.$$

Примѣчаніе.—Задача эта опредѣлена только тогда, когда существуетъ условіе, чтобы коэффициенты искомага уравненія были соизмѣримы; если этого требованія нѣтъ, то задача неопредѣлена, ибо существуетъ безчисленное множество квадратныхъ уравненій, имѣющихъ данный корень; такъ, уравненія, имѣющія корень $5 - 3\sqrt{7}$ (называя другой корень буквою λ), суть

$$x^2 - (\lambda + 5 - 3\sqrt{7})x + \lambda(5 - 3\sqrt{7}) = 0,$$

гдѣ λ —произвольное количество.

Въ § 449 мы видѣли, что условіе, чтобы квадратное ур—ніе съ *соизмѣримыми коэффициентами* удовлетворялось несоизмѣримымъ значеніемъ $a + \sqrt{3}$ неизвѣстнаго, выражалось двумя соотношеніями между коэффициентами. Взявъ эти соотношенія, мы имѣли бы два ур—нія, изъ которыхъ могли бы получить уже найденныя значенія для p и q .

IV. Составить квадратное ур—ніе, съ *дѣйствительными коэффициентами*, имѣющее корень $2 + 3i$.

Искомое ур—ніе имѣетъ видъ

$$x^2 + px + q = 0;$$

для опредѣленія p и q замѣчаемъ, что ур. съ *дѣйствительными коэффициентами*, имѣющее корень $2 + 3i$, имѣетъ другія корни мнимое сопряженное выраженіе $2 - 3i$. Отсюда

$$p = -(2 + 3i + 2 - 3i) = -4, \quad q = (2 + 3i)(2 - 3i) = 13;$$

и искомое ур—ніе будетъ $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Примѣчаніе. Задача эта опредѣлена потому только, что на коэффициенты наложено ограниченіе, чтобы они были *дѣйствительны*. Если этого ограниченія нѣтъ, задача неопредѣлена: называя буквою λ совершенно произвольное количество, дѣйствительное или мнимое, получимъ уравненіе

$$x^2 - (\lambda + 2 + 3i)x + \lambda(2 + 3i) = 0$$

необходимо имѣющее одинъ изъ корней, равный $2 + 3i$.

Если бы мы прямо выразили, что $2 + 3i$ удовлетворяет уравнению $x^2 + px + q = 0$, то (см. § 45!) въ случаѣ действительныхъ p и q нашли бы два уравненія для опредѣленія p и q , именно:

$$4 - 9 + q + 2p = 0, \quad 12 + 3p = 0,$$

откуда вышли бы $p = -4$, $q = 13$.

464. Приложение III. Преобразование корней квадратнаго уравненія.

Задача I. Дано квадратное уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$; составить другое уравненіе, котораго корни отличались бы отъ корней данного только знаками.

Искомое уравненіе будетъ вида

$$x^2 + px + q = 0,$$

если корни данного уравненія обозначимъ буквами x' и x'' , то корни новаго уравненія равняться $-x'$ и $-x''$; подъ этимъ условіемъ и нужно опредѣлить p и q . Итакъ

$$p = -(-x' - x'') = x' + x'' = -\frac{b}{a}; \quad q = (-x') \cdot (-x'') = x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Слѣд. искомое уравненіе будетъ

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{или} \quad ax^2 - bx + c = 0.$$

Легко видѣть, что мы сю получимъ прямо изъ данного, подставивъ въ последнее $-x$ вмѣсто x .

Задача II. Дано квадратное уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$; составить другое уравненіе, корни котораго были бы обратны корнямъ данного.

Пусть корни данного уравненія будутъ x' и x'' . Мы хотимъ составить уравненіе $x^2 + px + q = 0$, корнями котораго были бы $\frac{1}{x'}$ и $\frac{1}{x''}$; слѣдовательно

$$p = -\left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}\right) = -\frac{x' + x''}{x'x''} = -\left(-\frac{b}{a} : \frac{c}{a}\right) = \frac{b}{c};$$

$$q = \frac{1}{x'} \cdot \frac{1}{x''} = \frac{1}{x'x''} = 1 : \frac{c}{a} = \frac{a}{c}.$$

Такимъ образомъ, искомое уравненіе будетъ

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0, \quad \text{или} \quad cx^2 + bx + a = 0.$$

Этотъ же результатъ мы найдемъ, если въ данное уравненіе подставимъ $\frac{1}{x}$ вмѣсто x ; въ самомъ дѣлѣ, подстановка эта даетъ

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c = 0, \quad \text{или} \quad cx^2 + bx + a = 0.$$

Итакъ: уравненіе съ обратными величинами корней выводится изъ данноею замѣною x обратнымъ ему количествомъ $\frac{1}{x}$.

Задача III. По данному уравненію $ax^2 - bx + c = 0$ составить другое, корни котораго равнялись бы корнямъ данноею, сложеннымъ съ даннымъ количествомъ λ .

Пусть корни данноею уравненія будутъ x' и x'' ; требуется составить уравненіе $x^2 + px + q = 0$, корни котораго были бы $x' + \lambda$ и $x'' + \lambda$. Следовательно

$$p = -(x' + x'' + 2\lambda) = -\left(-\frac{b}{a} + 2\lambda\right) = \frac{b}{a} - 2\lambda;$$

$$q = (x' + \lambda)(x'' + \lambda) = xx' + (x' + x'')\lambda + \lambda^2 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\lambda + \lambda^2.$$

Требуемое уравненіе есть, следовательно,

$$x^2 + \left(\frac{b}{a} - 2\lambda\right)x + \left(\lambda^2 - \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a}\right) = 0,$$

или

$$ax^2 + (b - 2a\lambda)x + (a\lambda^2 - b\lambda + c) = 0.$$

Этотъ результатъ мы нашли бы, если бы въ данное уравненіе вмѣсто x подставили $x - \lambda$; въ самомъ дѣлѣ, подстановка эта даетъ

$$a(x - \lambda)^2 + b(x - \lambda) + c = 0,$$

или, раскрывая скобки и приводя члены въ порядокъ,

$$ax^2 + (b - 2a\lambda)x + (a\lambda^2 - b\lambda + c) = 0.$$

Итакъ: уравненіе съ корнями данноею, сложенными съ λ , выводится изъ данноею замѣною x биномомъ $x - \lambda$.

Примѣръ. Составить уравненіе, котораго корни были бы больше корней уравненія $3x^2 - 5x - 4 = 0$ на 2.

Замѣнивъ въ данномъ уравненіи x разностью $x - 2$, имѣемъ:

$$3(x - 2)^2 - 5(x - 2) - 4 = 0, \quad \text{или} \quad 3x^2 - 17x + 18 = 0.$$

465. Эта задача важна по своему отношенію къ слѣдующимъ двумъ вопросамъ, встрѣчающимся при изслѣдованіи задачъ второй степени.

Вопросъ I. Выразить, что оба корня квадратнаго уравненія

$$ax^2 + bx + c = 0$$

больше данноею количества λ .

Если корни уравненія назовемъ буквами x' и x'' , то, по условію, должно быть

$$x' > \lambda \quad \text{и} \quad x'' > \lambda, \quad \text{или, что то же,} \quad x' - \lambda > 0 \quad \text{и} \quad x'' - \lambda > 0. \quad (1).$$

Если теперь по данному уравненію мы составимъ такое, котораго корни равнялись бы $x' - \lambda$ и $x' - \lambda$, то найдемъ требуемыя условія, выразивъ, что корни новаго уравненія должны быть положительны (въ силу 1).

Для составленія новаго уравненія нужно въ данномъ замѣнить x суммою $x + \lambda$; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$ax^2 + (b + 2a\lambda)x + (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

Чтобы корни этого уравненія были положительны, необходимо, чтобы: 1) ихъ произведеніе было положительно; 2) ихъ сумма была положительна. Итакъ, требуемыя условія будутъ:

$$1) \frac{a\lambda^2 + b\lambda + c}{a} > 0, \text{ или, умноживъ обѣ части на } a^2;$$

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0;$$

$$2) -\frac{b + 2a\lambda}{a} > 0, \text{ или, умноживъ обѣ части на } -a^2;$$

$$a(b + 2a\lambda) < 0.$$

Примѣчаніе. Чтобы выразить, что корни данного уравненія оба меньше λ , необходимо выразить, что корни уравненія (2) оба отрицательны; сдѣлавъ это, получимъ условія:

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0; \quad a(b + 2a\lambda) > 0.$$

Вопросъ II. *Выразить, что данное количество λ заключается между корнями уравненія $ax^2 + bx + c = 0$.*

Пусть корни данного уравненія будутъ x' и x'' , причѣмъ $x' < x''$.

По условію должно быть:

$$x' < \lambda \text{ и } x'' > \lambda, \text{ или } x' - \lambda < 0 \text{ и } x'' - \lambda > 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

Уравненіе, имѣющее корни $x' - \lambda$ и $x'' - \lambda$, есть

$$ax^2 + (b + 2a\lambda)x + (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Въ силу неравенствъ (1) корни этого уравненія должны имѣть противоположные знаки. Значитъ, необходимо и достаточно, чтобы ихъ произведеніе было отрицательное, т.-е. чтобы

$$-\frac{a\lambda^2 + b\lambda + c}{a} < 0, \text{ или } a(a\lambda^2 + b\lambda + c) < 0.$$

466. Приложение IV. Найти соотношеніе между коэффициентами квадратнаго уравненія подъ условіемъ, чтобы между корнями уравненія существовала данная зависимость.

Задача 1. Какая связь должна существовать между коэффициентами уравненія $ax^2 - bx + c = 0$, чтобы его корни x' и x'' удовлетворяли условію $px' - qx'' = r$?

Рѣшая данное уравненіе и подставляя найденные корни въ равенство $px' - qx'' = r$, найдемъ требуемое условіе. Но обыкновенно требуется дать искомое условіе, не рѣшая уравненій; этого достигнемъ слѣдующимъ приемомъ.

Говоря, что x' и x'' суть корни данного уравненія, мы выражаемъ эгнмъ, что они удовлетворяють уравненіямъ:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x'x'' = \frac{c}{a},$$

и наоборотъ. Слѣд., задачу можно формулировать такъ:

Какова должна быть связь между коэффициентами данного уравненія, чтобы x' и x'' удовлетворяли тремъ уравненіямъ.

$$px' - qx'' = r, \quad x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Очевидно, рѣшивъ два изъ эгнхъ уравненій (и проще первыя два, какъ уравненія 1 й степени), мы найдемъ требуемое условіе, подставляя найденныя рѣшенія въ 3-е. Первыя два даютъ:

$$x' = -\frac{ar - bq}{a(p + q)}, \quad x'' = -\frac{bp + ar}{a(p + q)};$$

подставляя въ третье, найдемъ:

$$-\frac{(ar - bq)(ar - bp)}{a^2(p + q)^2} = \frac{c}{a}, \quad \text{или} \quad (ar - bq)(ar + bp) + ac(p + q)^2 = 0.$$

Это и есть требуемое соотношеніе.

Задача II. *Опредѣлить λ такъ, чтобы корни x' и x'' уравненія*

$$(2\lambda - 1)x^2 + (5\lambda + 1)x + (3\lambda + 1) = 0$$

имѣли отношеніе $\frac{3}{2}$.

Согласно условію, корни должны удовлетворять уравненіямъ

$$2x' = 3x'', \quad x' + x'' = -\frac{5\lambda + 1}{2\lambda - 1}, \quad x'x'' = \frac{3\lambda + 1}{2\lambda - 1}.$$

Рѣшая первыя два, находимъ

$$x' = -\frac{3(5\lambda + 1)}{5(2\lambda - 1)}, \quad x'' = -\frac{2(5\lambda + 1)}{5(2\lambda - 1)};$$

внося въ третье уравненіе, имѣемъ

$$\frac{6(5\lambda + 1)^2}{25(2\lambda - 1)^2} = \frac{3\lambda + 1}{2\lambda - 1}, \quad \text{или} \quad 6(5\lambda + 1)^2 - 25(3\lambda + 1)(2\lambda - 1) = 0;$$

это и есть соотношеніе, которому должно удовлетворять λ ; располагая по степенямъ λ , имѣемъ

$$0 \times \lambda^2 + 85\lambda + 31 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \infty, \quad \lambda_2 = -\frac{31}{85}.$$

Проверимъ, действительно ли эти значенія λ суть требуемыя.

Во-первыхъ, посмотримъ, каковы корни данного ур—нія при $\lambda = \infty$; для этого выносимъ λ за скобки:

$$\lambda \left[\left(2 - \frac{1}{\lambda} \right) x^2 + \left(5 - \frac{1}{\lambda} \right) x + \left(3 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] = 0;$$

отсюда видно, что когда λ приближается къ безконечности, корни данного ур—нія стремятся къ предѣламъ, удовлетворяющимъ ур—нію $2x^2 + 5x + 3 = 0$ откуда $x' = -\frac{3}{2}$ и $x'' = -1$; отношеніе $x' : x''$ действительно $3 : 2$.

Во-вторыхъ, при $\lambda = -\frac{31}{85}$ данное ур—ніе беретъ видъ $147x^2 + 70x + 18 = 0$, откуда $x' = -\frac{2}{7}$, $x'' = -\frac{4}{21}$; действительно $x' : x'' = 3 : 2$.

467. Приложение V. Какому условию должны удовлетворять коэффиціенты двухъ квадратныхъ уравненій

$$ax^2 + bx + c = 0 \dots (1) \quad a'x^2 + b'x + c' = 0 \dots (2),$$

чтобы эти ур—нія имѣли одинъ общій корень?

Первое рѣшеніе. Пусть корни ур—ній (1) суть α и β ; ур—нія (2) α и β' , гдѣ α —общій корень; мы имѣемъ 4 уравненія

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \dots (3) \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \dots (4) \\ \alpha + \beta' = -\frac{b'}{a'} \dots (5) \\ \alpha\beta' = \frac{c'}{a'} \dots (6) \end{cases}$$

Докажемъ, что для того, чтобы данныя ур—нія имѣли одинъ общій корень, необходимо и достаточно, чтобы ур—нія (7) съ тремя независимыми α , β и β' имѣли по крайней мѣрѣ одно общее рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ:

1) Если ур—нія (1) и (2) имѣютъ общій корень α , то ур—нія системы (7) будутъ удовлетворены этимъ корнемъ α и двумя не общими корнями β и β' .

2) Если ур—нія (7) имѣютъ общее рѣшеніе (α , β и β'), то: корни α и β , удовлетворяя ур—нямъ (3) и (4), служатъ корнями (1), а α и β' , удовлетворяя (5) и (6), будутъ корнями ур—нія (2); т-е. α и будетъ общимъ корнемъ данныхъ ур—ній.

Итакъ, искомое условіе есть условіе, при которомъ система (7) имѣетъ общее рѣшеніе; это условіе найдемъ, исключивъ α , β и β' изъ ур—ній системы (7). Комбинируя (3) и (5), имѣемъ

$$\beta - \beta' = \frac{ab' - ba'}{aa'}; \dots (8).$$

комбинируя (4) съ (6), получимъ

$$a(\beta - \beta') = \frac{ca - ac'}{aa'} \dots (9).$$

Отсюда:

$$a = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Слѣд. изъ (4) имѣемъ

$$\beta = \frac{c(ab' - ba')}{a(ca' - ac')}.$$

Подставляя эти величины въ (3), я найдемъ искомое условіе:

$$\frac{ca - ac'}{ab' - ba'} + \frac{c(ab' - ba')}{a(ca' - ac')} + \frac{b}{a} = 0,$$

что не трудно привести къ виду

$$(ca' - ac')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0.$$

Второе рѣшеніе. Полагая a и a' отличными отъ нуля и умноживъ ур. (1) на a' , а (2) на a , замѣнимъ ихъ двумя слѣдующими, имъ эквивалентными:

$$aa'x^2 + ba'x + ca' = 0 \dots (10), \quad aa'x^2 + ab'x + ac' = 0, \dots (11),$$

изъ которыхъ тотчасъ выводимъ слѣдующія замѣчанія:

1) Если $ab' - ba' = 0$, то ур—нія не могутъ имѣть никакого общаго рѣшенія, если въ то же время не будетъ и $ac' - ca' = 0$; но въ такомъ случаѣ оба ур—нія дѣлаются тождественными, иначе говоря, имѣютъ *два* общихъ корня.

2) Если $ac' - ca' = 0$, то ур—нія не могутъ имѣть ни одного общаго корня, если при этомъ не будетъ и $ab' - ba' = 0$; но тогда опять оба ур—нія будутъ тождественны.

3) Изъ сопоставленія этихъ замѣчаній выводимъ то заключеніе, что если два квадратныя ур—нія имѣютъ *одинъ только* общій корень, то разности $ab' - ba'$ и $ac' - ca'$ отличны отъ нуля; слѣд. по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ b и c' не есть нуль.

Зная это, вычтемъ изъ (10) ур—ніе (11); найдемъ

$$(ab' - ba')x + ac' - ca' = 0, \dots (12).$$

По извѣстному принципу, система (1) и (2) эквивалентна системѣ (1) и (12); слѣд., общій корень и. б. найденъ изъ последней системы; а какъ ур. (12) есть ур—ніе 1-й степени и слѣд. имѣетъ только одинъ корень, значить, если данныя ур—нія имѣютъ общій корень, онъ долженъ быть

$$x = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Будучи общимъ корнемъ системы (1) и (12), онъ долженъ удовлетворять

ур—нію (1); такъ что искомое условіе найдемъ, подставивъ найденное для x значеніе въ ур—ніе (1). Итакъ

$$\frac{a(ac' - a'c)^2}{(ab - a'b)^2} - \frac{b(ac' - a'c)}{ab' - a'b} + c = 0,$$

что легко привести къ виду

$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0, \dots (13).$$

Соотношеніе это просто, симметрично и легко удерживается въ памяти.

Его можно представить въ другой формѣ. Раскрывъ скобки и умноживъ всѣ члены на 4, найдемъ:

$$4a^2c'^2 + 4c^2a'^2 - 8aca'c' - 4ab'bc' = 4ba'cb' - 4b^2ac' - 4b'^2ac = 0,$$

или, прибавъ и вычтя $b^2b'^2$, можемъ дать ему видъ:

$$b^2b'^2 - 4a^2c'^2 - 4c^2a'^2 - 4bb'ac' - 4bb'ca' + 8ac'ca' - b^2b'^2 - 4acb'^2 + 4a'c'b^2 - 16aca'c' = 0,$$

или

$$(bb' - 2ac' - 2ca')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') = 0 \dots (14).$$

Примѣчаніе I. Общій корень раціоналенъ; слѣд., онъ не м. б. мнимымъ. Слѣд., когда два квадратныя ур—нія имѣютъ одинъ общій корень, всѣ ихъ корни действительны и потому

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{и} \quad b'^2 - 4a'c' > 0.$$

Это же можно видѣть и непосредственно. Если квадратное ур—ніе имѣетъ корень $\alpha + \beta i$, то другой его корень будетъ $\alpha - \beta i$; а слѣд. если два ур—нія имѣютъ одинъ общій мнимый корень, то они имѣютъ два общихъ корня и слѣд. тождественны.

Примѣчаніе II. Мы замѣтили, что два квадратныя ур—нія не могутъ имѣть общаго корня, если $ac' - ca' = 0$, и притомъ $ab - ba'$ отлочно отъ нуля. Слѣдуетъ прибавить: *исключая случая, когда $c = c' = 0$.*

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $ac' - ca' = 0$ и ур—нія будутъ

$$ax^2 + bx = 0, \quad a'x^2 + b'x = 0;$$

очевидно, что они имѣютъ общій корень $x = 0$ и что два другіе корня, опредѣляемые ур—ми

$$ax + b = 0, \quad a'x + b' = 0$$

различны, ибо, по положенію, $ab' - ba'$ не равно нулю.

Замѣтимъ, что соотношеніе (13) удовлетворяется и при $c = c' = 0$; слѣд., оно *общее* и примѣнимо и къ исключительному случаю, о которомъ идетъ рѣчь.

468. Приложение VI. Условіе, при которомъ два квадратныхъ у — нія имѣютъ два общихъ корня.

I. Называя общіе корни уравненій $ax^2 + bx + c = 0$ и $a'x^2 + b'x + c' = 0$ буквами α и β , будемъ имѣть

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha + \beta = -\frac{b'}{a'}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c'}{a'};$$

откуда необходимо, чтобы

$$-\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'} \quad \text{и} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'},$$

что можно представить въ видѣ

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \dots (1)$$

Эти условія, будучи необходимы, имѣютъ съ тѣмъ и достаточны, ибо, какъ скоро они выполнены, то, называя общую величину равныхъ отиженій (1) буквою K , имѣемъ: $a' = aK$, $b' = bK$, $c' = cK$ и потому второе уравненіе беретъ видъ $K(ax^2 + bx + c) = 0$ или $ax^2 + bx + c = 0$, т.-е. ничѣмъ не отличается отъ перваго, а слѣд. имѣетъ тѣ же корни, какъ и первое. Итакъ:

Чтобы два квадратныхъ уравненія имѣли два общихъ корня, необходимо и достаточно, чтобы ихъ коэффициенты были пропорціональны.

II. Можно это условіе вывести иначе. Вѣдѣе мы видѣли (§ 467), что, полагая a и a' отличными отъ нуля, можно одно изъ данныхъ уравненій замѣнить ур—ніемъ

$$(ab' - ba')x + (ac' - ca') = 0.$$

Слѣдоват., если данныя ур—нія имѣютъ два общихъ корня, то полиномъ $(ab' - ba')x + (ac' - ca')$, будучи *первой степени*, долженъ обращаться въ нуль при *двухъ* различныхъ значеніяхъ x , а потому (§ 68) онъ долженъ быть тождественно равенъ нулю, а для этого (§ 70) необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты равнялись нулю, т.-е. чтобы

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{и} \quad ac' - ca' = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

469. Приложение VII. Найти два числа, зная ихъ сумму S и произведеніе P .

Очевидно, искомыя числа суть корни уравненія

$$x^2 - Sx + P = 0 \dots (1);$$

въ самомъ дѣлѣ, сумма корней этого ур—нія равна S , а произведеніе P .

Примѣръ. Найти два числа, которыхъ сумма равнялась бы 13, а произведеніе 40.

Искомыя числа суть корни ур—нія $x^2 - 13x + 40 = 0$; рѣшая его, находимъ: $x' = 8$, $x'' = 5$. И въ самомъ дѣлѣ: $8 + 5 = 13$, $8 \times 5 = 40$.

Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы ур. (1) имѣло корни действительные, т.-е. чтобы разность $S^2 - 4P$ была положительна или нуль:

$$S^2 - 4P \geq 0;$$

отсюда

$$P \leq \left(\frac{S}{2}\right)^2,$$

т.-е. наибольшая величина (максимум) произведенія двухъ чиселъ, положительныхъ или отрицательныхъ, имѣющихъ постоянную сумму, равна квадрату ихъ полусуммы.

Если бы требовалось найти два числа, зная ихъ разность δ и произведение P , то задачу эту можно бы было свести къ предыдущей. Въ самомъ дѣлѣ, если искомыя числа будутъ x' и y' , то по условію задачи имѣемъ

$$x' - y' = \delta \quad \text{и} \quad x'y' = P;$$

но положивъ $-y' = x''$, дадимъ этимъ ур—нямъ видъ

$$x' + x'' = \delta, \quad x'x'' = -P,$$

слѣд. x' и x'' суть корни уравненія

$$x^2 - \delta x - P = 0.$$

Если δ положительно, слѣд. $x' - y' > 0$, то для x' нужно взять болѣе большой корень ур—нія, а другой корень, взятый съ обратнымъ знакомъ, дастъ y' . Если δ отрицательно, нужно сдѣлать наоборотъ.

Условіе возможности задачи выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\delta^2}{4} + P \geq 0,$$

откуда видно, что при P положительномъ задача всегда возможна, ибо $\frac{\delta^2}{4} + P$ будетъ представлять сумму двухъ существенно положительныхъ количествъ.

470. Приложение VIII. Найти сумму одинаковыхъ степеней корней квадратнаго уравненія $ax^2 + bx + c = 0$.

Пусть корни будутъ x_1 и x_2 ; требуется вычислить $x_1^m + x_2^m$, не рѣшая ур—нія. Сумму эту для краткости будемъ обозначать знакомъ S_m .

I. Во-первыхъ, мы имѣемъ

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

II. Чтобы найти S_2 , возьмемъ тождества

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \quad \dots (1), \quad ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \quad \dots (2),$$

сложивъ ихъ, найдемъ

$$aS_2 + bS_1 + 2c = 0, \quad \text{откуда} \quad S_2 = -\frac{b^2 + 2ac}{a^2}.$$

Этотъ результатъ можно найти иначе, замѣчая, что

$$x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 = 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}.$$

III. Чтобы найти S_3 , помножимъ ур. (1) на x_1 , ур. (2) на x_2 и сложимъ ихъ почленно, что дастъ:

$$aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0, \quad \text{откуда} \quad S_3 = -\frac{bS_2}{a} - \frac{cS_1}{a},$$

или, замѣняя S_2 и S_1 ихъ величинами:

$$S_3 = -\frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3}.$$

Этотъ результатъ можно найти иначе, замѣчая, что

$$x_1^3 + x_2^3 - (x_1 + x_2)^3 = 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}.$$

IV. Помножимъ тождества (1) и (2) соответственно на x_1^2 и x_2^2 и складывая, найдемъ

$$aS_4 + bS_3 + cS_2 = 0, \quad \text{откуда} \quad S_4 = -\frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}.$$

Иначе найдемъ этотъ результатъ, замѣчая, что

$$x_1^4 + x_2^4 - (x_1^2 + x_2^2)^2 = -2(x_1x_2)^2 = -\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)^2 = -\frac{2c^2}{a^2}.$$

Вообще, легко найти S_m , зная суммы S_{m-1} и S_{m-2} ; ибо, помноживъ тождества: (1) на x_1^{m-2} , (2) на x_2^{m-2} , и сложивъ, имѣемъ соотношеніе

$$aS_m + bS_{m-1} + cS_{m-2} = 0,$$

въ которомъ и содержится общее рѣшеніе задачи: при ея помощи можно по порядку вычислять S_2, S_3, S_4, \dots

Такъ, полагая $m = 2$, имѣемъ уравненіе $aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0$, въ которомъ $S_1 = -\frac{b}{a}$, $S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$; слѣд.

$$S_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}.$$

Положивъ $m = 3$, имѣемъ $aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0$, откуда

$$S_3 = -\frac{b}{a} \cdot S_2 - \frac{c}{a} S_1 = -\frac{b}{a} \times \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right) - \frac{c}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} \text{ и т. д.}$$

471. Пусть требуется найти сумму одинаковыхъ степеней обратныхъ величинъ корней квадратнаго уравненія.

Называя эту сумму через S_m , имѣемъ

$$S_m = \left(\frac{1}{x_1}\right)^m + \left(\frac{1}{x_2}\right)^m = \frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} = \frac{x_1^m + x_2^m}{x_1^m x_2^m} = \frac{S_m}{(c)^m},$$

или

$$S_m = \frac{a^m}{c^m} \cdot S_m.$$

Такъ, напр., отсюда найдемъ:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{b}{c}; \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}; \quad \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{b^3 - 3abc}{c^3};$$

$$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4} \text{ и т. д.}$$

472. Построение корней квадратнаго уравненія.

Рѣшая геометрической вопросъ съ помощью алгебры, всегда получаемъ уравненія *однородныя*, если только всё линіи вопроса изображены *буквами*, а не числами. Такія ур-нія мы и будемъ разсматривать.

1. Уравненіе вида $x^2 - m \cdot n$ даетъ пропорцію $m : x = x : n$; слѣд., построеніе линіи x приводится къ нахожденію средней пропорціональной между линіями m и n .

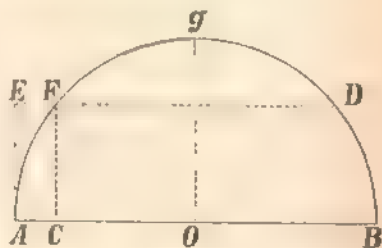
2. Полное уравненіе. Обозначая буквами p и k отношенія двухъ данныхъ линій къ линейной единицѣ, а буквою x отношеніе къ той же единицѣ линіи искомой, имѣемъ четыре вида ур-ній:

$$x^2 + px + k^2 = 0; \quad x^2 - px + k^2 = 0; \quad x^2 + px - k^2 = 0; \quad x^2 - px - k^2 = 0.$$

Такъ какъ первое выводится изъ второго, а третье изъ четвертаго перемѣною x на $-x$, то достаточно построить корни 2-го и 4-го.

Представивъ 2-е въ видѣ $x(p-x) = k^2$, замѣчаемъ, что вопросъ приводится къ построенію сторонъ x и $p-x$ прямоугольника, равносильнаго квадрату стороны k , зная сумму измѣреній прямоугольника.

Для этого на прямой $AB = p$ описываемъ полуокружность; въ точкѣ A возставляемъ къ линіи AB перпендикуляръ $AE = k$ и черезъ точку E проводимъ линію ED параллельно AB , пересѣкающую окружность въ D и F . Легко видѣно, что прямая EF AC изображаетъ одинъ корень ур-нія, а линія $DE = BC$ — другой. Въ самомъ дѣлѣ:



Черт. 50.

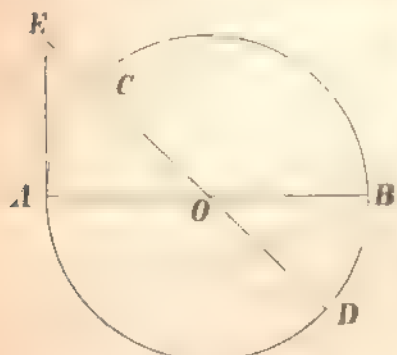
$$AC + BC = AB = p,$$

$$AC \times BC = CF^2 = AE^2 = k^2.$$

Для возможности задачи необходимо, чтобы прямая ED встрѣчала окружность; слѣд., задача невозможна, когда $AE > OG = \frac{AB}{2}$, или когда $k > \frac{p}{2}$, по-

тому что при этомъ условіи ED не встрѣчаетъ окружности. Когда $AE = OG = \frac{AB}{2}$, или $k = \frac{p}{2}$, прямая ED касается окружности въ точкѣ G, и корни получаются равные, $AO = OB = \frac{p}{2}$. Наконецъ, когда $AE < OG = \frac{AB}{2}$, или $k < \frac{p}{2}$, прямая ED пересѣкаетъ окружность, и корни получаются неравные: AC и CB. Все это вполнѣ согласно съ тѣмъ, что при условіи $k^2 > \frac{p^2}{4}$ корни уравненія мнимы, при $k^2 = \frac{p^2}{4}$ действительные равные, а при $k^2 < \frac{p^2}{4}$ — действительные неравные.

Четвертое уравненіе приводится къ виду $x(x-p) = k^2$ и соответствуетъ вопросу: построить измѣренія прямоугольника, равновеликаго данному квадрату, по разности p этихъ измѣреній. На прямой $AB = p$, какъ на диаметръ, описываемъ окружность; въ точкѣ A проводимъ къ ней касательную $AE = k$ и изъ точки E проводимъ сѣкущую ECD черезъ центръ. Имѣемъ



Черт. 51

$$\begin{aligned} ED &= x', \quad EC = -x'', \\ \text{ибо} \quad DE - CE &= DC = AB = p, \\ EC \times ED &= AE^2 = k^2. \end{aligned}$$

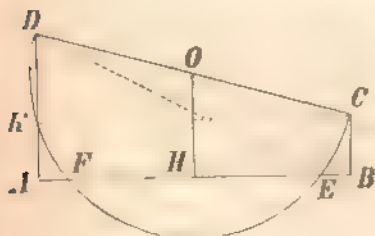
Очевидно, построение всегда возможно, такъ какъ точка E всегда будетъ находиться внѣ круга; и это обстоятельство вполнѣ согласно съ тѣмъ, что

уравненіе 4-е, имѣя свободный членъ отрицательный, всегда имѣетъ действительные корни.

Другой приемъ. Если уравненія 2-е и 4-е имѣютъ видъ

$$x^2 - px + m \cdot n = 0 \quad (2) \quad x^2 - px - m \cdot n = 0 \quad (4),$$

то для примѣненія указаннаго приема слѣдовало бы предварительно найти среднюю пропорціональную k между m и n ; нижеприведенное построение позволяетъ избѣжать этого предварительнаго построения, давая, къ тому же, способъ, примѣнимый во всѣхъ случаяхъ.



Черт. 52.

Для построения корней уравненія (2) беремъ $AB = p$; въ точкѣ A возставляемъ къ ней перпендикуляръ $AD = m$, въ точкѣ B перпендикуляръ $BE = n$, проводя ихъ въ одну сторону отъ прямой AB.

Проведа прямую CD, описываемъ на ней, какъ на диаметръ, окружность, которая, вообще, пересѣчетъ AB въ двухъ точкахъ E, F; искомыми линіи будутъ

AE и EB, или AF и FB. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треугольниковъ DAE и ECB имѣемъ: $AE : CB = AD : EB$, откуда $AE \times EB = m \cdot n$; кромѣ того, по построенію, $AE + EB = AB = p$.

Перпендикуляръ, опущенный изъ середины O лини DC на AB , пересѣкаетъ хорду FE въ ея серединѣ H : отсюда выходитъ, что $AF = EB$ и, слѣд., $AE = FB$.

Для возможности задачи нужно, чтобы окружность CD встрѣчала AB , а это требуетъ, чт бы OH было не больше $\frac{CD}{2}$.

Но $OH = \frac{m}{2} - \frac{n}{2}$; $CD^2 = CK^2 + DK^2 = AB^2 + (m - n)^2$; отсюда легко видѣть, что условие возможности будетъ $mn \leq \frac{p^2}{2}$.

Примѣчаніе. Если $m = n$, CD будетъ параллельна AB , AD — касательна къ окружности въ D , и перевернувъ чертежъ, найдемъ обыкновенное построение.

Для построенія корней (4), къ AB , равной данной разности p , возставаемъ въ точкахъ A и B перпендикуляры $AD = m$ и $BC = n$ по разныя стороны отъ AB : на прямой CD , какъ на диаметръ, описываемъ окружность, пересѣкающую прямую AB въ точкахъ E и F . Корни будутъ

$$x' = AE, \quad x'' = -BE.$$

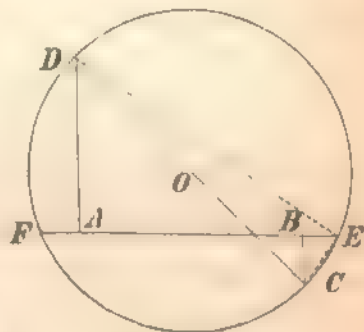
Въ самомъ дѣлѣ, разность абсолютныхъ величинъ этихъ линій (или ихъ алгебраическая сумма) есть $AE - BE = AB = p$, а произведение ихъ $= m \cdot n$, ибо подобные треугольники ADE и BCE даютъ:

$$AD : AE = BE : BC, \quad \text{или} \quad AE \times BE = AD \times BC = m \cdot n.$$

Задача всегда возможна, ибо всегда имѣетъ мѣсто пересѣченіе прямой AB съ окружностью CD , такъ какъ послѣдняя, по самому построенію, имѣетъ точки C и D по обѣ стороны прямой AB .

Такимъ образомъ, извѣняя направленіе перпендикуляра, соответствующаго тому изъ множителей m и n , который отрицателенъ, мы тѣмъ же самымъ построениемъ находимъ оба корня уравненія, причемъ отрицательный корень приходится на продолженіи AB : противоположности въ знакѣ соответствуетъ противоположность направленія.

Примѣчаніе. Если m и n равны, середина прямой AB будетъ въ центрѣ окружности: если на AB , какъ на диаметръ, описать окружность концентричную первой, BC будетъ касательною къ ней, и какъ $OC = OE$, найдемъ обыкновенное построение.



Черт. 54.

ГЛАВА XXXII.

Квадратный триномъ разложение его на множители первой степени; теорема объ измѣненіи знака.—Приложенія.

473. Квадратный триномъ. Если въ полиномѣ $ax^2 + bx + c$ подъ a , b и c разумѣть постоянныя количества, а подъ x — переменное, измѣняющееся въ области действительныхъ чиселъ (отъ $-\infty$ до 0 , и отъ 0 до $+\infty$), то

полномъ этотъ, называемый *квадратнымъ триномомъ*, будетъ измѣняться по величинѣ и знаку. Такъ, при $x=0$ онъ $=c$; при $x=1$, равенъ $a+b+c$; при $x=-10$, равенъ $100a-10b+c$; и т. д. Между этими величинами одни могутъ быть положительны, другія отрицательны. Тѣ значенія x , при которыхъ триномъ обращается въ нуль, называются *корнями тринома*; ихъ мы найдемъ, приравнявъ триномъ нулю и рѣшивъ квадратное уравненіе

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Квадратный триномъ обладаетъ замѣчательными свойствами, изъ числа которыхъ въ этой главѣ мы изучимъ: 1) разложеніе тринома на множители; 2) измѣненіе его знака, и затѣмъ займемся приложениями этихъ свойствъ.

Разложеніе квадратнаго тринома на множители первой степени.

474. ТЕОРЕМА. *Квадратный триномъ равенъ произведенію коэффициента при x^2 на два сдвоенныхъ множителя, равныхъ разностямъ между x и каждымъ изъ корней тринома.*

Первое доказательство. Обозначивъ триномъ буквою y и вынеся за скобки a , найдемъ

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right);$$

дополнимъ квадратъ бинома, первые два члена котораго суть: $x^2 + \frac{b}{a}x$; принимая x за первый членъ бинома, второй найдемъ, раздѣливъ $\frac{b}{a}x$ на $2x$, что дастъ $\frac{b}{2a}$; прибавляя въ скобки и вычитая $\frac{b^2}{4a^2}$, получимъ

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

Различаемъ три случая: $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

1. $b^2 - 4ac > 0$. Въ этомъ случаѣ дробь $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ положительна, а потому $\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ величина *дѣйствительная*; триномъ беретъ видъ

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \right)^2 \right].$$

Примѣняя сюда формулу разложенія $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$, найдемъ:

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \right) \dots (1),$$

примемъ *всѣ три множителя дѣйствительны*.

Этому разложению можно дать видъ:

$$y = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right),$$

и замѣчая, что

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

суть корни уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, или, что то же, корни тринома, можемъ, называя эти корни черевъ x' и x'' , дать триному видъ

$$y = a(x - x')(x - x'') \dots (1'),$$

гдѣ всѣ множители дѣйствительны.

II. $b^2 - 4ac = 0$. Триномъ (форм. 1) приводится къ виду

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Замѣтивъ, что $x + \frac{b}{2a} = x - \left(-\frac{b}{2a} \right)$, и что $-\frac{b}{2a}$ есть общая величина равныхъ корней при условіи $b^2 - 4ac = 0$, мы, называя эту величину буквою x' , можемъ дать триному видъ

$$y = a(x - x')^2.$$

Таково разложеніе тринома въ случаѣ дѣйствительныхъ равныхъ корней.

III. $b^2 - 4ac < 0$. При этомъ условіи триномъ имѣетъ корни мнимые; ему можно дать такой же видъ, какъ и при дѣйствительныхъ неравныхъ корняхъ, т.е. (1) или (1'), но оба двучленные множители будутъ мнимые.

Впрочемъ, для дальнѣйшихъ изслѣдованій удобнѣе дать триному въ этомъ случаѣ иной видъ. Замѣтивъ, что изъ неравенства $b^2 - 4ac < 0$ слѣдуетъ $4ac - b^2 > 0$, такъ что дробь $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ будетъ положительная, представимъ y въ видѣ

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right],$$

и замѣтимъ, что въ квадратныхъ скобкахъ находится *сумма двухъ существенно положительныхъ количествъ*.

475. Второе доказательство. Представимъ триномъ въ видѣ

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right),$$

замѣчаемъ, что $\frac{b}{a} = -(x' + x'')$ и $\frac{c}{a} = x'x''$, гдѣ x' и x'' суть корни тринома. Подстановка дастъ

$$y = a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] = a[x^2 - x'x - x''x + x'x''].$$

Внося въ первыхъ двухъ членахъ за скобки x , а въ двухъ остальныхъ — x'' , последовательно имѣемъ

$$y = a[(x - x')x - x'(x - x')] = a(x - x')(x - x').$$

Такъ какъ соотношенія между коэффициентами и корнями, на которыхъ основано это доказательство, существуютъ и для действительныхъ и для мнимыхъ корней, то и полученное разложене имѣетъ мѣсто для тѣхъ и другихъ.

Когда действительные корни равны между собою, то, положивъ въ предыдущей формулѣ $x' = x''$, найдемъ

$$y = a(x - x')^2 = [\frac{1}{2} a (x - x')]^2,$$

триномъ представляетъ точный квадратъ выраженія $\sqrt{a}(x - x')$.

476. Третье доказательство. Если x и x'' будутъ корни тринома $ax^2 + bx + c$, то, предполагая, что они различны, замѣчаемъ, что триномъ обращается въ нуль при подстановкѣ въ него двухъ *различныхъ* значений x' и x' вмѣсто x ; а потому онъ дѣлится на произведение биномовъ $x - x'$ и $x - x''$; слѣд.

$$ax^2 + bx + c = (x - x')(x - x'') \cdot Q.$$

Q есть цѣлое относительно x частное нулевой степени, ибо дѣлитель одинаковой степени съ дѣлимымъ; слѣд. Q найдемъ, раздѣливъ высшій членъ ax^2 дѣлимаго на высшій членъ x^2 дѣлителя; слѣд. $Q = a$; и потому

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

Примѣчаніе. Доказательство предполагаетъ, что x' и x'' неравны; но если теорема вѣрна для x' и x' неравныхъ, то она остается вѣрна, какъ, бы жала ни была разность между x и x ; значитъ она вѣрна и въ предѣльномъ случаѣ, когда корни равны.

Впрочемъ, для случая равныхъ корней можно дать самостоятельное доказательство теоремы. Въ самомъ дѣлѣ, при равныхъ корняхъ $b^2 = 4ac$, откуда $c = \frac{b^2}{4a^2}$; слѣд.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} \right); \end{aligned}$$

но каждый изъ равныхъ корней $= -\frac{b}{2a}$, такъ что и въ данномъ случаѣ

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x''),$$

только вѣдсь $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$.

477. *Примѣры.* — I. Разложить на множители триномъ $y = -3x^2 + 5x - 8$.

Рѣшивъ ур-ніе $-3x^2 + 5x + 8 = 0$, находимъ корни тринома: $x = -1$, $x'' = \frac{8}{3}$; слѣд.

$$y = -3(x + 1) \left(x - \frac{8}{3} \right) = -(x + 1)(3x - 8).$$

II. Разложить на множители триномъ $y = 49x^2 - 70x - 25$.

Рѣшивъ уравненіе $49x^2 - 70x - 25 = 0$, находимъ равные корни:

$$x' = x' = \frac{5}{7}; \text{ слѣд.}$$

$$y = 49x^2 - 70x - 25 = (7x - 5)^2.$$

III. Разложить триномъ $y = -9x^2 - 6x - 1$.

Корни тринома равны: $x' = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$, $x'' = \frac{1 - \sqrt{2}}{3}$; слѣд

$$y = -9x^2 - 6x - 1 = -\left(x - \frac{1 + \sqrt{2}}{3}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{2}}{3}\right).$$

IV. Разложить триномъ $y = 4x^2 - 12x + 13$.

Корни тринома суть: $x' = \frac{3 - 2i}{2}$, $x'' = \frac{3 + 2i}{2}$; слѣд.

$$y = 4x^2 - 12x + 13 = (2x - 3 + 2i)(2x - 3 - 2i).$$

Такъ какъ корни тринома мнимые, то его нужно представить въ иной формѣ—въ видѣ суммы квадратовъ членовъ:

$$y = (2x - 3)^2 + 4.$$

478. Приложенія.—I. Составленіе квадратнаго уравненія по даннымъ корнямъ.

Пусть требуется составить квадратное уравненіе съ корнями $x = -\frac{3}{5}$,

$x' = \frac{7}{15}$. Оно должно быть вида $(x - x')(x - x'') = 0$; слѣд.

$$\text{найдемъ } \left(x + \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{7}{15}\right) = 0, \text{ или } x^2 + \frac{2x}{15} - \frac{21}{75} = 0,$$

или

$$75x^2 + 10x - 21 = 0.$$

II. Часто можно прицѣплять разложеніе квадратнаго тринома на множители къ сокращенію дробей.

Пусть требуется сократить дробь $\frac{6x^2 - 5x - 6}{4x^2 - 9x}$. Разложивъ на множители числителя, получимъ

$$6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (2x - 3)(3x + 2);$$

знаменатель $x(4x^2 - 9) = x(2x + 3)(2x - 3)$.

Сокративъ дробь на $2x - 3$, найдемъ $\frac{3x + 2}{2x^2 - 3x}$.

Другой примѣръ: сократить дробь $\frac{x^3 - 19x^2 + 119x - 245}{3x^2 - 38x + 119}$.

Разлагая на множителей знаменателя, найдемъ

$$3x^2 - 35x + 119 = 3(x-7) \cdot x - \frac{17}{3} = (x-7)(3x-17);$$

для сокращенія дроби надо попытаться, не дѣлится ли числитель на $x-7$ или на $3x-17$; найдемъ

$$x^3 - 19x^2 + 119x - 245 = (x^3 - 12x - 35)(x-7);$$

сокращая дробь на $x-7$, получимъ дробь $\frac{x^3 - 12x - 35}{3x - 17}$, не подлежащую дальнѣйшему упрощенію.

Измѣненія знака квадратнаго тринома.

479. ТЕОРЕМА. Когда корни тринома $ax^2 - bx + c$ мнимые, т.-е. когда $b^2 - 4ac < 0$, то при всякомъ действительномъ значеніи x , триномъ неизмѣнно сохраняетъ знакъ коэффициента a . Когда корни тринома действительные равные, т.-е. когда $b^2 - 4ac = 0$, триномъ сохраняетъ знакъ коэффициента a при всякомъ x , кроме $x = -\frac{b}{2a}$, при каковомъ значеніи x триномъ обращается въ нуль. Наконецъ, если корни тринома действительные неравные, т.-е. если $b^2 - 4ac > 0$, то при всякомъ значеніи x , лежащемъ внѣ корней (т.-е. меньшихъ меньшаго, а также большаго большаго корня), онъ сохраняетъ знакъ коэффициента a ; при всякомъ же значеніи x , лежащемъ между корнями, знакъ тринома противоположенъ знаку коэффициента a .

I. Когда $b^2 - 4ac < 0$, триномъ имѣетъ мнимые сопряженные корни: слѣд. $x' = \alpha + \beta i$, $x'' = \alpha - \beta i$, гдѣ α и β количества действительныя. Разложеніе будетъ:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = a[(x - \alpha)^2 + \beta^2].$$

Изъ этой формы тринома видно, что при всякомъ действительномъ значеніи x , положительномъ или отрицательномъ, выраженіе въ скобкахъ, какъ сумма квадратовъ действительныхъ количествъ, всегда положительно, а стало бытъ произведеніе этого выраженія на a всегда будетъ имѣть знакъ количества a , каково бы ни было x . Итакъ, если $a > 0$, триномъ будетъ всегда положителенъ; если $a < 0$, онъ всегда будетъ отрицателенъ.

Можно дать другое доказательство. Изъ неравенства $b^2 - 4ac < 0$ имѣемъ $4ac > b^2$, а раздѣливъ обѣ части на существенно-положительное количество $4a^2$, находимъ: $\frac{c}{a} > \frac{b^2}{4a^2}$. Слѣдовательно, можно положить $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} + K^2$, гдѣ K действительно и отлично отъ нуля. Триномъ беретъ видъ

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + K^2\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + K^2\right].$$

аналогичный уже найденному. Далѣе доказательство ведется вышеуказаннымъ способомъ.

II. Пусть $b^2 - 4ac = 0$: корни тринома действительные равные; означая общую величину ихъ буквою x' , имѣемъ

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2.$$

Произведение неизменно сохраняет знак a , каково бы ни было действительное значение x , ибо факторы $(x - x')^2$ положительны при всякомъ действительномъ x ; и только при $x = x'$ оно обращается въ нуль.

Можно вести доказательство еще такъ: изъ $b^2 - 4ac = 0$ имѣемъ $4ac = b^2$; раздѣливъ обѣ части на $4a^2$, находимъ $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$. Представивъ тринომъ въ видѣ $a x^2 - \left(\frac{b}{a} x + \frac{c}{a}\right)$ и замѣнивъ $\frac{c}{a}$ дробью $\frac{b^2}{4a^2}$, получимъ

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2,$$

откуда очевидно, что триномъ неизменно сохраняетъ знакъ коэффициента a при всякомъ действительномъ x .

III. Пусть, наконецъ, $b^2 - 4ac > 0$; триномъ имѣетъ корни действительные неравные; пусть они будутъ x' и x'' , причемъ $x < x'$. Триномъ можно представить въ видѣ

$$a(x - x')(x - x'').$$

Разобьемъ скалу возрастающихъ значеній x на три области: 1) отъ $-\infty$ до меньшаго корня x' ; 2) отъ меньшаго корня x' до большаго x'' ; 3) отъ большаго корня x'' до $+\infty$.

$$-\infty \quad \dots \quad x' \quad \dots \quad x'' \quad \dots \quad +\infty.$$

1
2
3

Когда x остается въ первой области, т.е. меньше меньшаго корня x' , а следовательно и подавно меньше x'' , обѣ разности $x - x'$ и $x - x''$ будутъ отрицательны; произведение ихъ положительно, а потому все произведение $a(x - x')(x - x'')$ сохраняетъ знакъ коэффициента a .

Когда x находится во второй области, т.е. больше x' , но меньше x'' , тогда $x - x' > 0$, а $x - x'' < 0$; произведение разностей отрицательно, а потому все произведение $a(x - x')(x - x'')$ имѣетъ знакъ, противоположный знаку коэффициента a .

Наконецъ, когда x лежитъ въ области (3), т.е. больше x'' , а потому и подавно больше x' , оба бинома $x - x'$ и $x - x''$ положительны; ихъ произведение положительно, а потому все произведение $a(x - x')(x - x'')$ имѣетъ знакъ коэффициента a .

Такимъ образомъ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ два раза мѣняетъ знакъ; причемъ пере мѣнѣ знака предшествуетъ обращеніе тринома въ нуль (при $x = x'$ и при $x = x''$).

Резюме.

$$y = ax^2 + bx + c,$$

(x' и x'' — корни тринома, причемъ $x' < x''$).

I. $b^2 - 4ac \leq 0$ y имѣетъ знакъ $+a$.

II. $b^2 - 4ac > 0$ $\left\{ \begin{array}{ll} x < x' \dots \dots \dots y \text{ имѣетъ знакъ } +a. \\ x < x' < x'' \dots \dots \dots y \text{ имѣетъ знакъ } -a. \\ x > x'' \dots \dots \dots y \text{ имѣетъ знакъ } +a. \end{array} \right.$

480. Примеры. I. Тринომъ $x^2 - 2x + 3$ имѣетъ корни мнимые, ибо $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - 3 < 0$; при этомъ коэффициентъ при x^2 положителенъ, слѣдов. при всѣхъ значеніяхъ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ остается неизмѣнно положительнымъ.

II. Триномъ $-4x^2 + 12x - 9$ имѣетъ корни дѣйствительные равные, ибо $b^2 - ac = 6^2 - (-4) \cdot (-9) = 0$; при этомъ коэффициентъ при x^2 отрицателенъ, слѣд. при всѣхъ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ остается неизмѣнно отрицательнымъ.

III. Триномъ $x^2 - 6x + 5$ имѣетъ корни дѣйствительные неравные: $x' = 1$ и $x'' = 5$. Слѣд. при всякомъ значеніи x отъ $-\infty$ до $+1$, а также при всѣхъ x отъ $+5$ до $+\infty$ триномъ положителенъ; при всѣхъ значеніяхъ x , лежащихъ между $+1$ и $+5$, онъ отрицателенъ.

IV. Корни тринома $15 - 2x - 8x^2$ суть $-\frac{5}{4}$ и $+\frac{3}{2}$; слѣд. при всѣхъ x между $-\infty$ и $-\frac{5}{4}$, а также между $+\frac{3}{2}$ и $+\infty$ онъ отрицателенъ; при всякомъ x между предѣлами $-\frac{5}{4}$ и $+\frac{3}{2}$ положителенъ.

481. Слѣдствія.—I. Если триномъ $ax^2 + bx + c$ имѣетъ знакъ при подстановкѣ въ него послѣдовательно вмѣсто x сначала количества α , потомъ β , то уравненіе

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имѣетъ корни дѣйствительные неравные и одинъ изъ нихъ, и только одинъ, заключается между α и β .

Во-первыхъ, уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные неравные, ибо въ противномъ случаѣ триномъ при всякомъ x сохранялъ бы знакъ коэффициента a , что противорѣчитъ условію.

Во-вторыхъ, обозначивъ корни черезъ x' и x'' и полагая $x' < x''$, имѣемъ слѣдующую скалу дѣйствительныхъ значеній x :

$$-\infty \quad \dots \quad x' \quad \dots \quad x'' \quad \dots \quad +\infty$$

1
2
3

Пусть, напр. при $x = \alpha$ триномъ имѣетъ знакъ коэффициента a , то α заключается вне корней, т.е. или въ (1) или въ (3) области; при $x = \beta$ триномъ, мѣняя знакъ, получить знакъ $-a$, а потому β содержится между корнями, т.е. во (2) области. Такимъ образомъ, если α находится въ (1) области, то между α и β заключается корень x ; если же α лежитъ въ области (3), то между α и β будетъ корень x'' .

Обратно: Если между двумя числами α и β заключается корень уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, и только одинъ, то знаки, принимаемые первою частью уравненія при подстановкѣ вмѣсто x чиселъ α и β , противоположны.

По условію, между α и β заключается только одинъ корень: пусть это будетъ меньшій корень x' , и пусть $\alpha < \beta$; тогда скала дѣйствительныхъ значеній x будетъ

$$-\infty \quad \dots \quad \alpha \quad \dots \quad x' \quad \dots \quad \beta \quad \dots \quad x'' \quad \dots \quad +\infty$$

откуда видно, что при $x = \alpha$, какъ лежащемъ вѣ корней, триномъ имѣть знакъ $+$ a , а при $x = \beta$, какъ лежащемъ между корнями, знакъ $-$ a , противоположный первому.

II. Когда триномъ $ax^2 + bx + c$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ при подстановкѣ вмѣсто x количествъ α и β , то между α и β заключается четное число (0 или 2) корней уравненія $ax^2 + bx + c = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, триномъ имѣть два корня, слѣд, между α и β могутъ заключаться 0 или 1, или 2 корня; но въ данномъ случаѣ между α и β не можетъ содержаться только одинъ корень, ибо въ этомъ предположеніи, на он. слѣд. I, обр., результаты подстановокъ α и β вмѣсто x имѣли бы разные знаки, что противорѣчитъ условію. Слѣд. или между α и β заключаются оба корня, или ни одного не содержится.

Приложенія.

482. I. Когда $ac < 0$, корни уравненія $ax^2 + bx + c = 0$ — действительные, неравные и имѣютъ противоположные знаки.

Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ вмѣсто x нуль, замѣчаемъ, что триномъ обращается въ c , а слѣд. знакъ его противоположенъ знаку коэффициента a . Слѣд. ур. имѣть корни действительные, неравные, и такъ какъ 0 заключается между этими корнями, они имѣютъ противоположные знаки.

483. II. Когда A и B имѣютъ одинаковые знаки, уравненіе $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} = C$ имѣетъ корни действительные, неравные, и одинъ изъ нихъ, и только одинъ, заключается между α и β .

Давимъ ур-нію цѣлый видъ, собравъ всѣ члены въ первую часть; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$A(x - \beta) + B(x - \alpha) - C(x - \alpha)(x - \beta) = 0.$$

Замѣнивъ x сначала количествомъ α , потомъ β , получимъ результаты: $A(\alpha - \beta)$, $B(\beta - \alpha)$; такъ какъ A и B — одного знака, разности же $\alpha - \beta$ и $\beta - \alpha$ имѣютъ знаки противоположные, то заключаемъ, что оба результата имѣютъ противоположные знаки, а потому: уравненіе имѣть корни действительные, неравные, и одинъ, и только одинъ изъ нихъ, содержится между α и β .

Рѣшимъ теперь два вопроса, имѣющіе обширное приложение въ изслѣдованіи задачъ 2-й степени, въ виду чего совѣтуемъ читателю изучить эти два вопроса возможно тщательно.

484. Вопросъ I. — Не рѣшая уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, расположить корни этого уравненія (когда они действительные и неравные) и данное число λ въ порядкѣ возрастающихъ значеній.

Это значить, не рѣшая уравненія, опредѣлить, будетъ ли данное число λ меньше меньшаго корня, или оно будетъ заключаться между корнями, или, наконецъ, будетъ больше большаго корня. Приведемъ для сокращенія писемъ первую часть ур-нія, т.е. триномъ $ax^2 + bx + c$ будемъ обозначать символомъ $f(x)$ (читается: функція x -са), такъ что $f(x) = ax^2 + bx + c$; результатъ же подстановки въ триномъ числа λ вмѣсто x будемъ обозначать знакомъ $f(\lambda)$, такъ что $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Напр. $f(2)$ будетъ означать $4a + 2b + c$; $f(0)$ будетъ означать c и т. п.

Переходимъ къ рѣшенію вопроса. Подставимъ λ вмѣсто x въ первую часть ур—нія и вычислимъ $a\lambda^2 + b\lambda + c$ или $f(\lambda)$; такимъ образомъ мы будемъ знать знакъ $f(\lambda)$. Во-первыхъ, если окажется, что $f(\lambda)$ равняется нулю, то это будетъ значить, что λ есть одинъ изъ корней уравненія; и можно непосредственно узнать, будетъ ли λ большій, или это будетъ меньшій корень уравненія: стоитъ только сравнить λ съ полусуммою корней, $-\frac{b}{2a}$, которая заключается между корнями. Если $\lambda > -\frac{b}{2a}$, то λ есть большій корень, въ противномъ случаѣ, λ будетъ меньшій корень.

Если окажется, что знакъ $f(\lambda)$ противоположенъ знаку коэффициента a , т.-е. если $a \cdot f(\lambda) < 0$, то это будетъ служить вѣрнымъ признакомъ того, что корни тринома дѣйствительные и неравные, и что число λ содержится между корнями. Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ дѣйствительныхъ равныхъ и въ случаѣ мнимыхъ корней триномъ всегда имѣетъ знакъ одинаковый съ a , слѣд. въ этихъ случаяхъ всегда будетъ $a f(\lambda) \geq 0$. Значитъ, если $a f(\lambda) < 0$, корни дѣйствительные и неравные; а въ этомъ случаѣ знакъ $f(\lambda)$ противоположенъ знаку a , только для λ , лежащихъ между корнями, слѣд. λ содержится между корнями. Назвавъ корни чрезъ α и α' , полагая $\alpha' < \alpha$, будемъ имѣть слѣдующее расположеніе чиселъ α' , α'' и λ на скалѣ дѣйствительныхъ чиселъ:

$$\dots \alpha' \dots \lambda \dots \alpha'' \dots$$

Если же окажется, что знакъ $f(\lambda)$ одинаковъ со знакомъ a , т.-е. если $a \cdot f(\lambda) > 0$, то мы не знаемъ напередъ, будутъ ли корни дѣйствительные, или они мнимые; поэтому нужно опредѣлить знакъ реализанта ($b^2 - 4ac$): пусть будетъ $b^2 - 4ac > 0$. Тогда корни ур—нія будутъ дѣйствительные и неравные; назовемъ ихъ, попрежнему, α' и α'' , полагая $\alpha' < \alpha''$. Число λ теперь уже не будетъ находится между корнями; для λ между корнями было бы $a f(\lambda) < 0$. Значитъ, λ находится внѣ корней, т.-е. либо $\lambda < \alpha'$, либо $\lambda > \alpha''$. Чтобы рѣшить, какой изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто, нужно сравнить λ съ какимъ-нибудь числомъ, лежащимъ между корнями; одно такое число всегда намъ извѣстно, это—полусумма корней, $-\frac{b}{2a}$ (см. § 35b). Если окажется при этомъ, что $\lambda < -\frac{b}{2a}$, то, находясь внѣ корней, λ будетъ меньше меньшаго корня, и расположеніе чиселъ на скалѣ восходящихъ дѣйств. чиселъ будетъ такое:

$$-\infty \dots \lambda \dots \alpha' \dots \alpha'' \dots +\infty$$

Если же окажется, что $\lambda > -\frac{b}{2a}$, то, будучи внѣ корней, λ будетъ больше большаго корня, и распорядокъ чиселъ α' , α'' и λ будетъ таковъ:

$$-\infty \dots \alpha' \dots \alpha'' \dots \lambda \dots +\infty$$

Примѣчаніе. Когда корни различны по знаку, то 0 будетъ заключаться между корнями. Слѣдов., если λ есть число положительное, то оно будетъ больше большаго корня; если же $\lambda < 0$, то оно будетъ < меньшаго корня.

Прижръ 1. Дано уравненіе $x^2 - 22x + 80 = 0$. Требуется расположить въ порядкѣ возрастающихъ значений корни α' и α'' и число 12.

Подставляя въ первую часть число 12 вмѣсто x , находимъ: $f(12) = 12^2 - 22 \times 12 + 80 = 40$; результатъ подстановки имѣетъ знакъ противо-

положительный знаку коэффициента при x^2 ; заключаемъ, что корни ур—нія действительные и неравные (пусть $x' < x$) и что 12 заключается въ интерваллѣ корней:

$$\dots x' < 12 < x'' \dots$$

Примѣръ 2. Расположить въ порядкѣ возрастающихъ значений корни x' и x'' (полагая $x' < x$) того же ур—нія и число 20.

Подстановка 20 вмѣсто x даетъ $f(20) = 20^3 - 22 \times 20 + 80 > 0$, т.-е. одинаковаго знака съ первымъ коэффициентомъ. Отсюда нельзя заключить, будутъ ли корни действительные или мнимые; вычисляемъ resultantъ; для даннаго ур—нія беремъ $b'^2 - ac = (11)^2 - 1.80$, что > 0 , слѣд. корни действительные неравные. Такъ какъ $f(20) > 0$, то 20 находится внѣ корней. Далѣе: 20 полусуммы корней (11), слѣд. 20 больше большого корня. Итакъ:

$$x' \dots < \dots x'' \dots < .20.$$

Примѣръ 3. Пересѣчь шаръ радіуса R плоскостью такъ, чтобы объемъ сферическаго сегмента AMB былъ равенъ великѣ объему цилиндра, имѣющаго тоже основаніе, а высоту равную разстоянію центра шара отъ этого общаго основанія. (Черт. 55).

Пусть $MC = x$; ур—ніе задачи будетъ

$$\frac{\pi x^2}{3} (3R - x) = \pi (R - x) \cdot \frac{x^2}{2} \cdot AC = \pi (R - x) x (2R - x).$$

Одинъ изъ корней, $x = 0$, очевиденъ а priori; раздѣливъ ур. на πx , получимъ

$$3(R - x)(2R - x) - x(3R - x) = 0,$$

или

$$2x^3 - 6Rx + 3R^2 = 0.$$

Чтобы рѣшеніе этого ур—нія служило отвѣтомъ на задачу, нужно, чтобы оно было действительнымъ, положительнымъ и $< R$.

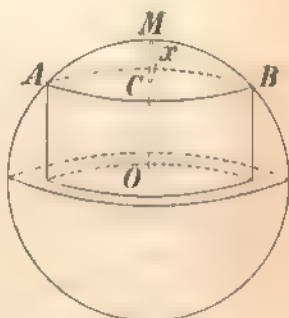
$b'^2 - ac = (3R)^2 - 6R^2 = 3R^2$, — количеству положительному: слѣдоват., корни действительны. Ихъ произведеніе, равное $\frac{3}{2} R^2$, положительно, слѣд. оба корня имѣютъ одинаковые знаки; сумма ихъ, равная $3R$, положительна: сл. оба корня положительны. Подставивъ въ первую часть R вмѣсто x , находимъ въ результатѣ $-R^2$: слѣд. R заключается между корнями, т.-е., называя корни буквами x' и x'' , и полагая $x' < x''$, имѣемъ

$$x' < R < x''.$$

заключаемъ, что одинъ изъ корней меньше R , другой больше R .

Такимъ образомъ задача имѣетъ одно рѣшеніе, выражаемое меньшимъ корнемъ

$$x' = \frac{R(3 - \sqrt{3})}{3}.$$



Черт. 55.

Примѣръ 4. Описать около шара такой конусъ, чтобы отноше-
ние его полной поверхности къ поверхности шара было равно данному
числу m .

Легко видѣть, что если за неизвѣстное принять высоту конуса x , уравнение
задачи будетъ

$$x^3 - 4mRx + 8mR^2 = 0.$$

Чтобы x , выведенный изъ этого ур-ня, представлялъ рѣшеніе данной за-
дачи, необходимо, чтобы онъ былъ количествомъ действительнымъ, положи-
тельнымъ и $\leq 2R$. Корни будутъ действительны, если $(2Rm)^2 - 5R^2m \geq 0$, или
 $m(m-2) \geq 0$, или, наконецъ, такъ какъ $m > 0$, если $m \geq 2$. Пусть это
условіе удовлетворено. Произведение корней положительно, слѣд. они имѣютъ
одинаковые знаки; сумма ихъ $(4mR)$ положительна, сл. оба они положительны.
Остается разсмотрѣть, какова изъ величина сравнительно съ $2R$. Подстановка
 $2R$ вмѣсто x въ первую часть даетъ $-4R^2$, т.-е. результатъ одинаковаго
знака съ коэффициентомъ при x^2 заключаемъ, что $2R$ лежитъ внѣ корней;
слѣд. или оба корня $< 2R$, или оба $> 2R$. Полусумма корней $= 2mR$, а какъ
 $m \geq 2$, то она не меньше $4R$; но $2R$ меньше этой величины, сл. оба корня
больше $2R$, и задача имѣетъ 2 рѣшенія.

485. Вопросъ II. — Не рѣшая уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, распре-
делить въ порядкѣ возрастающихъ значений корни (если они действительны
неравные) и два числа λ и μ , помня $\lambda + \mu$.

Подставляемъ въ тринomio $ax^2 + bx + c$ вмѣсто x сначала λ , потомъ μ , и
вычисляемъ результаты $f(\lambda)$ и $f(\mu)$ этихъ подстановокъ. Здѣсь нужно различать
два случая: 1) $f(\lambda)$ и $f(\mu)$ имѣютъ одинаковый знакъ; 2) эти числа
имѣютъ противные знаки.

1) Пусть $f(\lambda)$ и $f(\mu)$ имѣютъ знаки разные, что можно записать въ видѣ
 $f(\lambda) \cdot f(\mu) < 0$. По § 481 мы знаемъ, что это вѣрный признакъ, что уравне-
ніе имѣетъ корни действительные и неравные ($x' < x''$), и что только одинъ
изъ нихъ заключается между λ и μ ; слѣд. будетъ одно изъ двухъ:

$$\text{либо } \lambda < x' < \mu < x'', \text{ либо } x' < \lambda < x'' < \mu.$$

Первое будетъ тогда, когда $a \cdot f(\lambda) < 0$; второе имѣетъ мѣсто тогда, когда
 $a \cdot f(\mu) < 0$. Впрочемъ, о томъ, имѣетъ ли мѣсто первое расположеніе, или вто-
рое, можно судить и иначе. Такъ какъ (идя слѣва направо) числа λ , μ и
корни расположены въ порядкѣ возрастанія ихъ значений, то, очевидно, въ пер-
вомъ случаѣ $\lambda + \mu < x' + x$, т.-е. $< -\frac{b}{a}$; во второмъ же случаѣ $\lambda + \mu > x' + x$,
т.-е. $> -\frac{b}{a}$.

Заключаемъ, что если $\lambda + \mu$ меньше $-\frac{b}{a}$, то имѣетъ мѣсто первый случай;
если же $\lambda + \mu$ больше $-\frac{b}{a}$, то имѣетъ мѣсто второй случай.

2) Пусть $f(\lambda)$ и $f(\mu)$ имѣютъ одинаковые знаки, что можно записать такъ:
 $f(\lambda) \cdot f(\mu) > 0$. Этотъ случай, въ свою очередь, подраздѣляется на два другіе,
смотря по тому, имѣетъ ли $f(\lambda)$ знакъ одинаковый съ a , или имѣетъ знакъ про-
тивоположный знаку a .

Если $a \cdot f(i) < 0$, то ур. имѣетъ корни дѣйствительные неравные, и оба числа, λ и μ , находятся между корнями:

$$x' \dots \lambda \dots \mu \dots x'.$$

Если $a \cdot f(\lambda) < 0$, то еще нужно убѣдиться, имѣетъ ли ур. дѣйствительные неравные корни, и для этого надо опредѣлить знакъ реализанта $b^2 - 4ac$. Пусть окажется, что $b^2 - 4ac > 0$, и сл., ур. имѣетъ дѣйствительные неравные корни (пусть $x' < x''$). Ни λ , ни μ не содержатся между корнями. Слѣд., возможно одно изъ слѣдующихъ трехъ распределеній:

$$\begin{array}{l} \text{либо} \quad x' \dots x \dots \lambda \dots \mu; \\ \text{либо} \quad \lambda \dots x' \dots x'' \dots \mu; \\ \text{либо} \quad \lambda \dots \mu \dots x' \dots x'' \dots \end{array}$$

Когда имѣетъ мѣсто то, или другое, или третье распределеніе, легко рѣшается сравненіемъ данныхъ чиселъ съ полусуммою корней, $-\frac{b}{2a}$, которая всегда содержится между корнями. Если $-\frac{b}{2a} < \lambda$, но имѣемъ 1-е распределеніе; если $\lambda < -\frac{b}{2a} < \mu$, то имѣетъ мѣсто 2-е распределеніе, а если $\mu < -\frac{b}{2a}$, то, очевидно, имѣетъ дѣло съ третьимъ.

Примѣръ. Указать расположеніе чиселъ: -1 и $+4$ относительно корней уравненія $-x^2 + 3x + 2 = 0$.

Такъ какъ первый и третій коэффициенты имѣютъ знаки противоположные, то корни ур. — ціл дѣйствительные и неравные.

Подставляя вмѣсто x послѣдовательно данныя числа, имѣемъ $f(-1) = -$, $f(4) = -$: знаки одинаковые; при этомъ $a \cdot f(\lambda)$ или $-1 \cdot f(-1) < 0$, заключаемъ, что числа -1 и $+4$ не находятся между корнями. Полусумма корней, $+\frac{3}{2}$, больше -1 , но меньше $+4$; заключаемъ, что меньшій корень больше -1 , а большій корень меньше 4 , и распределеніе корней и чиселъ -1 и $+4$, въ восходящемъ порядкѣ, будетъ таково:

$$\dots -1 \dots x' \dots x'' \dots +4 \dots$$

486. Задача. Дать общую форму условий, необходимыхъ и достаточныхъ для того, чтобы корни уравненія

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

предполагая, что они дѣйствительны, были оба больше, или оба меньше данного количества λ .

Во-первыхъ, согласно требованію, необходимо, чтобы λ лежало влѣ корней, а потому подстановка этого числа на мѣсто x въ триномъ $ax^2 + bx + c$ должна давать результатъ одинаковаго знака съ a , т.-е. должно быть

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0.$$

Это условіе выражаетъ только, что λ не содержится между корнями; остается выразить, что:

1) въ первомъ случаѣ оба корня больше λ , т.-е.

$$x' > \lambda \text{ и } x'' > \lambda, \text{ откуда } x' + x'' > 2\lambda, \text{ или } x - \frac{x''}{2} > \lambda, \text{ или, наконецъ,}$$

$$-\frac{b}{2a} > \lambda.$$

Итакъ, условія, *необходимыя* для того, чтобы оба корня были больше λ , таковы:

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0 \text{ и } -\frac{b}{2a} > \lambda, \text{ или короче, } a \cdot f(\lambda) > 0 \text{ и } -\frac{b}{2a} > \lambda.$$

Будучи *необходимы*, они *вмѣстѣ* съ тѣмъ и *достаточны*, ибо какъ скоро они выполнены, то изъ *перваго* слѣдуетъ, что λ не содержится между корнями, а изъ *второго* должно заключить, что λ меньше *каждаго* изъ корней, ибо, допустивъ, что корня *меньше* λ , имѣли бы

$$x' + x'' < 2\lambda, \text{ или } -\frac{b}{2a} < \lambda.$$

2) Такимъ же образомъ найдемъ, что условія *необходимыя* и *достаточныя* для того, чтобы оба корня были *меньше* λ , будутъ:

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) < 0 \text{ и } -\frac{b}{2a} < \lambda, \text{ или } a \cdot f(\lambda) < 0 \text{ и } -\frac{b}{2a} < \lambda.$$

487. Задача. Дать общую форму условія, *необходимаго* и *достаточнаго* для того, чтобы данное количество λ содержалось между корнями уравненія $ax^2 + bx + c = 0$.

Необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки числа λ на мѣсто x въ триномъ $ax^2 + bx + c$ имѣлъ знакъ, противоположный знаку a .

Каковъ бы ни былъ знакъ a , это условіе будетъ

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) < 0, \text{ или } a \cdot f(\lambda) < 0.$$

488. Задача. Дать общую форму условій, *необходимыхъ* и *достаточныхъ* для того, чтобы квадратный триномъ сохранялъ неизмѣнно одинъ и тотъ же знакъ, каковы бы ни были действит. значенія x ?

Триномъ не можетъ сохранять одинаковый знакъ при всякомъ x , если корни его будутъ действит. неравные, ибо въ этомъ случаѣ онъ дважды мѣняетъ знакъ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$; когда корни его действ. равные, то онъ сохраняетъ знакъ a при всякомъ x , кромѣ $x = -\frac{b}{2a}$, ибо тутъ онъ обращается въ 0; и только въ одномъ случаѣ знакъ его неизмѣнно *всегда* будетъ одинъ и тотъ же: когда корни его—*мнимые*. Итакъ:

1) Триномъ *всегда*, при всякомъ x , будетъ *положителенъ*, если

$$b^2 - 4ac < 0 \text{ и вмѣстѣ съ тѣмъ } a > 0;$$

2) Триномъ *всегда*, при всякомъ x , будетъ *отрицателенъ*, если

$$b^2 - 4ac < 0 \text{ и вмѣстѣ съ тѣмъ } a < 0.$$

Очевидно, что это и суть необходимые и достаточные условия, при которых требование задачи будет удовлетворено.

489. Задача. Теорема о знаке квадратного тринома может служить для последовательного вычисления скольких угодно десятичных цифр несоизмеримого корня. Пусть, напр., дано уравнение $x^2 + 3x - 7 = 0$, которого один из корней заключается между 1 и 2. Очевидно, целая часть этого корня есть 1.

Для вычисления первого десятичного знака положим $x = 1 + \frac{y}{10}$. Целая часть y -ка, очевидно, будет первым десятичным знаком x . Подстановка даст

$$\left(1 + \frac{y}{10}\right)^2 + 3\left(1 + \frac{y}{10}\right) - 7 = 0, \text{ или } y^2 + 50y - 300 = 0 \dots (1).$$

Подставляем вм. y , последовательно, 0, 1, 2, 3... до тех пор пока не получим двух последовательных результатов с противоположными знаками. Т. е. найдем, что положительный корень ур-ния (1) содержится между 5 и 6. Целая часть y -ка равна, след., 5: это и есть первый десятичный знак корня x .

Зная это, положим теперь $y = 5 + \frac{z}{10}$, где целая часть z будет первым десятичным знаком y , и след., вторым десятичным знаком x . Ур. в z будет

$$5 + \frac{z}{10}^2 + 50\left(5 + \frac{z}{10}\right) - 300 = 0, \text{ или } z^2 + 600z - 2500 = 0.$$

Подобно предыдущему найдем, что это ур. имеет корень, содержащийся между 4 и 5. Второй десятичный знак корня x равен, значить, 4. Итак, предложенное ур. имеет корень $x = 1,54$, с точн. до 0,01. Продолжая указанным путем, можем найти сколько угодно дальнейших знаков.

490. Задача. Сравнить корни двух уравнений, из которых одно — квадратное, другое — первой степени.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ и $\varphi(x) = a'x + b' = 0$ — два данных уравнения. Пусть действительные корни первого суть x_1 и x_2 (полагая, что $x_1 < x_2$), и ξ_1 корень второго. Полагаем $a > 0$ и $a' > 0$.

Чтобы определить положение числа ξ_1 относительно чисел x_1 и x_2 , нужно знать знак результата подстановки числа ξ_1 в $f(x)$. Замечая, что $\xi_1 = -\frac{b'}{a'}$, имеем

$$f(\xi_1) = f\left(-\frac{b'}{a'}\right) = \frac{1}{a^2} [ab'^2 - ba'b' + ca'^2].$$

или, положив, для краткости, $ab'^2 - ba'b' + ca'^2 = \Delta$ (Δ называется *результатом* данных ур-ний), можем написать

$$f(\xi_1) = \frac{1}{a^2} \cdot \Delta.$$

Такъ какъ $\frac{1}{a^2}$ всегда положительно, ибо коэффициенты предлагаются действительными, то заключаемъ, что $f(\xi_1)$ имѣетъ тотъ же знакъ, что и Δ ; откуда прямо слѣдуетъ, что:

Если $a\Delta < 0$, ξ_1 заключается между корнями уравненія $f(x) = 0$, и расположеніе трехъ корней таково:

$$x_1 < \xi_1 < x_2.$$

Если $a\Delta = 0$, т.-е. если $\Delta = 0$, то $f(\xi_1) = 0$, а это значитъ, что ξ_1 равно одному изъ корней квадратнаго уравненія, и слѣд., имѣетъ мѣсто одно изъ слѣдующихъ распределеній:

$$\text{или } \xi_1 = x_1 < x_2, \text{ или } x_1 < x_2 = \xi_1 \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Наконецъ, если $a\Delta > 0$, ξ_1 находится вне интервала корней квадратнаго уравненія, и слѣд. порядокъ корней будетъ

$$\text{либо } \xi_1 < x_1 < x_2, \text{ либо } x_1 < x_2 < \xi_1 \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Если замѣтимъ, что $\frac{x_1 + x_2}{2}$ всегда заключается между корнями квадратнаго уравненія, то тотчасъ усматриваемъ, что въ строкахъ I и II расположенія, указанныя слѣва, имѣютъ мѣсто, если окажется, что $\xi_1 < \frac{x_1 + x_2}{2}$, а расположенія, написанныя справа, имѣютъ мѣсто, если будетъ $\xi_1 > \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Замѣняя ξ_1 и $\frac{x_1 + x_2}{2}$ ихъ значеніями въ коэффициентахъ, найдемъ, что лѣвымъ порядкомъ отвѣчаетъ соотношеніе

$$-\frac{b'}{a'} < -\frac{b}{2a'} \quad \text{или} \quad \frac{a'b'}{a'^2} > \frac{ab}{2a^2}, \quad \text{или} \quad aa'(2ab' - ba') > 0,$$

а правымъ — соотношеніе

$$-\frac{b'}{a'} > -\frac{b}{2a'}, \quad \text{или} \quad \frac{a'b'}{a'^2} < \frac{ab}{2a^2}, \quad \text{или} \quad aa'(2ab' - ba') < 0.$$

Это изслѣдованіе можно резюмировать въ формѣ слѣдующей таблицы:

Е с л и		т о
$a\Delta < 0, \dots\dots\dots$		$x_1 < \xi_1 < x_2$
$a\Delta = 0,$	$\begin{cases} aa'(2ab' - ba') < 0 \dots \\ aa'(2ab' - ba') = 0 \dots \\ aa'(2ab' - ba') > 0 \dots \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 < x_2 = \xi_1 \\ x_1 = x_2 = \xi_1 \\ x_1 = \xi_1 < x_2 \end{cases}$
$a\Delta > 0,$ и $b^2 - 4ac \geq 0,$	$\begin{cases} aa'(2ab' - ba') < 0 \dots \\ aa'(2ab' - ba') > 0 \dots \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 < x_2 < \xi_1 \\ \xi_1 < x_1 < x_2 \end{cases}$

Примѣчанія. I. Эта таблица показываетъ, что когда $a\Delta \leq 0$, корни квадратнаго ур—нія дѣйствительны. Но можно и прямо показать, что если $a\Delta < 0$, то $b^2 - 4ac$ не можетъ быть отрицательнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, написавъ $a\Delta$ въ видѣ

$$\frac{1}{4}[(2ab' - ba')^2 - (b^2 - 4ac)a'^2],$$

непосредственно усматриваемъ, что при $b^2 - 4ac < 0$ было бы $a\Delta > 0$. Изъ этого выраженія легко видѣть еще, что если $a\Delta = 0$ и $2ab' - ba' = 0$, то необходимо должно быть $b^2 - 4ac = 0$, что показываетъ и таблица. Наконецъ, если $a\Delta > 0$ и корни x_1 и x_2 дѣйствительны, то не можетъ быть $2ab' - ba' = 0$.

II. Если $a\Delta > 0$, корни x_1 и x_2 могутъ и не быть дѣйствительными; но если они мнимы, то необходимо $a\Delta > 0$.

491. Задача. Сравнить между собою корни двухъ квадратныхъ уравненій.

Пусть имѣемъ квадратныя ур—нія

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \quad \varphi(x) = a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

въ которыхъ $a \neq 0$ и $a' \neq 0$; и пусть дѣйствительные корни перваго будутъ x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$), а втораго ξ_1 и ξ_2 ($\xi_1 \neq \xi_2$).

Чтобы опредѣлить положеніе корней ξ_1 и ξ_2 относительно x_1 и x_2 , разсмотримъ знаки подстановокъ ξ_1 и ξ_2 въ $f(x)$, и для этого вычислимъ произведеніе $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2)$ и сумму $f(\xi_1) + f(\xi_2)$.

$$1) \text{ Произведеніе } f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) = (a\xi_1^2 + b\xi_1 + c)(a\xi_2^2 + b\xi_2 + c) = a^2\xi_1^2\xi_2^2 + ab\xi_1\xi_2(\xi_1 + \xi_2) + ac(\xi_1^2 + \xi_2^2) + b^2\xi_1\xi_2 + bc(\xi_1 + \xi_2) + c^2;$$

или, подставивъ $\frac{c'}{a'}$ вмѣсто $\xi_1\xi_2$, и $\frac{b'}{a'}$ вмѣсто $\xi_1 + \xi_2$, имѣемъ

$$f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) = \frac{a^2c'^2}{a'^2} - \frac{abc'b'}{a'^2} + ac \frac{b'^2 - 2a'c'}{a'^2} + \frac{b^2c'^2}{a'^2} - \frac{bcb'}{a'} + c^2$$

$$= \frac{1}{a'^2} [a^2c'^2 - abc'b' + acb'^2 - 2aca'c' + b^2c'^2 - bca'b' + a'^2c^2]$$

$$= \frac{1}{a'^2} [a^2c'^2 - 2aca'c' + a'^2c^2 - abc'b' + acb'^2 + b^2c'^2 - bca'b']$$

$$= \frac{1}{a'^2} [(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')] = \frac{1}{a'^2} \Delta,$$

называя буквою Δ скобочное выраженіе (результатъ данныхъ ур—ній).

$$2) \text{ Сумма } f(\xi_1) + f(\xi_2) = a(\xi_1^2 + \xi_2^2) + b(\xi_1 + \xi_2) + 2c$$

$$= a \cdot \frac{b'^2 - 2a'c'}{a'^2} - \frac{bb'}{a'} + 2c = \frac{ab'^2 - 2aa'c' - bb'a' + 2ca'^2}{a'^2}$$

$$= \frac{b'(ab' - ba') - 2a'(ac' - ca')}{a'^2} = \frac{1}{a'^2} P,$$

называя буквою P выраженіе $b'(ab' - ba') - 2a'(ac' - ca')$.

Итакъ, знаки произведенія $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2)$ и суммы $f(\xi_1) + f(\xi_2)$ — соответственно тѣ же, что и знаки Δ и P .

Подобнымъ же образомъ нашли бы, что знаки $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ и $\varphi(x_1) + \varphi(x_2) -$ соответственно тѣ же, что и выражений Δ и Q , гдѣ $Q = 2a(ac' - ca') - b(ab' - ba')$.

Теперь можемъ приступить къ сравненію корней длинныхъ ур — ній.

А. Случай, когда данныя уравненія не имѣютъ общаго корня. Въ этомъ случаѣ $\Delta \neq 0$; въ самомъ дѣлѣ, если бы было $\Delta = 0$, т.е. было бы $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$, то одинъ изъ этихъ множителей былъ бы нулемъ; если бы, напр., было $f(\xi_1) = 0$, то ξ_1 — корень ур — нія $\varphi(x) = 0$ обращалъ бы и $f(x)$ въ нуль, слѣд., былъ бы общимъ корнемъ Δ , отличное отъ нуля, можетъ быть или < 0 , или > 0 . Пусть, во-первыхъ:

а) $\Delta < 0$. Легко видѣть, что Δ можно представить въ формахъ

$$4\Delta = (2ac' + 2ca' - bh')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') \dots (m)$$

$$4a^2\Delta = (b^2 - 4ac)(ab' - ba')^2 - [2a(ac' - ca') - b(ab' - ba')]^2 \dots (n)$$

$$4a'^2\Delta = (b'^2 - 4a'c')(ab' - ba')^2 - [2a'(ac' - ca') - b'(ab' - ba')]^2 \dots (p).$$

Тождество (m) показываетъ, что $b^2 - 4ac$ и $b'^2 - 4a'c'$ не могутъ быть ни противоположны по знаку, ни нулями. Тождества (n) и (p) показываютъ, что эти выраженія могутъ быть положительными, либо отрицательными.

Слѣдовательно, когда $\Delta < 0$, то или оба уравненія имѣютъ корни дѣйствительные, или оба имѣютъ корни мнимые. Пусть будетъ $b^2 - 4ac > 0$; въ такомъ случаѣ будетъ $b'^2 - 4a'c' > 0$; ξ_1 и ξ_2 будутъ корни дѣйствительные неравные.

Такъ какъ $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2)$ отрицательно, то множители имѣютъ знаки противоположные; слѣд., одно изъ чиселъ ξ_1 и ξ_2 заключается между корнями ур — нія $f(x) = 0$, другое вне этихъ корней: между ξ_1 и ξ_2 заключается только одинъ изъ корней ур — нія $f(x) = 0$, и корни будутъ представлять одно изъ распределеній:

$$(1) \quad x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2,$$

либо

$$(2) \quad \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2.$$

Первое распределеніе имѣть мѣсто, если будетъ $\xi_1 + \xi_2 > x_1 + x_2$; второе — когда будетъ $\xi_1 + \xi_2 < x_1 + x_2$.

Итакъ: распорядокъ (1) имѣть мѣсто, если

$$-\frac{b'}{a'} > -\frac{b}{a}, \quad \text{или} \quad aa'(ab' - ba') < 0;$$

распорядокъ (2) имѣть мѣсто, если

$$-\frac{b'}{a'} < -\frac{b}{a}, \quad \text{или} \quad aa'(ab' - ba') > 0.$$

б) Пусть $\Delta > 0$. Тождества (n) и (p) показываютъ, что выраженія $b^2 - 4ac$ и $b'^2 - 4a'c'$ не могутъ быть ни отрицательными, ни нулями. Слѣд., корни того и другого ур — нія всегда дѣйствительные и неравные.

Такъ какъ произведеніе $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2)$ положительно, его множители имѣютъ одинаковый знакъ. Опредѣляемъ этотъ знакъ посредствомъ суммы $f(\xi_1) + f(\xi_2)$.

Но знакъ этой суммы одинаковъ съ P . Если $aP < 0$, $af(\xi_1)$ и $af(\xi_2)$ отрицательны, и корни ξ_1 и ξ_2 лежатъ между x_1 и x_2 : имѣетъ мѣсто распорядокъ

$$(3) \quad x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2.$$

Если $aP > 0$, $af(\xi_1)$ и $af(\xi_2)$ положительны, и корни ξ_1 и ξ_2 лежатъ въ интерваллѣ корней x_1 и x_2 : можетъ имѣть мѣсто тройное распредѣленіе корней:

либо $(4) \quad \xi_1 < x_1 < x_2 < \xi_2,$

либо $(5) \quad x_1 < x_2 < \xi_1 < \xi_2,$

либо $(6) \quad \xi_1 < \xi_2 < x_1 < x_2.$

Когда имѣетъ мѣсто то, или другое, или третье?

Такъ какъ $\Delta > 0$, $\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) > 0$; въ первомъ случаѣ x_1 и x_2 находятся между ξ_1 и ξ_2 , слѣд., $a'\varphi(x_1)$ и $a'\varphi(x_2)$ отрицательны, а потому ихъ сумма $a'[\varphi(x_1) + \varphi(x_2)] = a'Q$ отрицательна.

Въ случаяхъ распредѣленій (5) и (6), очевидно, $a'Q > 0$.

Для $(5) \quad x_1 + x_2 < \xi_1 + \xi_2$, и слѣд. $aa'(ab' - ba') < 0$;

или $(6) \quad x_1 + x_2 > \xi_1 + \xi_2$, и слѣд. $aa'(ab' - ba') > 0$.

Такимъ образомъ отличаемъ распредѣленіе (5) отъ (6).

В. Случай, когда данныя уравненія имѣютъ, по крайней мѣрѣ, одинъ общій корень.

Въ этомъ случаѣ $\Delta = 0$. Тождества (n) и (p) показываютъ, что если будутъ $ab' - ba' = 0$ выйтѣ съ $P = 0$ или $Q = 0$, то реализанты $b^2 - 4ac$ и $b'^2 - 4a'c'$ могутъ быть положительны, нули, либо отрицательны; при этомъ — одновременно, ибо также и $ac' - ca' = 0$, и оба уравненія должны либо имѣть общие корни, либо не имѣть действительныхъ корней. Если же $ab' - ba' \neq 0$, $b^2 - 4ac$ и $b'^2 - 4a'c'$ не могутъ быть отрицательны: уравненія имѣютъ корни действительные.

а) Пусть $b^2 - 4ac > 0$ и $b'^2 - 4a'c' > 0$.

Ни одно ур—ніе не имѣетъ равныхъ корней.

Если $ab' - ba' = 0$, то, какъ $\Delta = 0$, будетъ и $ac' - ca' = 0$, коэффициенты ур—ній пропорціональны, и, слѣд., корни одного ур—нія одинаковы съ корнями другого:

$$(7) \quad x_1 = \xi_1 < x_2 = \xi_2.$$

Если $ab' - ba' \neq 0$, ур—нія имѣютъ лишь одинъ общій корень. Въ этомъ случаѣ одно изъ количествъ $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$ равно нулю; другое имѣетъ знакъ суммы $f(\xi_1) + f(\xi_2)$, т.е. знакъ P .

Точно такъ же, одинъ изъ результатовъ подстановки $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ равенъ нулю, а другой имѣетъ знакъ суммы $\varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, т.е. знакъ Q .

Отсюда слѣдуетъ, что если $aP < 0$, одинъ изъ корней ξ_1 , ξ_2 содержится между x_1 и x_2 , и имѣетъ мѣсто одно изъ распредѣленій

$$(8) \quad x_1 < \xi_1 < x_2 = \xi_2.$$

$$(9) \quad \xi_1 = x_1 < \xi_2 < x_2.$$

Первое изъ нихъ имѣетъ мѣсто, если $x_1 + x_2 < \xi_1 + \xi_2$, т.е. если $aa'(ab' - ba') < 0$; второе, если $x_1 + x_2 > \xi_1 + \xi_2$, т.е. если $aa'(ab' - ba') > 0$.

Если $aP > 0$, один из корней ξ_1, ξ_2 лежит в интервале (x_1, x_2) . В этом случае возможны 4 раскладки:

$$(10) \quad \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2,$$

$$(11) \quad \xi_1 < x_1 < x_2 < \xi_2,$$

$$(12) \quad \xi_1 < x_1 = \xi_2 < x_2,$$

$$(13) \quad x_1 < \xi_1 = x_2 < \xi_2.$$

Если $a'Q < 0$, один из корней x_1, x_2 лежит между ξ_1 и ξ_2 , следовательно, имеем либо раскладку (10), либо (11), а именно: (10), если $aa'(ab' - ba') < 0$, и (11), если $aa'(ab' - ba') > 0$.

Если $a'Q > 0$, имеем либо распределение (12), либо (13): первое, если $aa'(ab' - ba') < 0$, второе, если $aa'(ab' - ba') > 0$.

β) Пусть $b^2 - 4ac \neq 0$, $b'^2 - 4a'e' = 0$.

Следовательно, $\xi_1 = \xi_2$. Возможны раскладки:

$$(14) \quad x_1 < \xi_1 = \xi_2 = x_2,$$

$$(15) \quad x_1 = \xi_1 = \xi_2 < x_2;$$

(14) — если $aa'(ab' - ba') < 0$; (15) — если $aa'(ab' - ba') > 0$.

γ) Пусть $b^2 - 4ac = 0$, $b'^2 - 4a'e' \neq 0$.

В этом случае $x_1 = x_2$. Возможны лишь раскладки:

$$(16) \quad \xi_1 = x_1 = x_2 < \xi_2$$

$$(17) \quad \xi_1 < x_1 = x_2 = \xi_2;$$

(16) — если $aa'(ab' - ba') < 0$; (17) — если $aa'(ab' - ba') > 0$.

δ, Пусть, наконец, $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'e' = 0$.

В этом случае $x_1 = x_2 = \xi_1 = \xi_2$, и имеем только одно распределение:

$$(18) \quad x_1 = x_2 = \xi_1 = \xi_2.$$

Резюме. Результаты данных уравнений:

$$\Delta = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb'),$$

$$= \frac{1}{4}[(2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'e')],$$

$$= \frac{1}{4a^2}[(b^2 - 4ac)(ab' - ba')^2 - \{2a(ac' - ca') - b(ab' - ba')\}^2],$$

$$= \frac{1}{4a^2}[(b^2 - 4a'e')(ab' - ba')^2 - \{2a'(ac' - ca') - b(ab' - ba')\}^2]$$

$$= a^2 \cdot f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) = a^2 \cdot \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2).$$

$$P = b'(ab' - ba') - 2a(ac' - ca') = a'^2[f(\xi_1) + f(\xi_2)].$$

$$Q = 2a(ac' - ca') - b(ab' - ba') = a^2[\varphi(x_1) + \varphi(x_2)].$$

$$x_1, x_2 \text{ корни уравнения } ax^2 + bx + c = 0, \quad (x_1, x_2).$$

$$\xi_1, \xi_2 \text{ „ „ „ „ } ax^2 + b'x + c' = 0, \quad (\xi_1, \xi_2).$$

$$b^2 - 4ac = \delta, \quad b'^2 - 4a'e' = \delta'.$$

Нижеслѣдующая таблица резюмируетъ вышеприведенное изслѣдованіе

Е с л и	Т о										
		$\Delta < 0^1)$	$\Delta < 0^1)$	$aa'(ab' - ba) < 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$\Delta \neq 0$	$\Delta > 0^2)$	$\Delta > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta = 0$	$\Delta = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta = 0$	$\Delta = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta = 0$	$\Delta = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$\Delta = 0^2)$	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta = 0$	$\Delta = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta = 0$	$\Delta = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta = 0$	$\Delta = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	$aa'(ab' - ba) = 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	$aa'(ab' - ba) > 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Примѣчаніе. Эта таблица должна научить, какъ располагать изслѣдованіе въ каждомъ частномъ вопросѣ. Понятно, что иногда можетъ потребоваться построеніе только части этой таблицы.

1) Необходимо, чтобы было $b^2 - 4ac > 0$, что влечетъ за собою и $b'^2 - 4a'c' = 0$.

2) Корня уравненій въ этомъ случаѣ всегда действительные неравные, поэтому нѣтъ надобности опредѣлять знаки δ и δ' .

3) Въ этотъ случаѣ корни уравненій всегда действительны, слѣд., разсмотрѣнію подлежатъ только случаи, когда δ и c' положительны или нули.

ГЛАВА XXXIII.

Рѣшеніе неравенствъ: квадратныхъ, высшихъ степеней, ирраціональных. —
Примененія.

Цѣлое квадратное неравенство.

492. Цѣлая квадратная неравенства могутъ быть двоякаго вида:

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ или } ax^2 + bx + c < 0;$$

но умноживъ второе на -1 , приведемъ его къ виду перваго; слѣд. съ теоретической точки зрѣнія достаточно указать рѣшеніе неравенствъ

$$ax^2 + bx + c = 0 \dots (1)$$

Слѣдуетъ различать два случая: $b^2 - 4ac < 0$ и $b^2 - 4ac = 0$.

1-й случай: $b^2 - 4ac < 0$.

При этомъ условіи корни триномъ будутъ дѣйствительные равные, или мнимые; а извѣстно, что какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ, при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ сохраняетъ неизмѣнно знаки коэффициента a . Поэтому надо различать случаи: $a > 0$ и $a < 0$.

Если $a > 0$, триномъ всегда останется положительнымъ, и слѣд. неравенству (1) удовлетворяютъ всѣ дѣйствительныя значенія x (за исключеніемъ значенія $x = -\frac{b}{2a}$ въ случаѣ $b^2 - 4ac = 0$).

Если же $a < 0$, триномъ всегда останется отрицательнымъ: неравенство не можетъ быть удовлетворено никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x .

2-й случай: $b^2 - 4ac > 0$.

Въ этомъ случаѣ триномъ имѣетъ корни дѣйствительные неравные: мы ихъ найдемъ, рѣшивъ ур. $ax^2 + bx + c = 0$: пусть они будутъ x' и x'' , и пусть $x' < x''$.

Если $a > 0$, то триномъ, сохраняя знакъ перваго члена при всѣхъ значеніяхъ x , лежащихъ внѣ корней, останется при всѣхъ этихъ значеніяхъ положительнымъ: слѣд. неравенству будутъ удовлетворять, съ одной стороны, всѣ значенія x , меньшія меньшаго корня x' , съ другой, всѣ x -сы, большіе большаго корня x'' :

$$x < x' \quad \text{и} \quad x > x''.$$

Если $a < 0$, то триномъ, сохраняя знакъ противоположный первому члену при всѣхъ значеніяхъ x , лежащихъ между корнями, будетъ положительенъ при

$$x' < x < x''.$$

Нижеслѣдующая таблица резюмируетъ рѣшеніе квадратнаго неравенства того и другого вида, при томъ или другомъ знакъ коэффициента.

Если	Рѣшеніе нерав. $ax^2 + bx + c > 0$	
	$a > 0$	$a < 0$
$b^2 - 4ac < 0$	Всякое значеніе x .	Нѣтъ дѣйств. значеній x , удов.—хъ нер.—ву.
$b^2 - 4ac = 0$	Всякое значеніе x , кромѣ $-\frac{b}{2a}$.	Нѣтъ дѣйств. значеній x , удов.—хъ нер.—ву.
$b^2 - 4ac > 0$	Всякое значеніе x , лежащее внѣ корней: $x < x'$ и $x > x''$.	Всякое значеніе x , лежащее между корнями: $x' < x < x''$.
	$a < 0$	$a > 0$
	Рѣшеніе нерав. $ax^2 + bx + c < 0$	

493. Примеръ I. Рѣшить неравенство: $-3x^2 + 7x - 5 < 0$.

Здѣсь $b^2 - 4ac = 7^2 - 4(-3)(-5) = 11$, слѣд. корни тринома мнимы, а потому при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x , сохраняя знакъ перваго члена, онъ будетъ отрицателенъ; такъ что неравенство удовлетворится всякимъ дѣйствительнымъ значеніемъ переменнаго.

Примеръ II. Рѣшить неравенство $3x^2 - 10x + 3 > 0$.

Здѣсь $b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 16$; корни тринома дѣйствительные неравные, именно: $x' = \frac{1}{3}$, $x'' = 3$.

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ былъ положителенъ, т.-е. имѣлъ знакъ перваго члена, а это имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x , лежащихъ внѣ корней. Поэтому неравенству удовлетворяютъ всѣ

$$x < \frac{1}{3}, \text{ а также } x > 3.$$

Примеръ III. Рѣшить неравенство $4x^2 + 5x - 19 < 0$.

Здѣсь $b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-19) = 329$; корни тринома дѣйствительные неравные, именно.

$$x' = -\frac{5 + \sqrt{329}}{8}, \quad x'' = \frac{5 - \sqrt{329}}{8}.$$

Неравенство требуетъ, чтобы знакъ тринома былъ противоположенъ знаку перваго члена, и потому x должно заключаться между корнями, т.-е.

$$\frac{-5 + \sqrt{329}}{8} > x > \frac{-5 - \sqrt{329}}{8}.$$

Примѣръ IV. Рѣшить неравенство $\frac{3x-5}{7-x} > 0$.

Чтобы частное было положительно, нужно, чтобы дѣлимое и дѣлитель имѣли одинаковые знаки, или, что то же, надо, чтобы произведение ихъ было положительно, т.-е. чтобы

$$(3x - 5)(7 - x) > 0, \text{ или } -3x^2 + 26x - 35 > 0.$$

Отсюда, какъ въ примѣрѣ III, найдемъ, что

$$\frac{5}{3} < x < 7.$$

Примѣръ V. Рѣшить неравенство $x^2 + 2ax - a^2 > 0$.

Крайніе члены противоположны по знаку, слѣд. корни тринома дѣйствительные неравные; а именно, найдемъ, что

$$x' = a(\sqrt{2} - 1), \quad x'' = -a(\sqrt{2} + 1).$$

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ сохранялъ знакъ 1-го коэффициента, а въ случаѣ дѣйствит. неравныхъ корней это имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x , лежащихъ внѣ корней.

Отсюда:

1) Если $a > 0$, и слѣд. $x' > x''$, неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія

$$x > a(\sqrt{2} - 1), \text{ а также всѣ } x < -a(\sqrt{2} + 1).$$

2) Если $a < 0$, и слѣд. $x' < x''$, неравенству удовлетворяютъ

$$\text{всѣ } x < a(\sqrt{2} - 1), \text{ а также всѣ } x > -a(\sqrt{2} + 1).$$

Примѣръ VI. Рѣшить неравенство

$$(n-3)(n-4)x^2 - 8a(n-3)x - 12a^2 > 0.$$

Находимъ корни тринома; для этого рѣшаемъ ур.

$$(n-3)(n-4)x^2 - 8a(n-3)x - 12a^2 = 0,$$

изъ котораго

$$x = \frac{4a(n-3) \pm \sqrt{16a^2(n-3)^2 + 12a^2(n-3)(n-4)}}{(n-3)(n-4)}.$$

Подрадикальное количество $= 4a^2(n-3)\{4(n-3) + 3(n-4)\}$

$= 4a^2(n-3)(7n-24)$; такимъ образомъ найдемъ

$$x' = \frac{2a[2(n-3) + \sqrt{(n-3)(7n-24)}]}{(n-3)(n-4)}, \quad x'' = \frac{2a[2(n-3) - \sqrt{(n-3)(7n-24)}]}{(n-3)(n-4)}.$$

Знакъ тринома зависитъ какъ отъ знака коэффициента $(n - 3)(n - 4)$, такъ и отъ природы корней, слѣд. отъ подрадикальнаго количества, а потому нужно рассмотреть нѣсколько случаевъ, давая n всѣ значенія въ слѣдующихъ интервалахъ:

$$-\infty \underbrace{\dots\dots\dots + 3}_{1} \underbrace{\dots\dots\dots + \frac{24}{7}}_{2} \underbrace{\dots\dots\dots + 4}_{3} \underbrace{\dots\dots\dots + \infty}_{4}.$$

Первый интервалъ. — Давая n значенія въ первомъ интервалѣ, т.-е. меньшія 3, будемъ имѣть: $n - 3 < 0$, $7n - 24 < 0$, $n - 4 < 0$; слѣд. коэффициентъ при x^2 больше 0; подрадикальное количество > 0 , и корни действительные. Неравенству будутъ удовлетворять значенія x , лежащія внѣ корней; нужно, слѣд., сравнить корни. Пишемъ наугадъ неравенство

$$2a [2(n-3) + \sqrt{(n-3)(7n-24)}] - 2a [2(n-3) - \sqrt{(n-3)(7n-24)}] \dots (1)$$

Такъ какъ $(n - 3)(n - 4) > 0$, то можемъ откинуть знаменателя, не измѣняя знака неравенства; затѣмъ, сокращаемъ на 2, откидываемъ отъ обѣихъ частей общіе члены $2a(n - 3)$, сокращаемъ на полож. количество $2\sqrt{(n - 3)(7n - 24)}$ и получимъ такимъ образомъ эквивалентное (1)-му неравенство

$$a > -a \text{ или } 2a > 0.$$

Если $a > 0$, то неравенство, а слѣд. и испытуемое, вѣрно; слѣд. будетъ $x' > x''$. Если же $a < 0$, то и $2a < 0$, а потому въ испытуемомъ неравенствѣ первая часть должна быть меньше второй, т.-е. $x' < x''$. Заключаемъ, что при $a > 0$ неравенству удовлетворяютъ

$$\text{всѣ } x < x'', \text{ а также } x > x';$$

при $a < 0$ ему удовлетворяютъ

$$\text{всѣ } x < x', \text{ а также всѣ } x > x''.$$

Второй интервалъ. Для значеній n , большихъ 3, но меньшихъ $\frac{24}{7}$, будетъ: $n - 3 > 0$, $7n - 24 < 0$, $n - 4 < 0$. Слѣд. $(n - 3)(n - 4) < 0$; подрадикальное количество < 0 , значить, корни мнимые, а потому триномъ будетъ отрицателенъ, и данному неравенству, которое требуетъ, чтобы триномъ былъ положителенъ, удовлетворить нельзя.

Третій интервалъ. Для $\frac{24}{7} < n < 4$ будетъ: $n - 3 > 0$, $7n - 24 > 0$, $n - 4 < 0$; слѣд. коэффициентъ при x^2 отрицателенъ, а корни действительные. Неравенство требуетъ, чтобы триномъ имѣлъ знакъ противоположный коэффициенту при x^2 , а этому требованію удовлетворяютъ всѣ значенія x , лежащія между корнями.

Для сравненія корней пишемъ неравенство (1); умножая обѣ его части на отрицательное количество $(n - 3)(n - 4)$, должны измѣнить знакъ неравенства; откинувъ, затѣмъ, общіе члены и сокративъ на полож. количество $2\sqrt{(n - 3)(7n - 24)}$, найдемъ

$$a < -a, \text{ или } 2a < 0.$$

Если $a > 0$, это неравенство неверно, а потому смысл испытываемого неравенства надо изменить, слѣд. будетъ $x' < x''$. Если $a < 0$, то и $2a < 0$, а поэтому испытываемое неравенство вѣрно; и слѣд. $x > x'$. Заключаемъ, что при $a > 0$, неравенству удовлетворяють все x , большія x' , но меньшія x'' :

$$x'' > x > x';$$

при $a < 0$, значенія x заключаются въ предѣлахъ

$$x' > x > x''.$$

ЧЕТВЕРТЫЙ ИНТЕРВАЛЪ. Когда $n > 4$, то будетъ: $n - 3 > 0$, $7n - 24 > 0$, $n - 4 > 0$; $(n - 3)(n - 4) > 0$, а корни действительные.

Неравенство требуетъ, чтобы тринომъ имѣлъ знакъ перваго коэффициента, что имѣетъ мѣсто для x , лежащихъ внѣ корней.

Сравненіе корней въ этомъ случаѣ покажетъ, что при $a > 0$ будетъ $x > x'$, при $a < 0$ будетъ $x' < x''$. Заключаемъ, что при $a > 0$ данному неравенству удовлетворяють

$$x > x', \quad \text{а также} \quad x < x''.$$

при $a < 0$ ему удовлетворяють

$$x < x' \quad \text{и} \quad x > x''.$$

ПРИМѢРЪ VII. РѢШИТЬ НЕРАВЕНСТВО

$$\frac{x^2 + x - 6}{2a + 1} > x + 6(2a - 1).$$

Общій знаменатель $2a + 1$; но какъ знакъ его неизвѣстенъ, то мы не можемъ, въ видахъ освобожденія неравенства отъ дробей, множить обѣ его части на $2a + 1$, не сдѣлавъ предварительно того или другаго предположенія о знакѣ этого двучлена. Итакъ, нужно разобрать два случая: $2a + 1 > 0$ и $2a + 1 < 0$.

Первый случай: $2a + 1 > 0$, или $a > -\frac{1}{2}$.

Въ такомъ случаѣ, умноживъ обѣ части на $2a + 1$ и не переменяя смысла неравенства, получимъ эквивалентное данному неравенство:

$$x^2 + x - 6 > (2a + 1)x + 6(2a - 1)(2a + 1)$$

или

$$x^2 - 2ax - 24a^2 > 0;$$

корни тринома первой части действительные неравные, именно: $4a$ и $-6a$.

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ имѣлъ знакъ одинаковый съ коэффициентомъ при x^2 , сл. x должно содержаться внѣ корней $-4a$ и $+6a$. Такимъ образомъ, нужно знать, который изъ этихъ корней больше, а это зависитъ отъ знака a . Но a , будучи $> -\frac{1}{2}$, можетъ имѣть значенія отъ $-\frac{1}{2}$ до 0 (отрицательныя), и отъ 0 до $+\infty$ (положительныя). Когда $a < 0$, то очевидно $-4a > 6a$; при $a > 0$, наоборотъ $-4a < 6a$.

Такимъ образомъ

$$a > -\frac{1}{2} \begin{cases} a < 0 & \dots \dots \dots x < 6a, \text{ а также } x > -4a, \\ a > 0 & \dots \dots \dots x < -4a, \text{ а также } x > 6a. \end{cases}$$

Второй случай. $2a + 1 < 0$, или $a < -\frac{1}{2}$.

Умножая обе части неравенства на отрицательное количество $2a + 1$ и изменяя смысл неравенства, придемъ къ слѣдующему неравенству, эквивалентному данному:

$$x^2 - 2ax - 24a^2 < 0.$$

Оно требуетъ, чтобы trinomial первой части имѣлъ знакъ, противоположный коэффициенту при x^2 , а этому требованію удовлетворяютъ значенія x , лежащія между корнями $-4a$ и $+6a$ trinomial.

Такъ какъ a , будучи $< -\frac{1}{2}$, отрицательно, то $-4a > +6a$, и потому значенія x , удовлетворяющія неравенству при

$$a < -\frac{1}{2} \text{ суть } +6a < x < -4a.$$

Примѣчаніе. Можно бы было получить тѣ же результаты, умноживъ обе части предложеннаго неравенства на положительное количество $(2a + 1)^2$.

494. Приложение I. При какихъ условіяхъ 0 будетъ заключаться между корнями уравненія

$$x(x - 1) - p(p - 1) - q(q - 1) - 2pq = 0?$$

Необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки нуля вмѣсто x имѣлъ знакъ, противоположный знаку коэффициента при x^2 , т.-е. чтобы

$$-p(p - 1) - q(q - 1) - 2pq < 0, \text{ или } (p + q)^2 - (p + q) > 0 \text{ или, наконецъ, } (p + q)(p + q - 1) > 0.$$

А этому неравенству можно удовлетворить двояко, полагая: или $p + q > 1$, или $p + q < 0$.

495. Приложение II. Какимъ условіемъ должно удовлетворять количество a для того, чтобы $-\frac{1}{2}$ содержалась между корнями уравненія

$$x(x + 1)(x^2 + 3x + 3) + x^2 = 0.$$

Необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки $-\frac{1}{2}$ вмѣсто x въ первую часть былъ отрицательный, т.-е. чтобы было

$$-\frac{1}{4}(x^2 + 3x + 3) - x^2 < 0, \text{ или } x^2 - x - 1 < 0.$$

Этому неравенству удовлетворимъ, взявъ

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

496. Приложение III. Какимъ условіемъ должны удовлетворять коэффициенты полинома

$$x^4 - Ax^3 + 2Bxy + Ay^3 + 2B'x + 2By + A'$$

для того, чтобы онъ оставался положительнымъ при всякихъ значеніяхъ x и y ?

Первое условіе состоитъ въ томъ, что A должно быть > 0 , ибо при $A < 0$, если корни ур—нія въ x

$$Ax^2 + 2B'xy + A'y^2 + 2B'x - 2By + A' = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

будутъ дѣйствительны, полиномъ z будетъ отрицателенъ при тѣхъ значеніяхъ x , которыя лежатъ внѣ корней, а если мнимы, то z постоянно будетъ отрицателенъ; слѣд. онъ не былъ бы положительенъ при всякомъ x .

Если $A > 0$, то полиномъ z будетъ всегда положителенъ, если корни ур—нія (1), рѣшеннаго относительно x , будутъ мнимыми, что ведетъ къ неравенству:

$$(B''^2 - AA')y^2 + 2(B'B'' - AB)y + B'^2 - AA'' < 0;$$

а этотъ квадратный относительно y триномъ будетъ постоянно отрицателенъ, если

$$B''^2 - AA' < 0 \quad \text{и} \quad (B'B'' - AB)^2 - (B''^2 - AA')(B'^2 - AA'') < 0.$$

Слѣд., искомыя условія таковы:

$$A > 0, \quad B''^2 - AA' < 0 \quad \text{и} \quad (B'B'' - AB)^2 - (B''^2 - AA')(B'^2 - AA'') < 0.$$

497. Приложение IV. Измѣдовать корни ур—нія

$$x^3 - 2\lambda x^2 + \lambda^2 x + 2\lambda - 3 = 0?$$

Ищемъ критическія значенія λ .

1. **Дѣйствительность корней.** Корни будутъ дѣйствительны, если

$$b^2 - ac \geq 0, \quad \text{т.-е.} \quad \lambda^3 - 1(\lambda^3 + 2\lambda - 3) \geq 0$$

или

$$\lambda \leq -\frac{3}{2}.$$

2. **Знаки корней.** Произведеніе корней $= \lambda^2 + 2\lambda - 3$; корни этого тринома дѣйствительны и суть $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, потому произведеніе корней $= (\lambda - 1)(\lambda + 3)$, и сл. будетъ > 0 , если $\lambda > 1$, или $\lambda < -3$; и будетъ < 0 , если $-3 < \lambda < 1$.

Сумма корней $= 2\lambda$, сл. сумма > 0 , если $\lambda > 0$, и сумма < 0 , если $\lambda < 0$. Расположивъ значенія λ въ восходящемъ порядкѣ, имѣемъ скаду:

$$-\infty \quad . \quad . \quad . \quad -3 \quad . \quad . \quad . \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad 1 \quad . \quad . \quad . \quad \frac{3}{2} \quad . \quad . \quad . \quad +\infty.$$

Разсмотримъ теперь каждый изъ четырехъ интервалловъ значеній λ , при которыхъ корни дѣйствительны.

1) $\lambda < -3$. Здѣсь произведеніе корней > 0 , слѣд. знаки ихъ одинаковы; сумма корней < 0 ; сл. оба корни отрицательны.

2) $-3 < \lambda < -1$. Произведеніе корней < 0 ; сл. одинъ корень > 0 ; сумма корней $= -6$; сл. другой корень $= -6$.

3) $-1 < \lambda < 0$. Произведеніе корней > 0 , сл. знаки ихъ различны; сумма ихъ < 0 , сл. большій по абс. зн. корень отрицателенъ.

4) $\lambda = 0$. Знаки противоположны; а какъ сумма $= 0$, то оба корня по абс. значенію равны ($x' = +1/3$, $x'' = -1/3$).

5) $0 < \lambda < 1$. Такъ какъ произв. < 0 , то знаки корней противоположны; сумма > 0 , сл. больший по абс. зн. корень положительнъ.

6) $\lambda = 1$. Произв. корней $= 0$; сл. одинъ корень $= 0$; а какъ сумма > 0 , то другой корень положительнъ.

7) $1 < \lambda < \frac{3}{2}$. Такъ какъ произведение корней > 0 , то знаки корней одинаковы; сумма > 0 ; оба корня положительны.

8) $\lambda = \frac{3}{2}$. Корни равны и положительны.

9) $\lambda > \frac{3}{2}$. Корни мнимые.

Исследование можно резюмировать въ слѣдующей таблицѣ:

$\lambda < -3$:	два отриц. корня.
$\lambda = -3$:	одинъ корень $= 0$; другой $= -6$.
$-3 < \lambda < 0$:	большій по абс. знач. корень отрицателенъ, меньшій полож.
$\lambda = 0$:	равные корни съ против. знаками ($\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$).
$0 < \lambda < 1$:	большій по абс. знач. корень положительнъ, меньшій отрицателенъ.
$\lambda = 1$:	одинъ корень $= 0$, другой положит.
$1 < \lambda < \frac{3}{2}$:	два положит. корня не равныхъ.
$\lambda = \frac{3}{2}$:	два положит. корня равныхъ.
$\lambda > \frac{3}{2}$:	корни мнимые.

498 Приложение V. Исследовать корни уравненія $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x - 7\lambda - 1 = 0$ при измененіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$, и опредѣлить, сколько оно имѣетъ корней въ каждомъ изъ интерваловъ:

отъ $-\infty$ до -1 , отъ -1 до $-1/2$, отъ $-1/2$ до $+\infty$.

Находимъ замѣчательныя значенія λ .

1. **Дѣйствительность корней.** Прежде всего, корни должны быть дѣйствительными; сл. должно быть

$$(\lambda - 2)^2 + (\lambda - 1)(7\lambda + 1) \geq 0 \quad \text{или} \quad 5\lambda^2 - 10\lambda + 3 \geq 0.$$

Такъ какъ реализантъ этого тринома положителенъ, то корни его дѣйствительные и неравные; они равны: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{4}$. Слѣд. триномъ будетъ оста-

вытисл > 0 для всѣхъ λ внѣ корней, т.-е. для λ между $-\infty$ и $-\frac{1}{2}$, и между $+\frac{3}{4}$ и $+\infty$.

2. Знаки корней. Произведение корней $\frac{7\lambda + 1}{1 - \lambda}$ — выраженію, знакъ котораго тотъ же, что и произведенія

$$(7\lambda + 1)(1 - \lambda),$$

и это произведеніе отрицательно для значеній λ , лежащихъ внѣ корней этого выраженія, т.-е. для $\lambda < -\frac{1}{7}$ и для $\lambda > 1$; и положительно для всѣхъ значеній λ , лежащихъ между $-\frac{1}{7}$ и $+1$.

Сумма корней $= \frac{2\lambda - 2}{1}$ — выраженію, знакъ котораго тотъ же, что и произведенія $(\lambda - 2)(\lambda - 1)$, которое будетъ > 0 для всѣхъ λ , лежащихъ внѣ корней, т.-е. для λ , лежащихъ между $-\infty$ и $+\frac{1}{2}$, и между $+\frac{3}{4}$ и $+\infty$; оно < 0 для λ , лежащихъ между корнями, т.-е. для

$$1 < \lambda < 2.$$

3. Ищемъ знакъ подстановокъ -1 и $+1$ вмѣсто x въ первую часть ур—нія. Имѣемъ:

$$f(+1) = \lambda - 1 - 2(\lambda - 2) - 7\lambda - 1 = -8\lambda + 2;$$

отсюда видно, что будетъ $f(+1) > 0$, если $-8\lambda + 2 > 0$, т.-е. если $\lambda < \frac{1}{4}$; и будетъ $f(+1) < 0$, если $-8\lambda + 2 < 0$, т.-е. когда $\lambda > \frac{1}{4}$.

Подстановка -1 дастъ

$$f(-1) = \lambda - 1 - 2(\lambda - 2) - 7\lambda - 1 = -4\lambda - 6,$$

откуда заключаемъ, что при $\lambda < -\frac{3}{2}$ будетъ $f(-1) > 0$; при $\lambda > -\frac{3}{2}$ будетъ $f(-1) < 0$.

4. Затѣмъ, 1-й коэффициентъ $\lambda - 1$; онъ будетъ > 0 при $\lambda > 1$, и будетъ < 0 при $\lambda < 1$.

5. Находимъ корни при $\lambda \pm \infty$; вынося въ данномъ ур—ніи λ за скобки, даемъ ему видъ

$$\lambda \left[\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x^2 - 2\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)x - \left(7 + \frac{1}{\lambda}\right) \right] = 0.$$

Если абсолютное значеніе λ увеличивать неогранич., то необходимо, чтобы выраж. въ квадр. скобк. стремилось къ 0; т.-е. при $\lambda \rightarrow \pm \infty$ x должно удовлетворять ур—нію $x^2 - 2x - 7 = 0$; откуда $x_1 = 1 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

Итакъ, замѣчательныя значенія λ , расположенныя въ восходящемъ порядкѣ, будутъ:

$$-\infty, \quad -\frac{3}{2}, \quad -\frac{1}{7}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1, \quad 2, \quad \text{и} \quad +\infty,$$

которая въ этомъ порядкѣ и наносимъ въ первую горизонтальную строку нижеприведенной таблицы: получимъ скалу возрастающихъ значений λ ; подѣ ними располагаемъ, для каждаго интервала, знаки: реализанта, произведенія корней, ихъ суммы, знаки $f(+1)$, $f(-1)$ и первого коэффициента ур—нія.

Скала значений λ	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	$+\infty$
Реализантъ		+		+	+		+	+	+
Произведение корней.	-	-	+	+			+		-
Сумма корней.	+	+	-	+	-		+	-	+
$f(+1)$	+	+	+	-			-		-
$f(-1)$	+	-	-	-			-	-	-
1-й коэф.	-			-			-		+

Имѣя таблицу знаковъ, легко опредѣлить знаки корней ур—нія для всякаго интервала.

1) $\lambda < -\frac{3}{2}$. Произведеніе корней отрицательно, сл. знаки корней различны; сумма корней положительна, сл. большій по абсол. знач. корень положителенъ. $f(-1)$ и $f(+1)$ положительны, тогда какъ 1-ый коэффициентъ отрицателенъ, сл. -1 и $+1$ находятся между корнями x' и x'' (называя, какъ всегда, x' —меньш. кор., x'' —большій кор.). Итакъ

$$-\infty, x', -1, +1, x'', +\infty.$$

2) $\lambda = -\frac{3}{2}$. Въ этомъ случаѣ $f(-1) = 0$; сл. $x' = -1$; другой корень— между $+1$ и $+\infty$.

3) $-\frac{3}{2} < \lambda < -\frac{1}{7}$. Произведеніе корней отрицательно, а сумма ихъ положительна, сл. знаки корней различны: и большій по абс. велич. корень положителенъ; $f(-1) > 0$, между тѣмъ какъ 1-ый коэф. < 0 , сл. $+1$ — между корнями; затѣмъ, знакъ $f(-1)$ одинаковъ со знакомъ 1-го коэф. сл. -1 вне корней. Расположеніе корней, сл., таково:

$$-\infty \dots -1 \dots x' \dots +1 \dots x'' \dots +\infty.$$

4) $\lambda = -\frac{1}{7}$. Произведеніе корней проходитъ чрезъ 0, сл. одинъ корень $= 0$; расположеніе же корней таково, какъ только что указано.

5) $-\frac{1}{7} < \lambda < \frac{1}{4}$. Произведение и сумма корней положительны, сл. $x' > 0$ и $x'' > 0$. Знакъ $f(+1)$ противоположенъ знаку 1-го коэф., а знакъ $f(-1)$ одинаковъ со знакомъ 1-го коэф., сл. $+1$ между корнями, -1 вѣ корней; расположение корней таково:

$$-\infty \dots -1 \dots x' \dots +1 \dots x'' \dots +\infty.$$

6) $\lambda = \frac{1}{4}$. $f(+1)$ обращается въ 0; сл. одинъ корень $= +1$; другой же находится между $+1$ и $-\infty$, ибо, по предыдущему случаю, онъ больше $+1$.

7) $\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{2}$. Оба корня положительны. $f(+1)$ имѣетъ одинаковый знакъ съ 1-мъ коэф., сл. $+1$ вѣ корней. Сравнимъ ее съ полусуммой корней, которая равна $\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$; не будетъ ли $\frac{\lambda-2}{\lambda-1} > 1$? Такъ какъ $\lambda < 1$, то $\lambda-2 < \lambda-1$, или $-2 < -1$, что вѣрно. Итакъ: $+1$ вѣ корней и меньше вѣ полусуммы, сл. меньше меньшаго корня. Расположение таково:

$$+1 \dots x' \dots x'' \dots +\infty.$$

8) $\lambda = \frac{1}{2}$. Реализантъ обращается въ нуль и корни дѣлаются равными: $x' = x'' = 3$.

9) $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$. Реализантъ дѣлается отрицательнымъ: корни — мнимые.

10) $\lambda = \frac{3}{4}$. Реализантъ снова обращается въ нуль; ур. имѣетъ равные корни: $x' = x'' = 5$.

11) $\frac{3}{4} < \lambda < 1$. Произведение и сумма корней > 0 ; оба корня положительны. $f(+1) < 0$ и 1-ый коэф. < 0 ; сл. $+1$ вѣ корней; сравнимъ ее съ полусуммой корней, положивъ, напр., $\frac{\lambda-2}{\lambda-1} > 1$, откуда $\lambda-2 < \lambda-1$, или $-2 < -1$, что вѣрно, сл. $+1$ меньше меньшаго корня, и потому

$$1 \dots x' \dots x'' \dots +\infty.$$

12) $\lambda = 1$. Коэффициентъ при x^2 обращается въ 0, сл. одинъ корень $= \infty$, другой удовлетворяетъ ур—нію $2x-8=0$, откуда $x=4$.

13) $1 < \lambda < 2$. Произв. и сумма корней отрицательны, сл. знаки ихъ различны и больший по абс. знач. корень отрицателенъ. $f(+1)$ и $f(-1)$ имѣютъ знакъ противоположный 1-му коэф., сл. $+1$ и -1 между корнями. Имѣемъ:

$$-\infty \dots x' \dots -1 \dots +1 \dots x'' \dots +\infty.$$

14) $\lambda = 2$. Сумма корней $= 0$, сл. корни равны и противоположны по знаку: $x = \pm \sqrt{15}$.

15) $\lambda > 2$. Знаки корней противоположны; больший по абс. величинѣ корень положителенъ; -1 и $+1$ между корнями, сл.

$$-\infty \dots x' \dots -1 \dots +1 \dots x'' \dots -\infty.$$

Резюме изслѣдованія.

$\lambda < -\frac{3}{2}$	$-\infty < x' < -1; \quad -1 < x'' < +\infty.$
$\lambda = -\frac{3}{2}$	$x' = -1; \quad +1 < x'' < +\infty.$
$-\frac{3}{2} < \lambda < -\frac{1}{7}$	$1 < x' < +1; \quad +1 < x'' < +\infty.$
$\lambda = -\frac{1}{7}$	$x' = 0; \quad +1 < x'' < +\infty.$
$\frac{1}{7} < \lambda < \frac{1}{4}$	$-1 < x' < +1; \quad +1 < x'' < +\infty.$
$\lambda = \frac{1}{4}$	$x' = 1; \quad +1 < x'' < +\infty.$
$\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{2}$	$+1 < x' \dots x'' < +\infty.$
$\lambda = \frac{1}{2}$	$x' = x'' = 3.$
$\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$	Корни мнимые.
$\lambda = \frac{3}{4}$	$x' = x'' = 5.$
$\frac{3}{4} < \lambda < 1.$	$+1 < x' \dots x'' < +\infty.$
$\lambda = 1.$	Одинъ корень безконеченъ; другой — 4.
$1 < \lambda < 2.$	$-\infty < x' < -1; \quad +1 < x'' < +\infty.$
$\lambda = 2$	$x = +\sqrt{15}.$
$\lambda > 2.$	Тотъ же результатъ, какъ въ 13-мъ случаѣ.

Примѣчаніе.—Когда изслѣдованіе корней, какъ въ только что разсмотрѣнной задачѣ, нѣсколько сложно, полезно предварительно составить таблицу знаковъ: это дастъ возможность почти непосредственно читать въ ней искомые результаты. Планъ изслѣдованія, указанный въ этомъ §, лишь слегка (въ расположении таблички знаковъ) разнится отъ плана, предложеннаго *Туртэнвиллемъ*.

Рациональныя дробныя неравенства.

499. Когда неизвѣстное входитъ въ неравенствѣ въ знаменателя, то мы можемъ уничтожить знаменателя, если онъ представляетъ количество существенно-положительное. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ приводятъ все члены неравенства къ одному знаменателю и собираютъ ихъ въ первую часть. Такимъ образомъ получается неравенство вида

$$\frac{P}{Q} > 0, \quad \text{или} \quad \frac{P}{Q} < 0,$$

гдѣ P и Q суть полиномы, содержащіе x . Замѣчая, что по правилу знаковъ при умноженіи и дѣленіи, произведение количествъ P и Q всегда имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и ихъ частное, можно предыдущія неравенства замѣнить эквивалентными имъ:

$$PQ > 0, \text{ или } PQ < 0.$$

Къ тому же результату мы пришли бы, умножая обѣ части того или другаго неравенства на существенно-положительное количество Q^2 .

Затѣмъ разлагаютъ полиномы P и Q на множители 1-й степени относительно x , и получаютъ неравенство вида:

$$A(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \dots > 0,$$

гдѣ A не содержитъ x . Затѣмъ распредѣляютъ количества $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ въ порядкѣ возрастающихъ величинъ. Пусть, напр., будетъ

$$-\infty < \alpha < \beta < \gamma \dots < +\infty.$$

Очевидно, каждый двучленный множитель будетъ сохранять неизмѣнный знакъ до тѣхъ поръ, пока x , увеличиваясь, не перейдетъ значеніе, обращающее этотъ множитель въ нуль. Такимъ образомъ можно указать знакъ произведенія для всякаго отдѣльнаго интервала, и сл. указать тѣ интервалы, въ которыхъ произведеніе сохраняетъ требуемый неравенствомъ знакъ.

500. *Примѣръ I. Въ какихъ предѣлахъ нужно измѣнять x , чтобы удовлетворить неравенству*

$$\frac{4x^3 - 5x - 1}{2x^2 - 5x + 3} < 1?$$

Перенеся 1 въ первую часть и приведя къ общему знаменателю, получимъ неравенство

$$\frac{2x^3 - 4}{2x^2 - 5x + 3} < 0.$$

Умноживъ обѣ части на существенно-положительное количество $(2x^2 - 5x + 3)^2$, найдемъ неравенство, эквивалентное предложенному:

$$2(x^3 - 2)(2x^2 - 5x + 3) > 0,$$

или, по разложеніи $x^3 - 2$ и $2x^2 - 5x + 3$ (триномовъ, имѣющихъ корни дѣйствительные неравные, и сл. измѣняющихъ знакъ при измѣненіи x) на множители 1-й степени:

$$4(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 1)(x - \frac{3}{2}) > 0.$$

Будемъ давать x значенія въ слѣдующихъ интервалахъ, въ которыхъ величины, обращающія каждый биномъ въ нуль, расположены въ возрастающемъ порядкѣ:

$$\underbrace{-\infty \dots -\sqrt{2}}_1 \underbrace{\dots +1}_2 \underbrace{\dots +\sqrt{2}}_3 \underbrace{\dots +\frac{3}{2}}_4 \underbrace{\dots +\infty}_5.$$

Если давать x значения меньшія ($-\sqrt{2}$), то каждый множитель будет отрицателенъ; а какъ ихъ четное число, то все произведеніе будетъ оставаться положительнымъ.

Если давать x значения, большія ($-\sqrt{2}$), но меньшія -1 , а сл. и по-давно меньшія $\sqrt{2}$ и $\frac{3}{2}$, то множитель $x + \sqrt{2}$ будетъ положителенъ, остальные же биномы отрицательны. и такъ какъ число отрицательныхъ множителей нечетное, все произведеніе будетъ отрицательно.

Давая x значения, большія -1 , но меньшія $+\sqrt{2}$, находимъ, что два множителя: $x + \sqrt{2}$ и $x - 1$ будутъ положительны, а два: $x - \sqrt{2}$ и $x - \frac{3}{2}$ отрицательны; сл. произведеніе положительно. И такъ далѣе.

Убѣдимся, что данному неравенству удовлетворяють значения x , опредѣляемые нижеслѣдующими предѣлами:

$$x < -\sqrt{2}; \quad +1 < x < +\sqrt{2}; \quad x > +\frac{3}{2}.$$

501. Примеръ II. Решить неравенство

$$\frac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x + 1} < 0.$$

Эт. неравенство эквивалентно слѣдующему:

$$(5x^2 - 2x - 3)(x^2 - 3x + 1) < 0.$$

Замѣчая, что для тринома $5x^2 - 2x - 3$ имѣемъ: $1 - 5,3 < 0$, т.е. что корни его мнимые, заключаемъ, что онъ всегда будетъ сохранять знакъ перваго коэффициента, т.е. всегда положителенъ. Поэтому данное неравенство эквивалентно еще слѣдующему простѣйшему:

$$(x - 1)(x^2 - 3x + 1) < 0.$$

или

$$\left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right), (x - 1), \left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) < 0.$$

Даемъ x послѣдовательно значения въ интервалахъ:

$$-\infty \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{1} \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{2} \quad 1 \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{3} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{4} \quad +\infty.$$

Когда $x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, всѣ три множителя, а сл. и произведеніе, будутъ отрицательны. При $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < 1$, первый множитель положителенъ, два другіе отрицательны, сл. произведеніе положительно. При $1 < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, первые два множителя > 0 , третій < 0 , сл. произведеніе < 0 . Наконецъ, при $x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

всѣ множители, а съ ними и произведение > 0 . Итакъ, неравенству удовлетворяютъ:

$$x < \frac{3}{2} \text{ и } 1 < x < \frac{3 + 15}{2}.$$

502. Прияръ III. Решить неравенство

$$\frac{2ax + 3b}{5bx - 4a} < 4.$$

Приведа къ общему знаменателю, имѣемъ

$$\frac{2(a - 10b)x + 3b + 16a}{5bx - 4a} < 0,$$

что эквивалентно неравенству

$$[2(a - 10b)x + 3b + 16a](5bx - 4a) < 0,$$

или, по вынесеніи изъ первыхъ скобокъ $2(a - 10b)$, а изъ вторыхъ $5b$:

$$10(a - 10b)b \cdot x + \frac{3b + 16a}{2(a - 10b)} \cdot x - \frac{4a}{5b} < 0.$$

Относительно коэффициента $10(a - 10b)b$ могутъ быть предположенія

$$b < 0 \begin{cases} a < 10b \\ a > 10b \end{cases}, \quad b > 0 \begin{cases} a < 10b \\ a > 10b \end{cases}.$$

Первый случай: $b < 0$, $a < 10b$.

Произведение $10(a - 10b)b$ положительно; сл. неравенство эквивалентно съ

$$\left(x + \frac{3b + 16a}{2(a - 10b)} \right) \left(x - \frac{4a}{5b} \right) < 0.$$

Триномъ долженъ имѣть знакъ противоположный коэффициенту при x^2 , т. е. x должно заключаться между $-\frac{3b + 16a}{2(a - 10b)}$ и $\frac{4a}{5b}$.

Нужно знать, который изъ этихъ предѣловъ болѣе. Положимъ наугадъ $-\frac{3b + 16a}{2(a - 10b)} < \frac{4a}{5b}$; такъ какъ $10(a - 10b)b > 0$, мы можемъ умножить обе части на это произведение, и не измѣняя смысла неравенства, получимъ ему эквивалентное: $-(3b + 16a)5b > 4a \cdot 2(a - 10b)$, или $-15b^2 - 8a^2 > 0$, что неверно, ибо первая часть существенно отрицательна.

Заключаемъ, что $-\frac{3b + 16a}{2(a - 10b)} > \frac{4a}{5b}$, а потому и нужно взять такъ, чтобы

$$-\frac{3b + 16a}{2(a - 10b)} < x < \frac{4a}{5b}.$$

Второй случай: $b < 0$, $a > 10b$.

Произведение $10(a - 10b)b$ отрицательно, сл. предложенное неравенство эквивалентно неравенству

$$x + \frac{3b + 16a}{2(a - 10b)} \cdot x - \frac{4a}{5b} > 0,$$

а потому x не должно заключаться между корнями тринома: $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}$ и $\frac{4a}{5b}$.
 Посмотримъ, который изъ нихъ больше. Допустивъ, что $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} > \frac{4a}{5b}$ и замѣчая, что $10a-10b)b < 0$, умножаемъ допущенное неравенство на это произведение и переносимъ смыслъ неравенства; найдемъ эквивалентное ему неравенство $-15b^2-8a^2 < 0$, что вѣрно.

Заключаемъ, что предположеніе было правильно, а потому данному неравенству удовлетворяють два ряда значений x :

$$x > -\frac{3b+16a}{2(a-10b)} \quad \text{и} \quad x < \frac{4a}{5b}.$$

Третій случай: $b > 0, a < 10b$.

Проверивъ такимъ же образомъ, найдемъ, что предложенному неравенству удовлетворяють:

$$x > -\frac{3b+16a}{2(a-10b)} \quad \text{и} \quad x < \frac{4a}{5b}.$$

Четвертый случай: $b > 0, a > 10b$.

Вышеуказаннымъ способомъ придемъ къ результату:

$$-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < x < \frac{4a}{5b}.$$

Итакъ, чтобы удовлетворять предложенному неравенству, надо:

При $(a-10b), b > 0$ брать: $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < x < \frac{4a}{5b}$.

При $(a-10b), b < 0$ брать: $x > -\frac{3b+16a}{2(a-10b)}$, или $x < \frac{4a}{5b}$.

Рѣшеніе ирраціональныхъ неравенствъ.

503. Когда неизвѣстное встрѣчается подъ знакомъ квадратнаго корня, то, болѣе говоря, нужно бывасть освободить его изъ-подъ знака корня, а для этого нужно изолировать радикалъ въ ту или другую часть неравенства. Затѣмъ, смотря разсмотрѣть знакъ другой части неравенства, изслѣдуя, остается ли онъ неизмѣннымъ, или же зависить отъ предположеній относительно буквъ, входящихъ въ эту часть. Если знакъ тотъ же одинаковъ со знакомъ, стоящимъ передъ радикаломъ, смыслъ неравенства очевиденъ. Если же — одинаковъ, то нужно возвысить обе части въ квадратъ, сохраняя или перемѣняя смыслъ неравенства, смотря по тому, будетъ ли тотъ общій знакъ $+$ или $-$.

504. Примеръ I. Рѣшить неравенство $\sqrt{(x-1)(x-2)} > x-3$.

Чтобы $\sqrt{(x-1)(x-2)}$ былъ дѣйствителенъ, надо, чтобы подрадикальное количество было > 0 : этому требованію удовлетворяють всѣ x отъ $-\infty$ до 1, и отъ 2 до $+\infty$. Затѣмъ, очевидно, неравенство будетъ удовлетворено всѣми значеніями x , которыя, не содержась между 1 и 2, будутъ меньше 3, ибо въ этомъ случаѣ вторая часть будетъ отрицательна. Итакъ, во-первыхъ, для x можно брать всѣ числа отъ $-\infty$ до $+1$, и отъ $+2$ до $+3$.

Пусть теперь будет $x > 3$: обе части будут положительны, а потому, возвысивъ въ квадратъ и сохранивъ знакъ неравенства, ищемъ числа, удовлетворяющія неравенству

$$x^2 - 3x + 2 > x^2 - 6x + 9, \text{ или } x - \frac{7}{3} > 0.$$

Это неравенство удовлетворяется всѣми значеніями x , большими 3.

Итакъ: предложенному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x отъ $-\infty$ до $+1$ и отъ $+2$ до $+\infty$.

505. Примеръ II. Решить неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{2ax - x^2} > a$, въ которомъ $a > 0$.

Сначала ищемъ, какъ взять x , чтобы оба радикала были действительны, иначе, чтобы подкоренныя количества были положительны. Разсматривая $a^2 - x^2$ какъ неполный квадратный тринომъ, замѣчаемъ, что онъ будетъ положительенъ, если x взять между его корнями, т.-е. если $-a < x < a \dots (1)$. Такимъ же образомъ убѣдимся, что второй радикалъ будетъ действителенъ при $0 < x < 2a \dots (2)$. Изъ сопоставленія (1) со (2), заключаемъ, что оба радикала будутъ действительны, если

$$a > x > 0 \dots (3).$$

Зная это, перенесемъ первый членъ неравенства во вторую часть; найдемъ $\sqrt{2ax - x^2} > a - \sqrt{a^2 - x^2}$. Такъ какъ вторая часть положительна, какъ и первая, то, возведя въ квадратъ и не переменяя смысла неравенства, получимъ эквивалентное данному неравенство: $2ax > 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - x^2} - x^2$, или, раздѣливъ обе части на положительное количество $2a$ и изолировавъ радикалъ: $\sqrt{a^2 - x^2} > a - x$. Въ силу (3), $x < a$, сл. $a - x > 0$, а потому вторичное возникшее въ квадратъ дасть: $x^2 - ax < 0$. По смыслу этого неравенства x должно заключаться между корнями первой части; сл.

$$a > x > 0,$$

что не отличается отъ условія действительности.

506. Примеръ III. Решить неравенство $\frac{x+a}{1+x^2+a^2} > \frac{x+b}{1+x^2+b^2} \quad (1)$, въ которомъ a и b положительны и $a > b$.

Пусть сначала $x+b > 0$, т.-е. $x > -b$. Изъ условія $a > b$ слѣдуетъ, что $x+a > x+b$, а потому и $x+a > 0$. Обе части предложеннаго неравенства положительны, а потому, возвысивъ ихъ въ квадратъ и сохранивъ смыслъ неравенства, получимъ эквивалентное данному неравенство (по отнятіи 1 отъ обѣихъ частей):

$$\frac{2ax}{x^2+a^2} > \frac{2bx}{x^2+b^2} \dots (2)$$

Изъ числа значеній x , большихъ $-b$, возьмемъ сперва положительныя: тогда сокращеніе на положит. количество $2x$ дасть: $\frac{a}{x^2+a^2} > \frac{b}{x^2+b^2}$, или, по освобожденіи отъ дробей, $ax^2 + ab^2 > bx^2 + a^2b$, или $x^2(a-b) > ab(a-b)$. Сокративъ на положительное количество $a-b$, дадимъ этому неравенству видъ $(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab}) > 0$, и какъ первый множитель > 0 , то необходимо, чтобы было

$$x > \sqrt{ab}.$$

Рассмотрим теперь величины x , содержащиеся между 0 и $-\sqrt{ab}$, отрицательныя; въ этомъ случаѣ сокращеніе (2) на $2x$ дастъ: $\frac{a}{x^2} - \frac{b}{x^2} < \frac{b}{x^2}$, или $(x + \sqrt{ab})(x - \sqrt{ab}) < 0$, а какъ второй множитель < 0 , то необходимо, чтобы

$$x > -\sqrt{ab}.$$

Но $a > b$, откуда $ab > b^2$ и $\sqrt{ab} > b$, а сл. $-\sqrt{ab} < -b$; такимъ образомъ условіе $x > -\sqrt{ab}$ содержится въ условіи $x > -b$.

Пусть теперь $x + b < 0$, или $x < -b$, т.е. x содержится между $-b$ и $-\infty$. Дадимъ сначала x значенія между $-b$ и $-a$, т.е. положимъ $x > -a$, откуда $x + a > 0$; въ такомъ случаѣ первая часть предложеннаго неравенства будетъ положительна, между тѣмъ какъ вторая отрицательна, и потому неравенство (1) будетъ удовлетворено всеми значеніями x между $-b$ и $-a$.

Давъ x значенія $< -a$, будемъ имѣть $x + a < 0$; а какъ и $x + b < 0$, обѣ части даннаго неравенства будутъ отрицательны, и потому возводя въ квадраты, должны измѣнить смыслъ неравенства; найдемъ

$$\frac{2ax}{a^2 - x^2} < \frac{2bx}{x^2 - b^2},$$

откуда, сокративъ на $2x < 0$ и т. д., получимъ

$$(x + \sqrt{ab})(x - \sqrt{ab}) > 0;$$

второй множитель для рассматриваемыхъ значеній x отрицателенъ, сл. необходимо, чтобы и $x + \sqrt{ab} < 0$, откуда

$$x < -\sqrt{ab};$$

такъ какъ это условіе удовлетворено само собою, то неравенство (1) удовлетворяется всеми отрицательными величинами x , меньшими $-a$.

Итакъ: предложенному неравенству удовлетворяютъ все отрицательныя значенія x , и положительныя, большія \sqrt{ab} ; и стало-быть неудовлетворяютъ только значенія x содержащіяся между 0 и $+\sqrt{ab}$.

507. Примеръ IV. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3x-a}{x-a}} < a-1,$$

гдѣ a данное действительное количество.

Во-первыхъ $\sqrt{\frac{3x-a}{x-a}}$ долженъ быть действительнымъ; а для этого надо, чтобы было $(3x-a)(x-a) > 0$, т.е. чтобы x не содержалось между $-\frac{a}{3}$ и a . Отсюда видно, что надо различать два случая: $a < 0$ и $a > 0$.

Если $a < 0$, надо брать x такъ, чтобы было: $x < a$, или $x > -\frac{a}{3}$; при $a > 0$ должно брать: или $x > a$, или $x < -\frac{a}{3}$.

Но если $a < 0$, то и $a-1 < 0$, и неравенство становится невозможнымъ, ибо оно будетъ требовать, чтобы положительное количество было меньше отрицательнаго.

Итакъ, необходимо должно положить $a > 0$; затѣмъ необходимо еще, чтобы было $a > 1$; тогда обѣ части будутъ положительны; возвысивъ ихъ въ кубъ, драгъ и сохранивъ смыслъ неравенства, получимъ эквивалентное ему

$$\frac{3x + a}{x - a} < (a - 1)^2, \text{ или } \frac{3x + a - (a - 1)^2(x - a)}{x - a} < 0;$$

а по умноженіи обѣихъ частей на $(x - a)^2$:

$$(x - a)[- (a^2 - 2a - 2)x + (a^2 - 2a + 2)a] < 0,$$

что можно представить въ видѣ

$$(a^2 - 2a - 2)(x - a) \cdot x - \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a > 0.$$

Во-первыхъ, должно быть $a - 1 > 0$; во-вторыхъ, x можно давать только такіе значенія, которыя: или $< -\frac{a}{3}$, или $> a$.

Разсмотримъ, каковъ будетъ знакъ коэффициента $a^2 - 2a - 2$; корни этого тринома, какъ видно изъ формулы, дѣйствительные и неравные, одинъ положительный, другой отрицательный; замѣняя въ триномѣ a единицей, находимъ въ результатѣ -3 , сл. 1 находится между корнями, и слѣд. положит. корень > 1 ; вычленивъ это, находимъ $a_1 = 1 + \sqrt{3}$. Мы можемъ давать a только значенія, большія единицы; но эти значенія могутъ быть или $<$, или $> 1 + \sqrt{3}$.

Такимъ образомъ, различаемъ два случая:

Первый случай: $1 < a < 1 + \sqrt{3}$.

Такіе значенія a лежатъ между корнями тринома $a^2 - 2a - 2$, а потому онъ отрицателенъ; значитъ и произведение двухъ другихъ множителей д. б. отрицательнымъ, а потому величины x , удовлетворяющія неравенству, должны лежать между

$$a \text{ и } -\frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a;$$

нужно знать сравнительную величину этихъ предѣловъ.

Но триномъ $a^2 - 2a - 2$, имѣя корни мнимые, положителенъ при всякомъ a ; $a^2 - 2a - 2$, при взятыхъ значеніяхъ a , отрицателенъ; слѣд.

$$a > -\frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a,$$

и потому должно взять

$$\frac{a^2 - 2a - 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a < x < a.$$

Съ другой стороны, для дѣйствительности радикала, находящагося въ неравенствѣ, x нужно брать или $> a$, или $< -\frac{a}{3}$. Поэтому сравнимъ предѣлы

$$-\frac{a}{3} \text{ и } \frac{a^2 - 2a - 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a.$$

допустивъ, наир., что

$$-\frac{a}{3} > \frac{a^2 - 2a - 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ: $a > 0$ и $a^3 - 2a - 2 < 0$; слѣдъ умноживъ обе части на $\frac{a^3 - 2a - 2}{a}$ и перемѣнивъ смыслъ неравенства, найдемъ ему эквивалентное

$$-a^3 - 2a + 2 < 3a^3 - 6a + 6, \text{ или } 0 < 4a^3 - 8a + 4, \text{ или } 0 < (2a - 2)^2,$$

что вѣрно; слѣд. вѣрно и допущеніе. Такимъ образомъ, необходимо и достаточно взять x такъ:

$$\frac{a^3 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a < x < -\frac{a}{3}.$$

Второй случай. $a > 1 + \sqrt{3}$.

Множитель $a^3 - 2a - 2$ въ этомъ случаѣ > 0 ; сл. необходимо и достаточно, чтобы произведеніе двухъ другихъ множителей было положительно, слѣд. a можетъ принимать все значенія, не содержащіяся между

$$a \text{ и } \frac{a^3 - 2a - 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a.$$

Для сравненія этихъ предѣловъ допустимъ, напр.:

$$\frac{a^3 - 2a - 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a < a.$$

Такъ какъ въ изслѣдуемомъ случаѣ a и $a^3 - 2a - 2$ положительны, заменимъ это неравенство ему эквивалентнымъ

$$a^3 - 2a + 2 < a^3 - 2a - 2, \text{ или } 4 < 0,$$

что не вѣрно; и потому $\frac{a^3 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} a > a$; такъ что должно взять

$$\text{или } x < a, \text{ или } x < \frac{a^3 - 2a - 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a.$$

Комбинируя эти результаты съ предѣлами, найденными въ ргіоні, находимъ

$$x < -\frac{a}{3}, \text{ или } x > \frac{a^3 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a.$$

Итакъ:

при $a < 1$ предложенное неравенство *невозможно*;

при $1 < a < 1 + \sqrt{3}$ ему удовлетворяютъ:

$$\frac{a^3 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} a < x < -\frac{a}{3};$$

или $a > 1 + \sqrt{3}$ ему удовлетворяютъ:

$$\text{или } x < -\frac{a}{3}, \text{ или } x > \frac{a^3 - 2a - 2}{a^2 - 2a - 2} a.$$

508. Примеръ V. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3x-2a}{x+a}} > \sqrt{\frac{3x-a}{x+5a}},$$

где a действительное количество.

Чтобы оба радикала были действительны, нужно, чтобы было $x > \frac{2}{3}a$ и $x > \frac{a}{3}$; но одно изъ этихъ условий содержитъ въ себѣ другое, а именно:

при $a < 0$ необходимо и достаточно, чтобы было $x > \frac{a}{3}$;

при $a > 0$ необходимо и достаточно взять $x > \frac{2}{3}a$.

Первый случай: $a < 0$.

Нужно знать знаки обѣихъ частей, и для этого сдѣлать предположенія относительно знаковъ $x+a$ и $x+5a$.

1) $x+a < 0$, тогда и подавно $x+5a < 0$; обѣ части неравенства отрицательны, а потому, возвысивъ обѣ части въ квадратъ, съ перемѣною смысла неравенства, и умноживъ положительный знаменатель, получимъ:

$$(3x-2a)(x+5a)^2 - (3x-a)(x+a)^2 < 0, \text{ или } 23ax^2 - 54a^2x - 49a^3 < 0,$$

или, сокративъ на $a < 0$:

$$23x^2 + 54ax - 49a^2 > 0.$$

Решимъ первой части, какъ видно à priori, имѣютъ корни дѣйств. неравные съ противоположными знаками; слѣд. чтобы сдѣлать его > 0 , необходимо и достаточно дать x значения, лежащія внѣ корней. Корни его суть

$$x' = -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23}a, \quad x'' = +\frac{\sqrt{1856} - 27}{23}a,$$

и какъ $a < 0$, то очевидно $x' > x''$.

Слѣдовательно, должно взять

$$x < \frac{\sqrt{1856} - 27}{23}a, \quad \text{или} \quad x > -\frac{\sqrt{1856} + 27}{27}a.$$

Но мы видѣли, что x должно быть $> \frac{a}{3}$ и $< -a$. Подставляя въ триномъ $(-a)$ и $\frac{a}{3}$ вмѣсто x , убѣдимся, что эти величины расположены относительно корней x' и x'' такъ:

$$-\infty \dots -\frac{\sqrt{1856} - 27}{23}a \dots \frac{a}{3} \dots (-a) \dots -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23}a \dots +\infty$$

и слѣд. невозможно удовлетворить неравенству, если

$$a < 0 \text{ и } x < -a.$$

2) $-a < x < -5a$, т.е. $x + a$ и $x + 5a$ противоположны по знаку; первая часть неравенства > 0 , вторая < 0 ; и какъ $x > \frac{a}{3}$, *неравенство удовлетворено.*

3) $x + 5a > 0$; и предположимо $x + a > 0$. Обе части неравенства положительны, и потому, возвышая въ квадратъ и сохраняя смыслъ неравенства, найдемъ:

$$23x^2 + 54ax - 49a^2 < 0,$$

и слѣд.

$$\frac{\sqrt{1856} - 27}{23} a < x < -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23} a.$$

Кромѣ того, должно быть: $x > -5a$ и $x > \frac{a}{3}$, что приводится къ $x > -5a$; а какъ порядокъ величинъ таковъ:

$$-\infty \dots \frac{\sqrt{1856} - 27}{23} a \dots \frac{a}{3} \dots -a \dots -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23} a \dots -5a \dots +\infty$$

то очевидно, что неравенству удовлетворить *нельзя.*

Итакъ: когда $a < 0$, чтобы удовлетворить неравенству, надо взять

$$-a < x < -5a.$$

Второй случай: $a > 0$.

Чтобы радикалы были действительными, надо чтобы было: $x > \frac{2}{3}a$. Слѣд. будетъ: $x + a > 0$ и $x + 5a > 0$; а потому, возвысивъ въ квадратъ и сохранивъ смыслъ неравенства, находимъ эквивалентное данному неравенство (по сокращеніи на $a > 0$):

$$23x^2 + 54ax - 49a^2 > 0;$$

откуда заключаемъ, что x нужно взять внѣ интервала корней. А какъ порядокъ величинъ въ данномъ случаѣ таковъ:

$$-\infty \dots -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23} a \dots \frac{2}{3} a \dots \frac{\sqrt{1856} - 27}{23} a \dots +\infty,$$

то: когда $a > 0$, необходимо и достаточно взять

$$x > \frac{\sqrt{1856} - 27}{23} a.$$

ГЛАВА XXXIV.

Рациональные уравнения, приводимыя къ квадратнымъ. Биквадратное уравнение: изслѣдованіе его корней — Разложеніе биквадратнаго тринома на множители первой и второй степени. — Преобразование сложныхъ радикаловъ: $\sqrt{A + B}, \sqrt[3]{A + B}$ и т. п.

509. Рѣшеніе биквадратнаго уравненія. Уравненіе четвертой степени называется биквадратнымъ, когда оно содержитъ только четныя степени неизвѣстнаго. Слѣдовательно, общая форма его есть

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1).$$

Его рѣшеніе приводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, примемъ за неизвѣстное x^2 , положивъ

$$x^2 = y \quad (2).$$

Уравненіе (1) приметъ видъ

$$ay^2 + by + c = 0 \quad (3).$$

Это уравненіе называютъ *разрѣшающимъ* (резольвентомъ) уравненія (1). Рѣшивъ его, найдемъ два корня

$$y' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad y'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Подставляя въ уравненіе (2) вмѣсто y сначала y' , потомъ y'' , находимъ

$$x^2 = y', \quad x^2 = y''$$

откуда

$$x = \pm \sqrt{y'}, \quad x = \pm \sqrt{y''},$$

или

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Итакъ, биквадратное уравненіе имѣетъ четыре корня, попарно равныя и противоположныя по знаку.

510. Изслѣдованіе корней. Мы знаемъ, что корни уравненія $ax^4 + bx^2 + c = 0$ суть корни уравненія

$$x^2 = y,$$

въ которомъ y означаетъ одинъ изъ корней уравненія

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Слѣдовательно: всякому действительному и положительному значенію y соответствуютъ два действительныхъ значенія x , равныя по величинѣ и противоположныя по знаку; каждому действительному и отрицательному значенію y соответствуютъ два значенія x мнимыя сопряженные. наконецъ, каждое мнимое значеніе y даетъ два мнимыхъ значенія для x .

Итакъ, приходимъ къ слѣдующему изслѣдованію:

I. $b^2 - 4ac > 0$. Корни ур—нія $ay^2 + by + c = 0$ дѣйствительные неравные: одного знака, если ихъ произведеніе $\frac{c}{a}$ положительно, и съ противоположными знаками, если $\frac{c}{a}$ отрицательно.

Въ первомъ случаѣ ($\frac{c}{a} > 0$), оба корня положительны, если ихъ сумма $\frac{b}{a}$ положительна, и отрицательны, если $\frac{b}{a}$ отрицательно. Если оба значенія y положительны, то четыре значенія x дѣйствительны; если оба значенія y отрицательны: то четыре значенія x мнимы. Во второмъ случаѣ ($\frac{c}{a} < 0$) два значенія y положительны по знаку, поэтому два значенія x дѣйствительны, два другихъ — мнимы. Въ третьемъ случаѣ, когда $c = 0$, одинъ корень резольвента нуль, другой — $-\frac{b}{a}$; $x^2 = 0$, $x^2 = -\frac{b}{a}$. Первое даетъ $x' = x'' = 0$; второе даетъ $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}}$, два корня дѣйств., если $\frac{b}{a} < 0$, два мним., если $\frac{b}{a} > 0$.

II. $b^2 - 4ac = 0$. Корни уравненія $ay^2 + by + c = 0$ дѣйствительные равные: ихъ произведеніе $= -\frac{c}{a}$.

Слѣд. квадратное ур. имѣетъ четыре корня, попарно равные:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}};$$

они действительны, если $\frac{b}{a} < 0$, и мнимы, если $\frac{b}{a} > 0$.

III. $b^2 - 4ac < 0$. Если $b = 0$, то условіе $b^2 - 4ac = 0$ ведетъ къ $c = 0$; ур. въ x будетъ $ax^4 = 0$, т.е. ур. имѣетъ 4 корня равныхъ нулю.

III. $b^2 - 4ac < 0$. Корни ур—нія $ay^2 + by + c = 0$ мнимые, слѣд. и всѣ четыре корня биквадратнаго ур—нія мнимые, ибо квадратный корень изъ $p + qi$ есть мнимое выраженіе того же вида.

Результаты этого изслѣдованія можно резюмировать въ видѣ слѣдующей таблицы:

$b^2 - 4ac$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{a} < 0 \\ \frac{b}{a} = 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{array} \right\}$	$\frac{b}{a} < 0$. . . 4 корня дѣйствительные, попарно равные и противоположные по знаку.
			$\frac{b}{a} > 0$. . . 4 корня мнимые.
			$\frac{c}{a} = 0$. . . 2 корня дѣйствительные, равные и противоположные по знаку; 2 корня мнимые.
			$\frac{c}{a} < 0$. . . $x_1 = x_2 = 0$; $x_3^2 = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}}$ [дѣйств., если $\frac{b}{a} < 0$; мнимые, если $\frac{b}{a} > 0$].

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \begin{cases} \frac{b}{a} < 0 & \dots 4 \text{ корня действительные, попарно равные} \\ & x_1 = x_2 = +\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \quad x_3 = x_4 = -\sqrt{-\frac{b}{2a}} \\ \frac{b}{a} > 0 & \dots 4 \text{ корня мнимые.} \\ \frac{b}{a} = 0 & \dots x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0. \end{cases}$$

$$b^2 - 4ac < 0 \dots \dots \dots 4 \text{ корня мнимые.}$$

Примѣчаніе. Отсюда видно, что нужны три условія для того, чтобы всѣ четыре корня биквадратнаго ур—нія были действительны; именно:

$$b^2 - 4ac \geq 0, \quad \frac{c}{a} > 0, \quad \frac{b}{a} < 0;$$

и одно условіе, чтобы два корня были действительны, а два мнимы; именно:

$$\frac{c}{a} < 0.$$

511. Примеры: I. Решить уравненіе $64x^4 - 244x^2 + 225 = 0$.

Положивъ $x^2 = y$, находимъ квадратное ур—ніе

$$64y^2 - 244y + 225 = 0;$$

въ немъ: $b^2 - ac = 122^2 - 64 \times 225 = 484 > 0$; $\frac{225}{64} > 0$; $\frac{244}{64} < 0$; слѣд. оба значенія y действительны, неравныя и положительныя, а потому биквадратное ур—ніе имѣетъ всѣ четыре корня действительные. Находимъ:

$$y = \frac{122 \pm \sqrt{122^2 - 64 \times 225}}{64} = \frac{122 \pm 22}{64};$$

$$y' = \frac{9}{4}, \quad y'' = \frac{25}{16}.$$

откуда:

$$x_1 = +\frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}, \quad x_3 = +\frac{5}{4}, \quad x_4 = -\frac{5}{4}.$$

II. Решить уравненіе $5x^4 + 12x^2 + 4 = 0$.

Положивъ $x^2 = y$, находимъ ур—ніе $5y^2 + 12y + 4 = 0$; въ немъ

$$b^2 - ac = 36 - 5 \times 4 = 16 > 0;$$

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} > 0; \quad \frac{b}{a} = \frac{12}{5} > 0.$$

Слѣд. корни его действительные, неравные, оба отрицательные; а потому данное ур—ніе имѣетъ всѣ четыре корня мнимые. Находимъ

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{5} = \frac{-6 \pm 4}{5};$$

$$y' = -\frac{2}{5}, \quad y'' = -2.$$

Слѣдовательно

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot i, \quad x_2 = +\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot i, \quad x_3 = +1 \cdot 2 \cdot i, \quad x_4 = -\sqrt{2} \cdot i.$$

III. Решить уравнение $3x^4 - 26x^2 - 9 = 0$.

Положивъ $x^2 = y$, напомнимъ ур—ніе $3y^2 - 26y - 9 = 0$. Въ немъ:

$$b^2 - ac = 13^2 + 3 \cdot 9 = 169 + 27 = 196 > 0;$$

$$\frac{c}{a} = -3 < 0; \quad \frac{b}{a} = -\frac{26}{3} < 0;$$

слѣд. оно имѣетъ корни дѣйствительные неравные, съ противоположными знаками, а потому предложенное ур—ніе имѣетъ два дѣйствительныхъ корня и два мнимыхъ.

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{196}}{3} = \frac{13 \pm 14}{3};$$

откуда

$$y' = +9; \quad y'' = -\frac{1}{3};$$

слѣдовательно

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot i; \quad x_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot i.$$

IV. Решить уравнение $x^4 - 10x^2 - 61 = 0$.

Положивъ $x^2 = y$, получимъ ур—ніе $y^2 - 10y - 61 = 0$, въ которомъ $b^2 - ac = 25 - 61 = -36$; слѣд. оба значенія y мнимы, и потому данное ур—ніе имѣетъ четыре мнимыхъ корня. Находимъ

$$y' = 5 + 12i, \quad y'' = 5 - 12i.$$

Слѣдовательно

$$x = \pm \sqrt{5 + 12i}.$$

Преобразовавъ это выраженіе по способу § 417, найдемъ:

$$x_1 = 3 + 2i, \quad x_2 = 3 - 2i, \quad x_3 = -3 - 2i, \quad x_4 = -3 + 2i.$$

V. Решить уравнение $x^4 - 10x^2 - 25 = 0$.

Положивъ $x^2 = y$, вѣдемъ ур—ніе $y^2 - 10y - 25 = 0$, въ которомъ

$$b^2 - ac = 25 - 25 = -3 < 0;$$

слѣд. корни его мнимы, именно

$$y = 5 \pm \sqrt{3} \cdot i.$$

Слѣд. четыре мнимые корни предложеннаго заключаются въ формулѣ

$$x = \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{3} \cdot i}.$$

Примѣняя къ ней преобразованіе, указанное въ § 417, найдемъ:

$$\pm \sqrt{5 \pm \sqrt{3} \cdot i} = \pm \left[\sqrt{\frac{21}{2} + 5} \pm \sqrt{\frac{21}{2} - 5} \cdot i \right].$$

Такимъ образомъ:

$$x_1 = \sqrt{\frac{217-5}{2}} + \sqrt{\frac{217-5}{2}} \times i; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{217-5}{2}} - \sqrt{\frac{217-5}{2}} \times i;$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{217+5}{2}} - \sqrt{\frac{217+5}{2}} \times i; \quad x_4 = -\sqrt{\frac{217+5}{2}} + \sqrt{\frac{217+5}{2}} \times i.$$

512. Приложение. — Доказать, что уравненіе $\frac{x^2}{x^2-a^2} + \frac{x^2}{x^2-b^2} = 1$ имѣетъ въ себѣ четыре корня дѣйствительные, каковы бы ни были дѣйствительныя количества a и b .

Помноживъ обѣ части на $(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)$, дадимъ уравненію цѣлый видъ

$$x^2(x^2 - b^2) + x^2(x^2 - a^2) - 4(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) = 0.$$

Положивъ $x^2 = y$, получаемъ квадратное относительно y уравненіе

$$y(y - b^2) + y(y - a^2) - 4(y - a^2)(y - b^2) = 0.$$

Подставляя въ первую часть вмѣсто y сперва a^2 , потомъ b^2 , замѣчаемъ, что результаты этихъ подстановокъ: $a^2(a^2 - b^2)$ и $b^2(b^2 - a^2)$ имѣютъ противоположные знаки; слѣд. корни относительно y дѣйствительны и неравны, и одинъ изъ нихъ содержится между a^2 и b^2 . Далѣе: коэффициентъ при y^2 отрицателенъ ($= -2$); подстановка же 0 на мѣсто y даетъ $-4a^2b^2$; слѣд. 0 находится вѣхъ корней, и слѣд. меньше обоихъ корней, ибо мы уже знаемъ, что одинъ изъ корней положителенъ. Итакъ, оба корня: y' и y'' дѣйствительны и положительны, каковы бы ни были a и b , а слѣд. всѣ четыре корня данного уравненія дѣйствительны.

Къ этому заключенію можно придти и иначе. Уравненіе относительно y приводится къ виду:

$$2y^2 - 3(a^2 + b^2)y + 4a^2b^2 = 0.$$

Подрадикальное количество формулы корней есть

$$9(a^2 - b^2)^2 - 32a^2b^2, \text{ или } 9a^4 - 14a^2b^2 + 9b^4.$$

Но этотъ квадратный относительно a^2 тринომъ имѣетъ корни мнимые, ибо $49b^4 - 81b^2 < 0$, слѣд. при всякихъ a и b знакъ его одинаковъ со знакомъ 9, т. е. положителенъ. Поэтому оба значенія y дѣйствительны. Изъ проведеніе $2a^2b^2$ показываетъ, что они одного знака, а сумма ихъ $\frac{3}{2}(a^2 + b^2)$ показываетъ, что оба они положительны. Слѣд. четыре корня предложеннаго уравненія всегда дѣйствительны.

513. Теорема. Сумма корней биквадратнаго уравненія равна нулю, произведеніе ихъ равно $\frac{c}{a}$, а сумма квадратовъ ихъ равна $-\frac{2b}{a}$.

Въ самомъ дѣлѣ, четыре корня x_1, x_2, x_3, x_4 попарно равны и противоположны по знаку, слѣд. сумма ихъ = 0. Вторыхъ, $(+\sqrt{y'})^2 + (-\sqrt{y'})^2 + (+\sqrt{y''})^2 + (-\sqrt{y''})^2 = 2(y' + y'')$; но $y' + y''$, какъ сумма корней

квадр. ур-нія $ay^2 + by + c = 0$, равна $-\frac{b}{a}$, слѣд. сумма квадратовъ корней данного ур-нія $= -\frac{2b}{a}$. Наконецъ, произведение $(+\sqrt{y})(-\sqrt{y})(+\sqrt{y})(-\sqrt{y}) = -y'y'' = \frac{c}{a}$.

514. Разложеніе бинвадратнаго тринома $ax^4 + bx^2 + c$ на множители первой степени.

Триномъ $ax^4 + bx^2 + c$, обращаясь въ нуль при каждомъ изъ четырехъ своихъ корней x_1, x_2, x_3, x_4 , дѣлится на каждый изъ биномовъ $x - x_1, x - x_2, x - x_3, x - x_4$, а потому и на ихъ произведеніе; такъ какъ дѣлитель—одинаковой степени относительно x , то частное будетъ нулевой степени, и потому приводится къ частному отъ раздѣленія высшаго члена, ax^4 , дѣляимаго на высшій членъ x^4 дѣлителя. Итакъ:

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Примѣры.—1. Разложить триномъ $5x^4 - 50x^2 + 45$.

Корни его суть: $\pm 3, \pm 1$; слѣд.

$$5x^4 - 50x^2 + 45 = 5(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1).$$

II. Разложить триномъ $2x^4 - 7x^2 + 6$.

Корни его суть: $\pm \sqrt{2} \cdot i, \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i$. Слѣд.

$$2x^4 - 7x^2 + 6 = 2(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{\frac{3}{2}}i)(x + \sqrt{\frac{3}{2}}i).$$

III. Разложить триномъ $x^4 - 10x^2 + 169$.

Корни его суть: $3 \pm 2i, -3 \pm 2i$. Слѣд.

$$x^4 - 10x^2 + 169 = (x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i)(x + 3 - 2i)(x + 3 + 2i).$$

515 Разложеніе бинвадратнаго тринома съ дѣйствительными коэффиціентами на дѣйствительные квадратные множители.

Пусть триномъ $ax^4 + bx^2 + c$ имѣетъ корни $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$; въ такомъ случаѣ его можно представить подъ видами:

$$ax^4 + bx^2 + c = a[(x - \alpha)(x + \alpha)][(x - \beta)(x + \beta)] \dots (1)$$

$$= a[(x - \alpha)(x + \beta)][(x - \beta)(x + \alpha)] \dots (2)$$

$$= a[(x - \alpha)(x + \beta)][(x - \alpha)(x + \beta)] \dots (3)$$

Когда четыре корня $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$ дѣйствительны, всѣ три разложенія дадутъ дѣйствительные квадратные множители.

* Если два изъ этихъ корней мнимы, то квадратные множители будутъ дѣйствительны только въ одномъ изъ этихъ разложеній, именно въ томъ, гдѣ для составленія одного и того же множителя соединены два сопряженные корни.

Наконецъ, если четыре корни мнимы, то опять существуетъ только одно разложеніе на дѣйствительные квадратные множители, то именно, въ которомъ каждый изъ квадратныхъ множителей происходитъ отъ сочетанія сопряженныхъ корней. Отсюда

ТЕОРЕМА. Биквадратный тринომъ съ действительными коэффициентами всегда можно разложить, по крайней мѣрѣ, однимъ способомъ, на произведение действительныхъ квадратныхъ множителей.

Чтобы получить это разложение, нужно вычислить корни тринома; это вычисленіе усложняется вспомогательнымъ вычисленіемъ въ томъ случаѣ, когда всѣ четыре корня мнимы, т. е. когда $b^2 - 4ac < 0$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ значительно быстрее найдемъ требуемое разложение слѣдующимъ приемомъ. Пусть имѣемъ триномъ

$$y = a \left(x^4 + \frac{b}{a} x^2 + \frac{c}{a} \right),$$

въ которомъ предполагается $b^2 - 4ac < 0$. Разсматривая x^4 и $\frac{c}{a}$ какъ крайніе члены квадрата, дополнимъ его, прибавляя и вычитая $2x^2 \sqrt{\frac{c}{a}}$; найдемъ

$$y = a \left[\left(x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}} \right)^2 - \left(2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a} \right) x^2 \right].$$

Но какъ $b^2 - 4ac < 0$, то $4ac > 0$, слѣд. и $\frac{c}{a} > 0$, а потому $\sqrt{\frac{c}{a}}$ — количество действительное. Далѣе, раздѣливъ обѣ части неравенства $b^2 - 4ac < 0$ на положительное количество a^2 , находимъ

$$4\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2} > 0, \text{ или } \left(2\sqrt{\frac{c}{a}} + \frac{b}{a} \right) \left(2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a} \right) > 0.$$

Но оба эти множителя не могутъ быть отрицательными, ибо ихъ сумма, равная $4\sqrt{\frac{c}{a}}$, положительна, слѣд. оба они положительны, и потому

$$2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a} > 0.$$

Итакъ, триномъ можно представить въ видѣ произведенія двухъ действительныхъ факторовъ:

$$y = a \left[x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}} + x \sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}} \right] \left[x^2 - \sqrt{\frac{c}{a}} + x \sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}} \right].$$

Примѣръ. Разложить на два действительные множителя триномъ $y = x^4 - 10x^2 + 28$.

Имѣемъ,

$$\begin{aligned} y &= (x^2 + 2\sqrt{7})^2 - (4\sqrt{7} + 10)x^2 \\ &= (x^2 - x\sqrt{4\sqrt{7} - 10} - 2\sqrt{7})(x^2 - x\sqrt{4\sqrt{7} + 10} - 2\sqrt{7}). \end{aligned}$$

516. Преобразование сложнаго радикала $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Корни биквадратнаго уравненія выражаются формулою вида $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$; и когда В не есть точный квадратъ, т. е. \sqrt{B} несоизмѣримъ, формула эта весьма невыгодна для при-

ближайшаго вычисленія. Попробуемъ, если окажется возможно, замѣнить выраженіе этого вида другимъ, которое не содержало бы извлеченія корня изъ несоизмѣрнаго числа. Но предварительно докажемъ слѣдующую лемму.

517. Лемма. Если a , b , a' и b' суть числа соизмѣримыя, а \sqrt{b} и $\sqrt{b'}$ несоизмѣримы, то равенство

$$a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'} \quad . \quad . \quad (1)$$

возможно только тогда, когда $a = a'$ и $b = b'$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$ выводимъ

$$\sqrt{b'} = (a - a') + \sqrt{b},$$

или, возвышая обѣ части въ квадратъ:

$$b' = (a - a')^2 + 2(a - a')\sqrt{b} + b,$$

или

$$b' - b = (a - a')^2 + 2(a - a')\sqrt{b}.$$

Если бы $a \neq a'$, то мы нашли бы отсюда нелѣпый выводъ:

$$\sqrt{b} = \frac{b' - b - (a - a')^2}{2(a - a')},$$

т. е. несоизмѣрное число равно соизмѣримому. И такъ $a = a'$, а тогда 1) слѣдуетъ, что $b = b'$.

2) Если бы не было такъ, то можно было бы найти такіе два соизмѣримыя числа x и y , которые удовлетворяли бы равенству

$$A + \sqrt{B} = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \quad . \quad . \quad (1)$$

Гдѣ A и B положительныя соизмѣримыя числа, а \sqrt{B} несоизмѣримо. Возвысивъ обѣ части въ квадратъ, найдемъ

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy} \quad . \quad . \quad (2)$$

Число \sqrt{xy} должно быть несоизмѣримо; въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное и написавъ ур—ніе (2) въ видѣ

$$\sqrt{B} = x + y - A + 2\sqrt{xy},$$

мы бы, что несоизмѣрное число равно соизмѣримому. Принятія къ ур—нію (2) предыдущую лемму, находимъ:

$$x + y = A \quad \text{и} \quad xy = \frac{B}{4};$$

т. е. — единственно возможное условіе существованія равенства (2) при x и y

соизмѣримыхъ. Последнія уравненія показываютъ, что x и y суть корни квадратнаго уравненія

$$u^2 - Au + \frac{B}{4} = 0,$$

откуда

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}, \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}, \quad \dots (3)$$

Видимъ, что преобразование $\sqrt{A - \sqrt{B}}$ въ выраженіе $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, гдѣ x и y были бы соизмѣримы, возможно только тогда, когда $A^2 - B$ есть точный квадратъ; дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, положивъ $A^2 - B = K^2$, гдѣ K — соизмѣримо, имѣемъ:

$$x = \frac{A + K}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{A - K}{2}.$$

И такъ, если это условіе выполнено, искомое преобразование возможно и выражается тождествомъ

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \dots (4)$$

и это — единственно возможная форма преобразованія въ рассматриваемомъ случаѣ, ибо уравненіе (2) разлагается на два уравненія съ 2 неизвестными, вследствие чего и получились опредѣленные рѣшенія для x и y .

Желая подобнымъ же образомъ преобразовать $\sqrt{A + \sqrt{B}}$, не можемъ положить $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ибо это повело бы къ нелѣпому слѣдствію:

$$-\sqrt{B} = 2\sqrt{xy};$$

но можно положить равенство

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

откуда, подобно предыдущему, найдемъ:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Но если бы мы искали два количества x и y , удовлетворяющія уравненію

$$\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y},$$

не дѣлая ограниченія относительно соизмѣримости x и y , то задача, очевидно, была бы неопредѣлена. Возвышая обѣ части въ квадратъ, мы палили бы уравненіе

$$A \pm \sqrt{B} = x \pm y \pm 2\sqrt{xy},$$

которому можно удовлетворить, полагая

$$x \mp y = A, \quad xy = \frac{B}{4},$$

откуда найдем бы прежнюю форму преобразования

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}, \dots (1)$$

но можно бы было удовлетворить уравнению и иначе; что дало бы другая значения для x и y ; решение (1) было бы одним изъ безчисленного множества решений неопределеннаго уравнения $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x \pm \sqrt{y}}$.

518. Примѣчаніе. Опредѣляя x и y , удовлетворяющія уравнению

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}, \dots (1)$$

мы должны были возвысить это ур. въ квадратъ и рѣшать уравненіе

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy} \dots (2).$$

Но уравненіе (2) могло бы получиться и изъ уравненія

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{x} - \sqrt{y};$$

такъ что нужно удостовѣриться, что найденныя значенія для x и y действительно удовлетворяютъ преобразованію $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$.

И въ самомъ дѣлѣ, преобразованіе $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ не можетъ имѣть мѣста для тѣхъ тѣхъ же x и y ; слѣд. тождество (4) § 517 въ самомъ дѣлѣ удовлетворяетъ вѣдѣмому преобразованію.

Примѣры.—I. Преобразовать $\sqrt{6 \pm \sqrt{11}}$.

Здѣсь $A = 6$, $B = 11$; слѣд. $A^2 - B = 25 = 5^2$; а потому

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{11}} = \sqrt{\frac{6 \pm 5}{2}} \pm \sqrt{\frac{6 \mp 5}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\sqrt{11} \pm 1),$$

$$\sqrt{6 - \sqrt{11}} = \frac{1}{2} (\sqrt{11} - 1).$$

II. Преобразовать $\sqrt{17 \pm 2\sqrt{70}}$.

Въ данномъ случаѣ $A = 17$; подводя 2 подъ знакъ корня, имѣемъ $2\sqrt{70} = \sqrt{4 \cdot 70} = \sqrt{280}$, слѣд. $B = 280$; $A^2 - B = 17^2 - 280 = 9 = 3^2$. Такимъ образомъ:

$$\sqrt{17 \pm 2\sqrt{70}} = \sqrt{\frac{17 \pm 3}{2}} \pm \sqrt{\frac{17 \mp 3}{2}} = \sqrt{10} \pm \sqrt{7};$$

$$\sqrt{17 - 2\sqrt{70}} = \sqrt{10} - \sqrt{7}.$$

III. Преобразовать $\sqrt{a^2 \pm \frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{2}m^4}$.

Это выражение можно представить въ видѣ $\sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \frac{a^4}{4} - m^4}$.

Здѣсь $A = \frac{a^2}{2}$, $B = \frac{a^4}{4} - m^4$, $A^2 - B = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} - m^4 = -m^4$; слѣд.

$$\sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{2} - 4m^4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2} \pm m^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2} - m^2} = \frac{1}{2} [\sqrt{a^2 + 2m^2} \pm \sqrt{a^2 - 2m^2}].$$

519. Приложенія. - I. Определить условія, которымъ должны удовлетворять коэффициенты биквадратнаго уравненія $ax^4 + bx^2 + c = 0$, для того чтобы его корни можно было выразить въ видѣ алгебраической суммы двухъ простыхъ радикаловъ.

Корни биквадратнаго уравненія можно представить въ видѣ

$$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}},$$

слѣд. $A = -\frac{b}{2a}$, $B = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, и слѣд. $A^2 - B = \frac{4ac}{4a^2} - \frac{c}{a}$.

Заключаемъ, что когда $\frac{c}{a}$ есть точный квадратъ, преобразование возможно, и получается формула

$$x = \pm \left[\sqrt{-\frac{b}{4a} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}}} \pm \sqrt{-\frac{b}{4a} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}}} \right]$$

Пусть, наприм., дано уравненіе $18x^4 - 45x^2 + 2 = 0$. Здѣсь $\frac{c}{a} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$, указанное условіе имѣть мѣсто, и слѣд. корни можно представить въ видѣ

$$x = \pm \left[\sqrt{\frac{45}{72} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{9}}} \pm \sqrt{\frac{45}{72} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{9}}} \right] = \pm \left[\sqrt{\frac{45}{72} + \frac{1}{6}} \pm \sqrt{\frac{45}{72} - \frac{1}{6}} \right] \\ = \pm \frac{1}{6} \sqrt{57 \pm 33} = \pm \frac{1}{12} (\sqrt{57} \pm \sqrt{33}).$$

Еще примѣръ. Въ уравненіи $ay^4 + 2(a - 2b)y^2 - a = 0$ отношеніе 3-го коэффициента къ 1-му, равное $\frac{a}{a}$ или 1, есть точный квадратъ, и слѣд. корни можно преобразовать въ сумму простыхъ радикаловъ; преобразование дастъ

$$y = \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{b - a}.$$

II. Въ геометріи доказывается, что если a означаетъ сторону правильнаго, вписаннаго въ кругъ радіуса R , многоугольника, а b —сторону прав. впис. многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ, то

$$b = \sqrt{2R^2 - \sqrt{R^2(4R^2 - a^2)}}.$$

Это выражение можно превратить въ сумму простыхъ радикаловъ: въ самомъ дѣлѣ, $A = 2R^2$, $B = R^2(4R^2 - a^2)$, слѣд. $A^2 - B = a^2R^2$, и потому

$$b = \sqrt{\frac{2R^2 + aR}{2}} - \sqrt{\frac{2R^2 - aR}{2}} = \sqrt{R(R + \frac{a}{2})} - \sqrt{R(R - \frac{a}{2})}.$$

Пусть, наприм., $a = R$; первый многоугольникъ будетъ правильный шестиугольникъ, второй—правильный двѣнадцатигульникъ; получимъ

$$b = R \sqrt{\frac{3}{2}} - R \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}.$$

520. Въ заключеніе этой главы рѣшимъ еще три вопроса, относящіеся къ преобразованію квадратнаго и биквадратнаго корней.

Первый вопросъ. *Представить* $\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d}}}}$ *въ форму* $\sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{z}}}$.

Положивъ $\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d}}}} = \sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{z}}}$, и возвысивъ въ квадратъ, имѣемъ

$$a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d}}} = x + \sqrt{y + \sqrt{z}} \quad 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} = 2\sqrt{yz}.$$

Если удастся найти соизмѣримыя числа x , y , z , удовлетворяющія ур—нію

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{b}, \quad 2\sqrt{xz} = \sqrt{c}, \quad 2\sqrt{yz} = \sqrt{d}, \quad \dots (1)$$

и если, вмѣстѣ съ тѣмъ, найденныя значения x , y , z , удовлетворяютъ ур—нію $x + \sqrt{y + \sqrt{z}} = a$, . . . (2), то указанное преобразованіе выполнимо.

Слѣд., соотношеніе между a , b , c , d , при которомъ искомое преобразованіе возможно, мы найдемъ, исключивъ x , y и z изъ ур—ній (1) и (2)

Ур—нія (1) даютъ:

$$xy = \frac{b}{4}, \quad xz = \frac{c}{4}, \quad yz = \frac{d}{4},$$

перемножая и извлекая квадратный корень, имѣемъ:

$$xyz = \frac{\sqrt{bcd}}{8},$$

откуда дѣленіемъ находимъ:

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{bc}{d}}, \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{bd}{c}}, \quad z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{cd}{b}};$$

подставивъ во (2), найдемъ:

$$\sqrt{\frac{bc}{d}} + \sqrt{\frac{bd}{c}} + \sqrt{\frac{cd}{b}} = 2a;$$

таково искомое соотношеніе.

Пусть, напр., нужно найти

$$\sqrt{16 + 2\sqrt{20 + 2\sqrt{28 + 2\sqrt{35}}}}.$$

Приравнявъ это $\sqrt{x-1} \sqrt{y-1} z$ и возвысивъ въ квадратъ, имѣемъ

$$16 - 2\sqrt{20} - 2\sqrt{25} - 2\sqrt{35} = x - y - z + 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{xz} - 2\sqrt{yz}.$$

Положивъ

$$\sqrt{xy} = \sqrt{35}, \quad \sqrt{xz} = \sqrt{20}, \quad \sqrt{yz} = \sqrt{25},$$

имѣемъ

$$xyz = 140, \text{ слѣд. } \sqrt{xyz} = 2\sqrt{35};$$

откуда

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{5}; \quad \sqrt{y-1} = \sqrt{7}; \quad \sqrt{z} = 2.$$

Эти значенія x, y, z удовлетворяютъ уравненію $x+y+z=16$; слѣд. искомый корень $= \sqrt{5} + \sqrt{7} - 2$.

Второй вопросъ. *Представить выражение*

$$\sqrt{a-1} \sqrt{b-1} \sqrt{c-1} \sqrt{d}$$

въ видѣ произведенія двухъ сомножителей вида $\sqrt{x+1} \sqrt{y-1}$. Доказать, что преобразование возможно только при условіи, когда $a^2d = bc$, и что оно возможно только тогда, когда $a^2 = b$ и $a^2 = c$ суть точные квадраты.

Въ самомъ дѣлѣ, равенство

$$\sqrt{a-1} \sqrt{b-1} \sqrt{c-1} \sqrt{d} = (\sqrt{x+1} \sqrt{y-1}) (\sqrt{u+1} \sqrt{v-1}),$$

по возвышенію въ квадратъ, даетъ

$$a-1 \sqrt{b-1} \sqrt{c-1} \sqrt{d} = (x+1)(y-1)(u+1)(v-1).$$

Этому уравненію удовлетворяютъ, положивъ

$$a = (x+1)(u+1)v; \quad b = 4(x+y)^2uv; \quad c = 4(u+v)^2xy; \quad d = 16xyuv.$$

Эти уравненія, какъ легко видѣть, несовѣстны, если не ищется соотношенія $a^2d = bc$. Когда это условіе удовлетворено, система неопредѣленна. Эта неопредѣленность объясняется при помощи тождества

$$(\sqrt{x+1} \sqrt{y-1}) (\sqrt{u+1} \sqrt{v-1}) = (\sqrt{x+1} \sqrt{y-1}) \left(\sqrt{\frac{u}{x}+1} \sqrt{\frac{v}{y}-1} \right),$$

имѣющаго мѣсто при всякомъ x ; этимъ доказывается, что разложеніе можетъ быть произведено безчисленнымъ количествомъ способовъ. Неопредѣленность эта даетъ возможность допустить между двумя количествами произвольное соотношеніе. Положимъ, напр., $x = y = 1$. Тогда первыя два уравненія обратятся въ

$$u+1 = a, \quad uv = \frac{b}{4},$$

откуда

$$u = \frac{a-1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b}; \quad v = \frac{a-1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b}.$$

Внося эти величины въ третье, имѣемъ xy ; зная, кромѣ того, что $x + y = 1$, найдемъ

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} \sqrt{a^2 - c}; \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} \sqrt{a^2 - c}.$$

Изъ этихъ формулъ видно, что если $a^2 - b$ и $a^2 - c$ будутъ точные квадраты, то u , v , x и y будутъ рациональны, и слѣд., преобразование выгодно, ибо оно представляетъ произведение двухъ множителей, изъ которыхъ каждый есть сумма простыхъ радикаловъ.

Такъ, если $U = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} \sqrt{3 + \frac{2}{3}} \sqrt{2 + \frac{1}{3}} \sqrt{6}$, то $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{8}{9}$.

$d = \frac{6}{9}$; условіе $a^2 d = bc$ удовлетворено; $a^2 - b = \frac{1}{4}$, $a^2 - c = \frac{1}{9}$.

Слѣд. $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$; $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; $u = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$;

$$v = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Итакъ

$$U = \frac{(1 + \frac{1}{2})(3 + \frac{2}{3})}{4}.$$

Третій вопросъ. Полагая, что B не есть точный квадратъ, представить

$$U = \sqrt{A} \sqrt{B},$$

подъ знакомъ суммы двухъ квадратныхъ корней: $\sqrt{r + y} \sqrt{y}$. Указать условия, необходимыя и достаточныя для того, чтобы преобразование было выгодно, что можетъ имѣть мѣсто въ двухъ различныхъ случаяхъ: когда x и y имѣютъ видъ $z + \sqrt{z}$; когда эти количества сопряжены.

Положивъ

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{r + y} \sqrt{y},$$

и возвысивъ въ четвертую степень, получимъ

$$A + \sqrt{B} = (r + y)^2 + 4ry + 4(r - y)\sqrt{xy},$$

откуда

$$(x + y)^2 + 4ry = A, \quad 16ry(r + y)^2 = B.$$

Отсюда видно, что $(x + y)^2$ и $4ry$ суть корни уравненія

$$t^2 - At + \frac{B}{4} = 0;$$

и какъ разность $(x + y)^2 - 4xy = (r - y)^2$, т.-е. существенно положительна, такъ какъ x и y предполагаются действительными, мы должны больший корень уравненія въ t принять за $(x + y)^2$, меньшій за $4xy$. Такимъ образомъ

$$(x + y)^2 = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}, \quad 4xy = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2};$$

или, вычитая второй результатъ изъ перваго

$$(x - y)^2 = A^2 - B.$$

Не трудно теперь найти x и y .

Чтобы разсматриваемое преобразование было выгодно, нужно, чтобы x или y не содержали биквадратныхъ радикаловъ, слѣд. необходимо, чтобы $A^2 - B = K^2$, гдѣ K —число рациональное. Тогда

$$(x + y)^2 = A + K, \quad (x - y)^2 = K.$$

Въ этомъ случаѣ x и y имѣютъ, вообще, видъ суммы двухъ простыхъ радикаловъ. Но если одно изъ чиселъ, $\frac{A+K}{2}$ или K , будетъ точнымъ квадратомъ, выраженіе представится въ видѣ суммы двухъ квадратныхъ корней изъ выраженій вида $\alpha + \beta$. Если, наконецъ, оба числа: $\frac{A+K}{2}$ и K — точные квадраты, выраженіе приметъ видъ двухъ простыхъ радикаловъ.

Примѣры. I. $U = \sqrt[4]{6} + \sqrt{20}$; найдемъ: $A = 6$, $K = 4$; слѣд.

$$(x + y)^2 = 5; \quad (x - y)^2 = 4.$$

Потому

$$U = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}.$$

II. $U = \sqrt[4]{7} + \sqrt{45}$; найдемъ: $A = 7$; $K = 1$; слѣд.

$$(x + y)^2 = 4; \quad (x - y)^2 = 1.$$

Отсюда

$$U = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

ГЛАВА XXXV.

Рациональныя уравненія, приводимыя къ квадратнымъ: продолженіе — Возвратныя уравненія. — Двучленные уравненія. Трехчленные уравненія. — Уравненія вида $P.Q.R=0$ и нѣкоторые другія.

Возвратныя уравненія четвертой степени.

521. Опредѣленія. Уравненіе называется *возвратнымъ перваго рода*, если обратная величина каждаго корня уравненія служитъ также корнемъ этого уравненія.

Уравненіе называется *возвратнымъ втораго рода*, если обратная величина каждаго корня, взятая съ противоположнымъ знакомъ, удовлетворяетъ также уравненію.

522. Лемма. Если два целыя уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, t -й степени, приведенныя къ виду $A=0$, имѣютъ t различныхъ общихъ корней, то коэффициенты ихъ пропорціональны.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть два уравненія

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= 0 \dots (1) \\ a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e' &= 0 \end{aligned}$$

имѣютъ 4 общихъ корня, т.-е. первыя части ихъ обращаются въ нуль при 4-хъ различныхъ значеніяхъ x ; тогда и многочленъ

$$a(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) - a'(a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e')$$

обратится въ нуль при тѣхъ же значеніяхъ x ; но этотъ многочленъ,

$$(ba' - ab')x^3 + (ca' - ac')x^2 + (da' - ad')x + (ea' - ae'),$$

есть многочленъ третьей степени относительно x ; слѣд. (§ 65, II) онъ тождественно равенъ нулю; а потому всѣ его коэффициенты равны нулю. Отсюда

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'}.$$

523. Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы уравненіе было возвратнымъ перваго рода.

Составимъ уравненіе, котораго корни были бы обратны корнямъ даннаго. Достаточно вмѣсто x подставить $\frac{1}{x}$. Сдѣлавъ подстановку и привеи къ цѣлѣму виду, получимъ

$$ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \dots (2).$$

Если (1) есть возвратное перваго рода, то (2) будетъ имѣть тѣ же корни. Въ самомъ дѣлѣ, если корни перваго будутъ $\alpha, \frac{1}{\alpha}, \beta, \frac{1}{\beta}$, то корни 2-го будутъ $\frac{1}{\alpha}, \alpha, \frac{1}{\beta}, \beta$. Оба уравненія имѣютъ общіе корни, слѣдоват., на основаніи леммы § 522, имѣютъ

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = 1 = \frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$$

откуда

$$a = e, \quad b = d,$$

т.-е. коэффициенты членовъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ, равны и имѣютъ одинаковые знаки. Итакъ, возвратное уравненіе четвертой степени перваго рода имѣетъ видъ

$$ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm bx + a = 0.$$

Примѣчаніе I. Если средній коэффициентъ разсматриваемаго уравненія равенъ 0, $c = 0$, то уравненія

$$ax^4 + bx^3 + dx + e = 0 \quad \text{и} \quad ex^4 + dx^3 + bx + a = 0$$

дадутъ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{d}{b} = \frac{c}{a};$$

отсюда:

$$a = +c \text{ и } b = +d, \text{ или } a = -c \text{ и } b = -d;$$

ур—ніе будетъ въ первомъ случаѣ

$$ax^4 - bx^3 - bx - a = 0,$$

во второмъ

$$ax^4 - bx^3 - bx - a = 0.$$

Легко видѣть непосредственно, что ур—нія эти возвратныя. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ первое на x^2 и положивъ $x + \frac{1}{x} = z$, найдемъ два ур—нія

$$x^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{bx^2 - 2ax^2 + b}{2a} x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{bx^2 - 2ax^2 + b}{2a} x + 1 = 0;$$

въ каждомъ произведеніе корней равно 1, слѣдоват. въ каждомъ одинъ корень обратенъ другому.

Написавъ второе въ видѣ

$$(x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0,$$

замѣчаемъ, что каждый изъ корней $+1$ и -1 равенъ своему обратному; въ уравненіи $ax^2 + bx + a = 0$ произведеніе корней равно 1, слѣд., корни его также обратны одинъ другому.

Примѣчаніе II. Такимъ же образомъ найдемъ, что ур. третьей степени возвратное перваго рода есть

$$ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0 \dots (1)$$

причемъ верхній знакъ берется съ верхнимъ, нижній съ нижнимъ.

524. Чтобы рѣшить уравненіе $ax^4 - bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, раздѣлимъ обѣ части на x^2 (на это имѣемъ право, ибо ур—ніе не имѣетъ корня, равнаго нулю, слѣд. x^2 не обращается въ нуль); найдемъ, сгруппировавъ члены, равно удаленные отъ концовъ:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Положивъ $x + \frac{1}{x} = y$, имѣемъ отсюда: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$; подставляя, найдемъ

$$ay^2 + by + (c - 2a) = 0 \dots (2)$$

Отсюда найдемъ два значенія для y : y' и y'' . Подставляя поочередно эти значенія въ ур—ніе $x + \frac{1}{x} = y$, которое можно написать въ видѣ

$$x^2 - yx + 1 = 0 \dots (3)$$

найдёмъ всѣ четыре значенія x . Такимъ образомъ рѣшеніе ур—вія (1) сводится къ рѣшенію системы (2) и (3).

525. Ислѣдованіе. Чтобы величины x , выводимыя изъ (3), были действительны, необходимо, во-первыхъ, чтобы коэффициенты этого ур—вія были действительны, т.-е. чтобы y было действительно; затѣмъ необходимо, чтобы рассматриваемое значеніе y удовлетворяло условію

$$y^2 - 4 \geq 0,$$

т.-е. чтобы y находился въ интервала отъ -2 до $+2$, иначе, чтобы абсолютная величина y была больше 2. Очевидно, что этихъ условій достаточно.

526. Примеръ. 1. Решить ур—віе $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$.

Напишемъ его въ видѣ

$$2x^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 11 = 0.$$

Положивъ $x - \frac{1}{x} = y$, получимъ ур—віе $2y^2 - y - 15 = 0$, откуда

$$y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 120} = -3.$$

Внося эти величины въ $x - \frac{1}{x} = y$, получимъ ур—вія

$$x^2 - \frac{1}{x} - 1 = 0, \quad x^2 - 3x - 1 = 0;$$

откуда:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Легко удостовѣриться, что $x_1 \cdot x_2 = 1$.

II. Исследовать корни уравненія $x^4 + 2x^3 + (\lambda + 1)x^2 + 2x + 1 = 0$ **при измененіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$.**

Вышеуказаннымъ приемомъ приводимъ рѣшеніе этого ур—вія къ рѣшенію системы

$$x^2 - yx - 1 = 0 \quad \dots (1), \quad y^2 - 2y + (\lambda + 1) = 0 \quad \dots (2).$$

Чтобы корни (1) были действительны, необходимо, во-первыхъ, чтобы y было действительно, и затѣмъ, чтобы

$$y^2 - 4 \geq 0.$$

Каждое значеніе y , удовлетворяющее этимъ двумъ условіямъ, дастъ действительныя значенія для x .

Ур. (2) дастъ слѣдующее условіе действительности y :

$$\lambda^2 - \lambda + 1 \geq 0,$$

условіе, всегда существующее, ибо ур. $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ имѣетъ корни мнимые.

Второе условие: $y^2 - 4 > 0$ означает, что y не должно содержаться между -2 и $+2$, т.е. должно быть или < -2 , или $> +2$. Подстановка (-2) вм. y въ первую часть ур—нія (2) даетъ

$$3(-\lambda + 1);$$

подстановка $(+2)$ даетъ

$$5\left(\lambda + \frac{3}{5}\right);$$

разсмотримъ скалу значеній λ , содержащую значенія, обращающія эти биномы въ нуль:

$$\underbrace{-\infty \dots -\frac{3}{5}}_1 \dots \underbrace{-1 \dots -\frac{1}{5}}_2 \dots \underbrace{+\infty}_3$$

Если λ давать величинамъ въ интервалѣ (1), то результатъ подстановки (-2) оказывается > 0 ; слѣд. -2 находится внѣ корней ур. (2); но полусумма корней, равная $-\lambda$, положительна; слѣд. оба корня больше (-2) . Результатъ подстановки $(+2)$ отрицателенъ, сл. $+2$ содержится между корнями ур—нія (2). Итакъ, для значеній λ , лежащихъ въ (1) области, расположеніе корней y' и y'' (полагая $y < y''$) и числа -2 и $+2$ таково:

$$\dots -2 \dots y' \dots +2 \dots y'' \dots$$

Итакъ: одинъ корень (y'') даетъ два дѣйствительныя значенія для x ; другой (y')—два мнимыя значенія.

Для λ , содержащихся въ (2) области, результаты подстановокъ (-2) и $(+2)$ положительны, сл. (-2) и $(+2)$ лежатъ внѣ корней; при этомъ полусумма корней, равная $-\lambda$, больше -2 , но меньше $+2$; сл. расположеніе корней и числа -2 и $+2$ таково:

$$\dots -2 \dots y' \dots y'' \dots -2;$$

закключаемъ, что 4 значенія x мнимы.

Для λ , содержащихся въ (3) области, результатъ подстановки (-2) отрицателенъ; слѣд. (-2) содержится между корнями ур. (2); результатъ подстановки $(+2)$ положителенъ; слѣд. $+2$, находясь внѣ корней, больше y'' . Такимъ образомъ, одинъ корень (y) даетъ два дѣйств. значенія x , другой (y'')—два мнимыя значенія x .

527. Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы уравненіе было возвратнымъ втораго рода.

• Пусть дано ур—ніе четвертой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \dots (1)$$

Составимъ ур—ніе, корни котораго были бы обратны корнямъ (1) и имѣли противоположные имъ знаки; достаточно вм. x подставить $y = -\frac{1}{x}$; сдѣлавъ подстановку и приведя къ цѣлому виду, получимъ ур—ніе.

$$ex^4 - dx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \dots (2)$$

Если (1) есть возвратное 2-го рода, то (2) будет имѣть тѣ же корни. Въ самомъ дѣлѣ, пусть корни (1) суть α , $-\frac{1}{\alpha}$, β , $-\frac{1}{\beta}$, то корни (2)-го будутъ

$$-\frac{1}{\alpha}, \alpha, -\frac{1}{\beta}, \beta;$$

слѣд. оба ур—нія имѣютъ одинаковые корни, а потому

$$\frac{a}{c} = -\frac{b}{d} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

откуда

$$a = c, \quad b = -d.$$

§ 527. Общая форма возвратнаго ур—нія четвертой степени второго рода.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + a = 0.$$

Примечаніе I. Если бы средній членъ равнялся нулю, то ур. было бы возвратнымъ 2-го рода въ двухъ слѣдующихъ случаяхъ:

$$ax^4 + bx^2 + a = 0,$$

или: $ax^4 + bx^2 + a = 0$, знакъ надо брать съ верхнимъ, нижнимъ съ нижнимъ.

Въ первомъ случаѣ видъ $ax^4 + bx^2 + a = 0$, его можно написать

$$a(x^2 + 1) + bx(x^2 + 1) = 0$$

$$(x^2 + 1)[a + bx] = 0,$$

т. е. ясно, что оно имѣетъ два мнимыхъ корня: i и $-i$.

Примечаніе II. По предыдущему легко убѣдиться, что уравненіе не возвратнаго 2-го рода имѣетъ корни съ действительными коэффициентами не м. б. возвратнымъ второго рода.

528 Чтобы рѣшить уравненіе $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + a = 0$, раздѣлимъ на x^2 и напишемъ его въ видѣ:

$$a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0, \quad \dots (1);$$

положимъ $x + \frac{1}{x} = y$, имеемъ: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$; подстановка въ (1) дастъ

$$ay^2 + by + (c + 2a) = 0. \quad \dots (2)$$

Отсюда найдемъ два значенія y . Подставляя каждое въ ур. $x + \frac{1}{x} = y$, которое можно представить въ видѣ

$$x^2 - yx + 1 = 0. \quad \dots (3),$$

найдемъ четыре корня предложеннаго ур—нія.

Исследование. Если корни уравнения (2) будут действительны, то и все четыре корня данного будут действительны, потому что корни (3) будут действительны. Итак, условие действительности всех четырех корней данного уравнения выражается неравенством

$$b^2 - 4a(c + 2a) \geq 0.$$

Примеръ. — Решить уравнение $x^4 + 2ix^3 - 3(\lambda + 1)x^2 - 2ix - 1 = 0$.

Это есть возвратное уравнение 2-го рода. Разделивъ его на x^2 и положивъ $x - \frac{1}{x} = y$, или, что то же,

$$x^2 - yx - 1 = 0,$$

решаемъ уравнение

$$y^2 - 2iy - (3\lambda - 1) = 0.$$

Условие действительности всех корней предложеннаго будетъ

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 \geq 0,$$

откуда заключаемъ, что λ не должно содержаться между

$$-\frac{\sqrt{5}+3}{2} \text{ и } \frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

Двучленные уравнения.

529. Двучленнымъ уравненіемъ называется уравнение вида

$$ax^m + b = 0.$$

Разделивъ обе части на a и положивъ $-\frac{b}{a} = A$, можемъ представить это уравнение въ видѣ

$$x^m - A = 0, \text{ или } x^m = A.$$

Решить это уравнение значитъ найти такое количество x , m -ая степень котораго равнялась бы A ; иначе говоря, значитъ: найти все значенія корня m -го порядка изъ A .

530. ТЕОРЕМА. Решение уравненія $x^m - A = 0$ приводится къ решению уравненія $y^m + 1 = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть α будетъ арифметическій корень m -го порядка изъ A , если $A > 0$, и изъ $(-A)$, если $A < 0$. Уравненіе $x^m = A$ приметъ одинъ изъ видовъ: $x^m = \alpha^m$, $x^m = -\alpha^m$. Положивъ $x = \alpha y$ и подставивъ это выраженіе въ каждое изъ послѣднихъ уравненій, по сокращеніи на α^m , найдемъ

$$y^m = 1, \text{ или } y^m = -1.$$

Такимъ образомъ, чтобы рѣшить ур—ніе $x''' - A = 0$, нужно: 1) найти абсолютное значеніе $\sqrt[3]{A}$, равное a ; 2) найти всѣ корни y , y' , y'' , . . . ур—нія $y''' - 1 = 0$; 3) каждый изъ нихъ помножить на a .

531. Переходимъ къ рѣшенію ур—нія $y''' \pm 1 = 0$: элементарная алгебра дастъ средства рѣшать это ур—ніе лишь въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

I. $m = 2$; ур—нія суть: $y^2 - 1 = 0$; $y^2 + 1 = 0$.

Рѣшеніе ихъ извѣстно; корни перваго суть: $y' = +1$, $y'' = -1$; корни втораго: $y' = +i$, $y'' = -i$.

II. $m = 3$; ур—нія: $y^2 - 1 = 0$; $y^2 + 1 = 0$.

Первое ур—ніе можно представить въ видѣ: $(y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$ оно распадается на два: $y - 1 = 0$, $y^2 + y + 1 = 0$.

Первое имѣетъ корень $+1$; второе — два корня $-\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; такъ что три корня данного ур—нія суть:

$$y' = +1; \quad y'' = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \quad y''' = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Это значитъ, что *кубическій корень изъ $+1$ имѣетъ три значенія: одно действительное и два мнимыхъ.*

Легко видѣть, что *каждый изъ мнимыхъ корней изъ $+1$ равенъ квадрату другого.* Въ самомъ дѣлѣ, называя эти корни черезъ α и β , и замѣчая, что они удовлетворяютъ уравненію $y^2 + y + 1 = 0$, находимъ: $\alpha^2 = -1$; по $\alpha^2 = -1$, слѣд. $\alpha\beta = \alpha^2$, или $\beta = \alpha^2$. Слѣд., если α есть одинъ изъ мнимыхъ значеній корней изъ 1, то три корня будутъ: α , α^2 , α^3 .

Можно и примыкая возвышеніемъ въ квадратъ убѣдиться, что $y' = y''^2$ и $y'' = y'^2$.

Примѣръ. — Рѣшить ур—ніе $x^3 - 343 = 0$.

По доказанному, надо арифметическое значеніе $\sqrt[3]{343}$, т.-е. 7, помножить на каждыя изъ трехъ значеній кубическаго корня изъ $+1$. Найдёмъ:

$$x' = +7; \quad x'' = 7 \times \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \quad x''' = 7 \times \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Переходимъ къ рѣшенію ур—нія $y^2 - 1 = 0$. Его можно представить въ видѣ $(y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$, а это уравненіе распадается на два: $y - 1 = 0$ и $y^2 + y + 1 = 0$.

Первое имѣетъ корень $= -1$; второе — два корня: $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; такъ что три корня данного суть:

$$y' = -1; \quad y'' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \quad y''' = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Эти корни и представляютъ три значенія кубическаго корня изъ -1 .

Примѣръ.—Рѣшить ур—ніе $x^3 + 8 = 0$.

Корни его найдемъ, помноживъ арифметическое значеніе $\sqrt[3]{8}$ или 2 на каждый изъ кубическихъ корней изъ -1 ; слѣд.

$$r_1 = 2; \quad r_2 = 1 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot i; \quad r_3 = 1 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot i.$$

III. $m = 4$; уравненія: $y^4 - 1 = 0$; $y^4 + 1 = 0$.

Уравненіе $y^4 - 1 = 0$ можно представить въ видѣ $(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$; оно распадается на два ур—нія: $y^2 - 1 = 0$ и $y^2 + 1 = 0$. Первое имѣетъ корни: $+1$ и -1 , второе: $+i$ и $-i$; такъ что ур—ніе $y^4 - 1 = 0$ имѣетъ четыре корни:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = i, \quad y_4 = -i.$$

Чтобы рѣшить ур—ніе $y^4 + 1 = 0$, дополнимъ первую часть его до полного квадрата, прибавивъ къ ней и вычтя $2y^2$; найдемъ:

$$y^4 - 2y^2 + 1 - 2y^2 = 0, \quad \text{или} \quad (y^2 - 1)^2 - (\sqrt{2} \cdot y)^2 = 0, \quad \text{или} \\ (y^2 - \sqrt{2} \cdot y - 1)(y^2 - \sqrt{2} \cdot y + 1) = 0.$$

Это ур—ніе распадается на два квадратныя: $y^2 - \sqrt{2} \cdot y - 1 = 0$ и $y^2 - \sqrt{2} \cdot y + 1 = 0$. Рѣшивъ ихъ, найдемъ 4 корни:

$$\begin{aligned} y_1 & \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \\ 2 \end{array} (1 \pm i), \quad y_3 & \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \\ 2 \end{array} (-1 \pm i). \end{aligned}$$

Уравненіе $y^4 + 1 = 0$ можно рѣшить иначе, рассматривая его какъ возвратное, въ которомъ коэффициенты трехъ среднихъ членовъ равны нулю. Раздѣливъ его на y^2 , имѣемъ $y^2 + \frac{1}{y^2} = 0$; положивъ $y = \frac{1}{y} = z$, имѣемъ отсюда: $z^2 + \frac{1}{z^2} = 0$; слѣд. $z^2 = 2$ и $z' = \sqrt{2}$ и $z'' = -\sqrt{2}$.

Подставляя поочередно оба значенія z въ ур—ніе $y = \frac{1}{y} = z$, получаемъ два ур—нія $y^2 - \sqrt{2} \cdot y - 1 = 0$ и $y^2 - \sqrt{2} \cdot y + 1 = 0$, которыя рѣшены выше.

Примѣръ I.—Уравненіе $x^4 - 81 = 0$ имѣетъ 4 корня, которые найдемъ, умноживъ арифметическое значеніе $\sqrt[4]{81}$, т.е. 3, на четыре значенія корня четвертаго порядка изъ $+1$; именно

$$x_1 = +3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = +3i, \quad x_4 = -3i.$$

Примѣръ II.—Ур—ніе $x^4 + 16 = 0$ имѣетъ четыре мнимыхъ корня, которые найдемъ, умноживъ четыре значенія корня 4-го порядка изъ -1 на арифм. значеніе $\sqrt[4]{16}$, т.е. на 2. Получимъ:

$$x_1 = \sqrt{2}(1+i), \quad x_2 = \sqrt{2}(1-i), \quad x_3 = \sqrt{2}(-1+i), \quad x_4 = \sqrt{2}(-1-i).$$

$$IV. m = 5; \text{ ур—нія: } x^5 - 1 = 0 \text{ и } x^5 + 1 = 0$$

Первое ур—ние можно представить въ видѣ: $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$; оно распадается на два ур—нія

$$x-1=0 \dots (1) \text{ и } x^4+x^3+x^2+x+1=0 \dots (2)$$

изъ которыхъ первое даетъ $x_1 = +1$. Второе же есть *возвратное ур. первую рода*, ибо коэффициенты членовъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ, равны; слѣд. рѣшеніе его приводится къ рѣшенію системы двухъ уравненій:

$$x^2 - yx + 1 = 0 \text{ и } y^2 + y - 1 = 0.$$

Корни ур—нія въ y дѣйствительные, неравные и противоположны по знаку; необходимо и достаточно, чтобы эти корни не заключались между -2 и $+2$, чтобы корни ур—нія (2) были дѣйствительны. Но $2^2 + 2 - 1 > 0$, слѣд. положительны корни содержатся между 0 и $+2$. Точно такъ же $(-2)^2 + (-2) - 1 > 0$, слѣд. отрицательный корень содержится между 0 и (-2) . Слѣд. все четыре корня ур—нія (2) мнимы. Для нахождения ихъ рѣшимъ сначала ур. въ y ; оно даетъ

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Подставивъ въ ур. (2) эти двѣ вѣтви, получимъ

$$x^2 + 1 \cdot x - 1 = 0$$

подставляя сюда вмѣсто y сперва $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, а потомъ $-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, получимъ еще четыре корня, такъ что все пять корней ур—нія $x^5 - 1 = 0$ суть:

$$x_1 = 1;$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}; \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4};$$

$$x_4 = \frac{1 - \sqrt{5} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}; \quad x_5 = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Чтобы рѣшить ур. $x^5 + 1 = 0$, разлагаемъ первую часть на множители и получаемъ уравненіе $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) = 0$, распадающееся на два ур—нія: $x+1=0$ и $x^4-x^3+x^2-x+1=0$, рѣшеніе которыхъ аналогично вышеуказанному. Впрочемъ, легко показать, что корни ур—нія $x^5+1=0$ отличаются отъ корней ур—нія $x^5-1=0$ только знаками; въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ данномъ ур—ніи $x = -x'$, получимъ ур—ніе $x'^5 - 1 = 0$, тождественное съ рѣшеннымъ, слѣд. для x' выдемъ 5 вышезаписанныхъ формулъ; а какъ $x = -x'$, то переимѣнивъ въ этихъ формулахъ знаки, имеемъ пять корней ур—нія $x^5+1=0$. Это замѣчаніе относится ко всемъ двучленнымъ ур—ніямъ $x^m - 1 = 0$ и $x^m + 1 = 0$, въ которыхъ m нечетно.

$$V. m = 6; \text{ ур—нія: } x^6 - 1 = 0 \text{ и } x^6 + 1 = 0.$$

Первое ур. можно представить въ видѣ $(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$; сл. оно разлагается на два кубических ур—нія: $x^3 - 1 = 0$ и $x^3 + 1 = 0$, рѣшенія которыхъ уже известны, такъ что $x^6 - 1 = 0$ имѣетъ шесть корней:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \quad x_4 = -1; \quad x_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}; \\ x_6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравнение $x^6 + 1 = 0$ можно представить въ видѣ $(x^2)^3 + 1 = 0$, г.-е $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 0$; оно распадается на два: квадратное ур. $x^2 + 1 = 0$ и биквадратное $x^4 - x^2 + 1 = 0$, рѣшеніе которыхъ известно.

VI. $m = 7$. Уравненія $x^7 \pm 1 = 0$ неразрѣшимы средствами элементарной алгебры.

VII. $m = 8$; ур—нія $x^8 - 1 = 0$ и $x^8 + 1 = 0$.

Первое можно написать въ видѣ $(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$; оно распадается на два: $x^4 - 1 = 0$ и $x^4 + 1 = 0$, корни которыхъ уже найдены въ пунктѣ III.

Ур—ние $x^8 + 1 = 0$ можно написать въ видѣ $(x^4 + 1)^2 - 2x^4 = 0$ или $(x^4 + \sqrt{2} - x^2 + 1)(x^4 - \sqrt{2} - x^2 + 1) = 0$; оно распадается на два биквадратныхъ ур—нія: $x^4 - \sqrt{2} - x^2 + 1 = 0$ и $x^4 + \sqrt{2} - x^2 + 1 = 0$, рѣшеніе которыхъ известно.

Подобнымъ образомъ могли бы рѣшить элементарно еще нѣкоторые двучленные ур—нія.

На частныхъ примѣрахъ мы видѣли, что число значеній корня, или рѣшеній двучленного ур—нія всегда оказывается равно показателю корня или степени ур—нія. Общее доказательство этой истины дано въ главлѣ XXIX, § 429.

Трехчленные уравненія.

532. Всякое трехчленное уравненіе

$$ax^p + bx^q + cx^r = 0$$

можетъ быть рѣшено посредствомъ уравненія второй степени и уравненій двучленныхъ въ случаѣ, если показатели p, q, r связаны соотношеніемъ $p - q = q - r$, т.-е. образуютъ непрерывную арифметическую прогрессию.

Въ самомъ дѣлѣ, если $q - r = m$, то $q = m + r$, $p - q = m - 2m + r$, и уравненіе будетъ $ax^{2m+r} + bx^{m+r} + cx^r = 0$, или, по вынесеніи x^r :

$$x^r[ax^{2m} + bx^m + c] = 0.$$

Отсюда видно, что оно имѣетъ, во-первыхъ, r корней, равныхъ нулю, а затѣмъ удовлетворяется всѣми корнями уравненія

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0.$$

Рѣшеніе послѣдняго приводится къ рѣшенію *квадратнаго* уравненія и столько же *двучленныхъ*, сколько корней имѣетъ квадратное.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $x''' = y$, и слѣд. $r^{2m} = y^2$, получаемъ ур—ніе

$$ay^2 + by + c = 0,$$

имѣющее два корня: $y = y'$ и $y = y''$; подставляя эти значенія y въ ур—ніе $r^{2m} = y$, получаемъ два двучленныхъ ур—нія

$$x^m = y' \quad \text{и} \quad x^m = y'',$$

изъ коихъ каждое имѣетъ m корней, такъ что предложенное ур—ніе имѣетъ $2m$ корней.

Очевидно, биквадратное ур. есть частный случай трехчленного.

Примѣръ. — Решить ур—ніе $1000r^6 - 6119r^3 + 9261 = 0$.

Положивъ $r^3 = y$, имѣемъ ур. $1000y^2 - 6119y + 9261 = 0$, откуда

$$y = \frac{6119 \pm \sqrt{37442161 - 37044000}}{2000} = \frac{6119 \pm 631}{2000};$$

слѣд.

$$y' = \frac{6750}{2000} = \frac{27}{8}; \quad y'' = \frac{5488}{2000} = \frac{343}{125}.$$

Вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ двучленныхъ ур—ній

$$r^3 = \frac{27}{8} \quad \text{и} \quad r^3 = \frac{343}{125},$$

изъ коихъ каждое имѣетъ шесть корней предложеннаго.

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\omega, \frac{3}{2}\omega^2, \frac{7}{5}, \frac{7}{5}\omega, \frac{7}{5}\omega^2, \frac{3}{2}\omega^4, \frac{3}{2}\omega^5, \frac{7}{5}\omega^3, \frac{7}{5}\omega^4, \frac{7}{5}\omega^5, \frac{3}{2}\omega^6, \frac{3}{2}\omega^7, \frac{7}{5}\omega^6, \frac{7}{5}\omega^7.$$

Уравненія вида $P \cdot Q \cdot R = 0$ и нѣкоторыя другія.

533. Какова бы ни была степень уравненія, вторая часть котораго равна нулю, но если окажется возможнымъ разложить первую часть его на множители первой или второй степени, или вида $ax^4 + bx^2 + c$, или $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + a$, то ур—ніе возможно рѣшить средствами элементарной алгебры. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы произведеніе множителей было нулемъ, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ нихъ было нулемъ; слѣд. рѣшеніе уравненія $PQR = 0$ приводится къ рѣшенію отдѣльно ур—ній $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, которыя, по предположенію, разрѣшимы элементарными средствами.

Приводимъ примѣры.

1. Решить ур—ніе $ax^3 + bx^2 + cx = 0$.

Написавъ его въ видѣ $x(ax^2 + bx + c) = 0$, заключаемъ, что его корни суть корни ур—ній: $x = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$; т.-е.

$$x' = 0, \quad x'' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x''' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

II. Решить ур—ние $7x^2 - 5x^2 - 4x + 2 = 0$.

Непосредственно видно, что ур. удовлетворяется при $x = 1$; слѣд. первая часть его, обращаясь при $x = 1$ въ нуль, дѣлится на $x - 1$; выполнивъ дѣленіе, дадимъ ур—нію видъ $(x - 1)(7x^2 + 2x - 2) = 0$, откуда видно, что оно распадается на два ур—нія: $x - 1 = 0$ и $7x^2 + 2x - 2 = 0$.

Рѣшая ихъ, получаемъ:

$$x = 1, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}}{7}.$$

III. Решить ур—ние: $(3x^4 - 7x^2 + 4)^2 - (2x^4 - 5x^2 + 2)^2 = 0$.

Разложивъ на множители, получимъ

$$(5x^4 - 12x^2 + 6)(x^4 - 2x^2 + 2) = 0,$$

ур—ние, распадающееся на два биквадратныхъ, изъ которыхъ найдемъ

$$x = \pm \sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{6}}{5}} \quad \text{и} \quad x = \pm \sqrt{1 \pm i}.$$

534. Уравненія $aQ^2 + bQ + c = 0$ и $aQ^4 + bQ^2 + c = 0$, гдѣ Q есть квадратный или биквадратный по буквѣ c полиномъ, заключаютъ въ себѣ четыре типа ур—ній:

$$a(rx^2 + sx + t)^2 + b(rx^2 + sx + t) + c = 0;$$

$$a(rx^4 + sx^2 + t)^2 + b(rx^4 + sx^2 + t) + c = 0,$$

$$a(rx^2 + sx + t)^4 + b(rx^2 + sx + t)^2 + c = 0;$$

$$a(rx^4 + sx^2 + t)^4 + b(rx^4 + sx^2 + t)^2 + c = 0$$

Чтобы рѣшить такого рода ур—нія, полагаемъ, смотря по случаю:

$$\text{или } rx^2 + sx + t = Q, \quad \text{или } rx^4 + sx^2 + t = Q, \quad . \quad . \quad (2)$$

рѣшая ур—нія въ Q , найдемъ для Q два или четыре значенія; внося каждое изъ значеній Q въ вспомогательныя ур—нія (2), найдемъ соответствующія значенія x .

535. Слѣдующіе четыре типа уравненій:

$$aP^2 + bP' + cP'^2 = 0; \quad aQ^2 + bQQ' + cQ'^2 = 0;$$

$$aP^4 + bP^2P'^2 + cP'^4 = 0 \quad \text{и} \quad aQ^4 + bQ^2Q'^2 + cQ'^4 = 0,$$

въ которыхъ P и P' суть триномы вида $rx^2 + sx + t$, а Q и Q' — вида $rx^4 + sx^2 + t$, рѣшаются помощью двухъ квадратныхъ, либо двухъ биквадратныхъ ур—ній.

Для рѣшенія ихъ полагаемъ, смотря по случаю:

$$\frac{P}{P'} = R \quad \text{или} \quad \frac{Q}{Q'} = R;$$

приходится затѣмъ рѣшать квадратное, либо биквадратное ур. въ R , которое дастъ для R два, либо четыре значенія; внося значенія R во вспомогательное ур., найдемъ соответствующія значенія x .

536. Примѣры.— I. *Рѣшить ур.* $(x^2 - a)(x^2 - 3a)(x^2 - 5a)(x^2 - 4a) = b^4 - 35a^2b^2$.

Послѣдовательныя преобразованія дають:

$$\begin{aligned} (x^2 - 4ax + 3a^2)(x^2 - 4ax - 32a^2) - b^4 - 35a^2b^2, \\ (x^2 - 4ax)^2 - 29a^2(x^2 - 4ax) - (96a^4 + b^4 - 35a^2b^2) = 0. \end{aligned}$$

Принявъ $x^2 - 4ax = 4ax$ за вспомогательное извѣстное, находимъ

$$x^2 - 4ax = \frac{29a^2 \pm (35a^2 - 2b^2)}{2};$$

рѣшая каждое изъ этихъ квадратныхъ ур—ній, найдемъ все 4 корня предложеннаго.

II. *Рѣшить ур.* $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$.

Раздѣливъ обѣ части на x^4 (что, замѣтимъ, не поведетъ за собою уничтоженія некоторыхъ корней, ибо при $x = 0$ ур. не удовлетворяется), дадимъ ур—нію видъ

$$\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^4 - 10\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^2 + 9 = 0,$$

откуда

$$\frac{x^2 - x + 1}{x} = \pm \sqrt{5} \pm 4.$$

Такимъ образомъ имѣемъ 4 ур—нія

$$\frac{x^2 - x + 1}{x} = \pm 1 \text{ и } \frac{x^2 - x + 1}{x} = \pm 3,$$

изъ которыхъ находимъ:

$$x = 1, x = \pm i, x = 2 \pm \sqrt{3}, x = -1.$$

III. *Рѣшить ур.* $\frac{(x^2 + ax + 1)^2}{(x^2 + bx + 1)(x^2 + cx + 1)} = d$, гдѣ $d = \frac{(a-b)(a-c)}{bc}$

Послѣдовательныя преобразованія дають:

$$\begin{aligned} d(x^2 + ax + 1) - (a-b)x \pm \{(x^2 + ax + 1) - (a-c)x\} - (x^2 + ax + 1)^2 = 0, \\ (d-1)(x^2 + ax + 1)^2 - d(2a-b-c)(x^2 + ax + 1)x + d(a-b)(a-c)x^2 = 0 \end{aligned}$$

откуда, раздѣливъ на x^2 и принявъ за неизвѣстное $\frac{x^2 + ax + 1}{x}$, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + ax + 1}{x} - \frac{d(2a-b-c) \pm \sqrt{d^2(2a-b-c)^2 - 4d(d-1)(a-b)(a-c)}}{2(d-1)}, \\ \frac{x^2 + ax + 1}{x} - \frac{d(2a-b-c) \pm \sqrt{d^2(b-c)^2 + 4d(a-b)(a-c)}}{2(d-1)}. \end{aligned}$$

Но, по условію, $d = \frac{(a-b)(a-c)}{bc}$; слѣд.

$$d^2(b-c)^2 + 4d(a-b)(a-c) = d^2(b+c)^2,$$

откуда

$$\frac{c^2 + ax + 1}{x} = \frac{d \{ 2a - b - c + (b + c) \}}{2(d-1)},$$

т.-е.

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{(a-b)(a-c) \{ 2a - b - c + (b + c) \}}{2a(a-b-c)}.$$

Итакъ, нахожденіе x приводится къ рѣшенію ур—ній

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{(a-b)(a-c)}{a-b-c} \quad ; \quad \frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{(a-b)(a-c)}{a},$$

что не представляетъ уже затрудненій.

ГЛАВА XXXVI.

Ирраціональныя уравненія.

537. *Ирраціональнымъ ур—ніемъ* называется такое, въ которомъ члены входятъ подъ знакомъ одного или нѣсколькихъ радикаловъ. Рѣшеніе такихъ ур—ній требуетъ освобожденія неизвѣстныхъ изъ-подъ радикаловъ. Можно доказать, что всякое ур—ніе можетъ быть освобождено отъ радикаловъ, какими бы ни были ихъ показатели. Доказательство этой теоремы и основывающійся на ней общій методъ рѣшенія ирраціональных ур—ній мы помѣщаемъ въ концѣ этой главы. Преварительно же рассмотримъ другой приемъ, болѣе элементарный, приложимый лишь въ нѣкоторыхъ случаяхъ, обыкновенно встрѣчающихся въ практикѣ элементарныхъ вычисленій. Онъ состоитъ въ томъ, что изолируемъ радикалъ и затѣмъ возводимъ ур—ніе въ степень, изображаемую показателемъ изолированнаго корня. Такимъ образомъ освобождаютъ ур—ніе отъ ирраціональности того члена, который былъ отдѣленъ. Повторяя эту операцію столько разъ, сколько нужно для уничтоженія всѣхъ радикаловъ, приводятъ такимъ образомъ ур—ніе къ рациональному виду. Но нужно помнить, что этотъ методъ приложимъ лишь въ нѣкоторыхъ исключительныхъ случаяхъ. Такъ, этимъ способомъ можно освободить ур—ніе отъ квадратныхъ корней, каково бы ни было ихъ число.

Теорема. *Всякое ур—ніе можно освободить отъ радикаловъ второй степени, каково бы ни было ихъ число, возвышеніемъ въ квадратъ обѣихъ частей нѣсколько разъ.*

Докажемъ эту теорему. Пусть будетъ \sqrt{k} тотъ радикалъ, который желаютъ уничтожить. Для того приведемъ ур—ніе къ виду $P + Q\sqrt{k} = 0$, гдѣ P и Q количества рациональныя или ирраціональныя, но не содержащія \sqrt{k} . Изолируемъ членъ $Q\sqrt{k}$ во второй части и возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ ур—ніе $P^2 - Q^2k$, уже не содержащее радикала \sqrt{k} . Такимъ же образомъ можно освободить ур—ніе отъ другого, третьяго, ... квадратныхъ корней, сколько бы ихъ ни было.

Освободивъ такимъ образомъ ур—ніе отъ радикаловъ, рѣшаемъ полученное рациональное ур—ніе вышеизложенными приемами. Но легко доказать, что оно можетъ имѣть посторонніи рѣшенія, не удовлетворяющія данному ур—нію.

538. ТЕОРЕМА. Если обѣ части уравненія возвысить въ одинаковую степень, то получится уравненіе, вообще, не эквивалентное данному: оно необходимо удовлетворяется всеми корнями данного ур—нія, но можетъ имѣть и постороннія рѣшенія.

Въ самомъ дѣлѣ: I. Пусть дано ур—ніе

$$A = B \dots (1).$$

Возвысивъ обѣ его части въ квадратъ, найдемъ ур—ніе

$$A^2 = B^2, \text{ или } (A - B)(A + B) = 0 \dots (2).$$

Всякій корень уравненія (1), дѣлая A равнымъ B , обращаетъ разность $(A - B)$ въ нуль, и слѣд. удовлетворяетъ ур—нію (2).

Но послѣднее ур—ніе удовлетворяется еще тѣми значеніями неизвѣстнаго, при которыхъ $A + B$ обращается въ нуль, т.е. корнями новаго ур. $A = -B$. Такимъ образомъ не всѣ корни ур—нія (2) необходимо удовлетворяютъ и (1).

Итакъ, рѣшивъ ур—ніе (2), необходимо еще удостовѣриться, удовлетворяютъ ли полученные рѣшенія ур—нію (1), т.е. обращаютъ ли эти рѣшенія A и B въ количества одинаковаго знака.

Корни ур—нія $A = -B$ называютъ *посторонними* или *паразитными* рѣшеніями, введенными возвышеніемъ въ квадратъ.

II. Возвысивъ обѣ части ур—нія $A = B$ въ кубъ, найдемъ: $A^3 = B^3$; но это ур—ніе не эквивалентно данному, ибо содержитъ корни трехъ ур—ній

$$A = B, \quad A = B\alpha, \quad A = B\alpha^2,$$

гдѣ α одинъ изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ единицы.

III. Возвысивъ ур—ніе $A = B$ въ четвертую степень, найдемъ ур—ніе $A^4 = B^4$, которое опять общѣ данному, ибо удовлетворяется корнями четырехъ уравненій:

$$A = B, \quad A = -B, \quad A = Bi, \quad A = -Bi.$$

IV. Вообще, возвысивъ ур—ніе $A = B$ въ m -ую степень, получимъ ур—ніе:

$$A^m = B^m, \text{ или } (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \dots + B^{m-1}) = 0,$$

которое кромѣ корней данного ур—нія удовлетворяется еще корнями ур—нія

$$A^{m-1} + A^{m-2}B + \dots + B^{m-1} = 0.$$

Можетъ оказаться, что это послѣднее не содержитъ рѣшеній, отличныхъ отъ корней ур—нія $A = B$; но такой случай исключителенъ.

Покажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ примѣненіе этого метода, причемъ главнымъ образомъ обратимъ вниманіе на ур—нія, содержащія радикалы второго порядка.

539. Рассмотримъ сначала простѣйшій случай, когда ур—ніе содержитъ только одинъ радикалъ. Такое ур—ніе можно представить въ видѣ

$$R + \sqrt{Q} = 0 \dots (1)$$

если буквою R обозначить совокупность рациональных членовъ, а буквою Q—подрадикальное выраженіе.

Изолируя радикалъ, напишемъ ур—ніе (1) въ формѣ $\sqrt{Q} = -R$, и возвысимъ обѣ части въ квадратъ; найдемъ: $Q = R^2$, или

$$R^2 - Q = 0, \dots (2)$$

что можно написать такъ: $(R + \sqrt{Q})(R - \sqrt{Q}) = 0$.

Ур—ніе (2) рационально и его корни удовлетворяютъ либо ур—нію (1), либо сопряженному ему ур—нію

$$R - \sqrt{Q} = 0 \dots (1')$$

Взявъ одинъ изъ корней ур—нія (2), подставимъ его въ это ур—ніе; и пусть при этомъ R и Q принимаютъ значенія R' и Q', такъ что получается тождество

$$R'^2 - Q' = 0.$$

Оно доказываетъ, что Q' есть количество положительное, и слѣд. $\sqrt{Q'}$ действителенъ. Если, теперь, R' положительно, то рассматриваемое рѣшеніе не можетъ удовлетворять ур—нію (1), ибо сумма двухъ положительныхъ чиселъ не можетъ равняться нулю; оно, сл., удовлетворяетъ сопряженному съ (1) ур—нію (1'). Если же R' отрицательно, то наше рѣшеніе не можетъ удовлетворять ур—нію (1'); слѣд., оно удовлетворяетъ (1)-му. Отсюда заключаемъ, что всегда легко отличить тѣ рѣшенія ур—нія (2), которыя удовлетворяютъ данному ур—нію; это будутъ тѣ корни (2), которые, будучи подставлены въ R, обращаютъ R въ количество отрицательное.

Пусть, наприм., R есть полиномъ 1-й степени въ x, а Q—квадратный полиномъ, наприм.

$$R = k(x - \alpha), \quad Q = ax^2 + bx + c.$$

Ур—ніе (2) будетъ въ этомъ случаѣ квадратное:

$$(ax^2 + bx + c) - k^2(x - \alpha)^2 = 0;$$

рѣшая его, найдемъ два корня x' и x'' . Чтобы удостовѣриться, удовлетворяютъ ли они данному ур—нію, нужно поочередно подставить въ функцию R вмѣсто x сначала x' , потомъ x'' и смотрѣть, удовлетворяется ли условіе

$$k(x - \alpha) < 0;$$

т.е.

при $k > 0$, будетъ ли $x < \alpha$,

а при $k < 0$, будетъ ли $x > \alpha$.

Приводимъ примѣры.

540. Примеръ I. Решить уравненіе $\sqrt{5x-4} = 12 - 2x$

Изолируя ирраціональный членъ, имѣемъ:

$$\sqrt{5x-4} = 12 - 2x.$$

Возвысимъ въ квадратъ и приведемъ въ порядокъ члены. получимъ квадратное уравненіе

$$4x^2 - 53x + 148 = 0. \quad (1).$$

корни котораго необходимо удовлетворяють одному изъ уравненій

$$\sqrt{5x-4} = 12 - 2x, \quad (2) \quad \sqrt{5x-4} = 12 - 2x, \quad (3).$$

какъ какъ и то и другое, по возвышеніи въ квадратъ, одинаково даетъ уравненіе (1). Но по (2), которое эквивалентно данному, передъ радикаломъ находится знакъ +, слѣд. и вторая часть его должна быть положительна; въ уравненіи же (3) передъ радикаломъ находится —, слѣд. и вторая часть его должна быть отрицательна. Слѣд., если въ числѣ действительныхъ корней уравненія (1) имѣется корень, удовлетворяющій неравенству $12 - 2x > 0$, или $x < 6$, то онъ будетъ удовлетворять данному уравненію, а если имѣется корень, удовлетворяющій условію $12 - 2x < 0$, или $x > 6$, то онъ удовлетворяетъ уравненію (3), сопряженному со (2).

Рѣшивъ уравненіе (1), находимъ: $x' = 9\frac{1}{4}$; $x'' = 4$

x' нужно отбросить и принять x'' : искомое рѣшеніе: $x = 4$.

Въ данномъ примѣрѣ легко найденные результаты проверить прямою подстановкою, хотя *теоретически, это не необходимо*.

Подстановка $x = 4$ въ предложенное уравненіе даетъ:

$$\sqrt{5 \times 4 - 4} = 12 - 2 \times 4, \text{ или } 4 = 4.$$

Подстановка $x = 9\frac{1}{4}$ въ уравненіе (3) даетъ:

$$\sqrt{5 \times 9\frac{1}{4} - 4} = 12 - 2 \times 9\frac{1}{4}, \text{ или } \frac{13}{2} = -\frac{13}{2}.$$

Другой приемъ. Можно рѣшить данное уравненіе иначе, введеніемъ *вспомогательнаго неизвестнаго*. Преобразуемъ уравненіе такъ, чтобы имѣть въ немъ раціональный членъ $5x - 4$: для этого умножимъ обѣ части на $\frac{5}{2}$, а потомъ вычитаемъ изъ нихъ по 4. Такимъ образомъ, получаемъ эквивалентное данному уравненію

$$5x - 4 = y, \quad \sqrt{5x - 4} = y.$$

Положивъ $\sqrt{5x - 4} = y$. . . (1), даемъ этому уравненію видъ

$$y^2 = \frac{5}{2}y - 26, \text{ откуда } y' = -\frac{13}{2}, \quad y'' = 4$$

Но буквою y обозначенъ радикалъ положительный, поэтому отбрасываемъ y' и удерживаемъ $y'' = 4$. Подставляя въ вспомогательное уравненіе (1) вмѣсто y число 4, получаемъ уравненіе $\sqrt{5x-4} = 4$, затѣмъ $5x-4 = 16$, откуда

$$x = 4.$$

Этотъ способъ позволяетъ безъ труда отличать значенія x , удовлетворяющія уравненію, отъ паразитныхъ корней.

541. Примеръ II. Решить уравненіе $x = 1 + \sqrt{3x-5}$.

Возведя обѣ части въ квадратъ и приведя въ порядокъ, получаемъ

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \dots (1).$$

Корни этого уравненія удовлетворяютъ одному изъ двухъ уравненій: данному, либо $x = 1$ и $\sqrt{3x-5} = 5 \dots (2)$, данному—если эти корни больше 1, и уравненію (2)—если они меньше 1. Решивъ уравненіе (1), находимъ корни:

$$x' = 2, \quad x'' = 3;$$

оба корня больше 1, слѣд., оба удовлетворяютъ данному, но не удовлетворяютъ уравненію (2), которое, такимъ образомъ, не имѣетъ рѣшеній.

542. Примеръ III. Решить уравненіе $x + \sqrt{a^2 - x^2} = b$, въ которомъ a и b —дѣйствительныя и положительныя количества.

Изолирую радикалъ, имѣемъ

$$\sqrt{a^2 - x^2} = b - x \dots (1).$$

Возымшая обѣ части въ квадратъ, находимъ

$$a^2 - x^2 = (b - x)^2 \dots (2) \quad \text{или} \quad 2x^2 - 2bx + (b^2 - a^2) = 0 \dots (3),$$

изъ котораго

$$x' = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \dots (4) \quad \text{и} \quad x'' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \dots (5).$$

То же самое уравненіе (3), а слѣд. и тѣ же самые корни (4) и (5), найдетъ бы и для уравненія

$$-\sqrt{a^2 - x^2} = b - x \dots (6),$$

отличающагося отъ (1) знакомъ при радикалѣ. Замѣчаемъ, что дѣйствительныя корни уравненія (3), удовлетворяющіе уравненію (1), отличаются отъ корней, удовлетворяющихъ уравненію (6), тѣмъ признакомъ, что они должны еще удовлетворять условію

$$x < b.$$

Корни уравненія (3) будутъ дѣйствительны, если будетъ

$$b^2 - 2(b^2 - a^2) \geq 0, \quad \text{или} \quad b^2 - 2a^2 \leq 0.$$

Рассматривая $b^2 - 2a^2$ как квадратный относительно b trinomial, находим, что он будет отрицателен, когда b будет заключаться между его корнями $a\sqrt{2}$ и $-a\sqrt{2}$, из коих первый положителен, а второй отрицателен, так как, по условию, $a > 0$. Но как и $b > 0$, то заключаем, что необходимое и достаточное условие действительности корней будет

$$b \leq a\sqrt{2}.$$

Знак корней зависит от их произведения и суммы. Произведение корней, $b^2 - a^2$, будет положительно, если $b > a$, и отрицательно, если $b < a$. Сумма корней, будучи $= b$, всегда положительна. Значит, при $b > a$ оба корня положительны, а при $b < a$ знаки их противоположны, причем больший корень положителен.

Что касается величины корней, то, во-первых, действительность $\sqrt{a^2 - x^2}$ [уравнение (1)] требует, чтобы разность $a^2 - x^2$ была > 0 . Но действительные корни уравнения (3), в силу того, что они удовлетворяют уравнению (2), necessarily делают разность $a^2 - x^2$ положительною.

Окончательно приходим к такому заключению: при соблюдении условия $b \leq a\sqrt{2}$, оба корня уравнения (3) будут действительны, но данному уравнению они будут удовлетворять только тогда, когда будут $< b$.

Нужно, поэтому, определить, каким образом располагается число b относительно корней trinomial $2x^2 - 2ax + b^2 - a^2$. Для этого надо взять результат подстановки в этот trinomial $x = b$ и найти f . Этот результат есть

$$f(b) = b^2 - a^2,$$

где b и a положительны. Очевидно, что если $b > a$, что не противоречит условию $b \leq a\sqrt{2}$, то результат этот положителен, т.е. одного знака с первым членом; если же $b < a$, то $f(b) < 0$, т.е. знак ее противоположен первому коэффициенту. Критическими значениями b будут, следовательно, a и $a\sqrt{2}$.

Легко составить следующую таблицу знаков.

Связь значений b	0	a	$a\sqrt{2}$	∞
Реализант				
Произведение корней		—		
Сумма корней				
$f(b)$			+	
1-й коэфф.				

Изъ этой таблицы прямо видно, что если:

1) $b = 0$, то (хотя освобожденное от радикала уравнение дает корни $\pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$, но) данному уравнению удовлетворяет 1 корень $-\frac{a\sqrt{2}}{2}$: задача имеет 1 решение.

2) $b < a$. Корни действительны и противоположны по знаку, причемъ больший корень положителенъ. Такъ какъ $f(b)$ имеетъ знакъ противоположный 1-му коэффициенту, то b заключается между корнями

$$r' \dots b \dots r''$$

след., одинъ корень $< b$, другой $> b$; и какъ задачѣ удѣтъ только первый, то задача имеетъ одно решение, выражаемое отрицательнымъ корнемъ

$$x' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

3) $b = a$. Корни будутъ

$$r' = 0, \quad r'' = a.$$

4) $a < b < a\sqrt{2}$. Корни действительны: произведение и сумма ихъ > 0 , след. оба корня > 0 . Знакъ $f(b)$ одинаковъ съ 1-мъ коэффициентомъ, след. b находится вне корней. Чтобы знать положение b относительно корней, сравнивая b съ полусуммою корней, равною $\frac{b}{2}$; такъ какъ $b > \frac{b}{2}$ то расположено число x', x'' и b таково:

$$0 \dots r' \dots r'' \dots b \dots$$

т.е. оба корня $< b$, и потому задача имеетъ 2 решения:

$$x' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \quad x'' = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

5) $b = a\sqrt{2}$. Уравнение имеетъ равные корни:

$$x' = x'' = \frac{b}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}: 1 \text{ решение.}$$

6) $b > a\sqrt{2}$. Корни мнимые; задача не имеетъ действит. решений.

Резюме.

$b = 0$	1 корень: $x' = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$
$b < a$	1 рѣш. отриц. $x' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$
$b = a$	2 корня: $x' = 0, \quad r'' = a$
$a < b < a\sqrt{2}$	2 полож. корня: $x' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \quad x'' = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$
$b = a\sqrt{2}$	2 равныхъ корня: $x' = x'' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
$b > a\sqrt{2}$	Корни мнимые.

Въ разсматриваемомъ случаѣ ($a > 0$, $b > 0$) можно дать нашему ур—нію геометрическую интерпретацію, которая наглядно покажетъ, въ какомъ случаѣ допустимо то или другое рѣшеніе.

Наше уравненіе есть переводъ на языкъ алгебры требованій задачи: *на окружности круга, построеннаго на диаметръ $AB = a$, найти такую точку D, сумма разстояній которой отъ концовъ діаметра равнялась бы данной линіи b* :

$$AD + DB = b.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если искома точка есть D, и $AD = x$, то $BD = \sqrt{a^2 - x^2}$, слѣд. ур—ніе задачи будетъ

$$x + \sqrt{a^2 - x^2} = b.$$

Корни его и дадутъ искомую линію AD.

Геометрически задача рѣшается такъ. На продолженіи линіи AD возьмемъ отрѣзокъ $DE = DB$ и соединимъ B съ E. Въ равнобедренномъ треугольникѣ BDE уголъ $D = 90^\circ$, слѣд. $\angle AEB = 45^\circ$. Поэтому конецъ E прямой $AE = b$ находится на дугѣ ANEB, вмѣщающей уголъ 45° и описанной на хордѣ $AB = a$. Центръ C этой дуги есть конецъ радіуса, перпендикулярнаго къ AB.

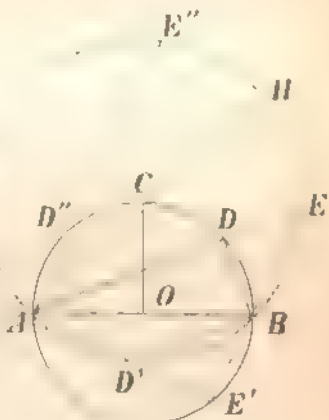
Если дуга, описываемая изъ A радіусомъ $= b$, встрѣчаетъ нижнюю часть искомой окружности въ D', то на данной окружности получаемъ точку E'. Такъ какъ $\angle AD'B = 135^\circ$, то $\angle BE'E' = 45^\circ = \angle D'BE'$, откуда $D'E' = E'B$, и слѣд. $AE' - D'E' = AE' - E'B = b$, такъ что нижняя дуга даетъ точки, для которыхъ разность разстояній отъ A и B равна b , и не отвѣчаетъ задачѣ въ прямомъ смыслѣ задания.

Итакъ, для рѣшенія задачи описываемъ на AB сегментъ, вмѣщающій 45° , и изъ A, какъ изъ центра, радіусомъ b описываемъ дугу, которая пусть встрѣчаетъ дугу ANB въ некоторой точкѣ E; соединивъ A съ E, найдемъ на окружности ACB требуемую точку D.

Чтобы задача была возможна, нужно, чтобы дуга, описываемая радіусомъ b изъ точки A, какъ изъ центра, встрѣчала дугу ANB; для этого должно быть $b > AN$ или $2AC$, или $b > a\sqrt{2}/2$, такъ какъ $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Когда $b < a$, наше изслѣдованіе показало, что значеніе x , удовлетворяющее ур—нію, отрицательно. Что касается геометрической задачи, приводящей къ тому же ур—нію, то ей могутъ удовлетворять только положительныя значенія x . Заключаемъ, что полученіе отрицательнаго рѣшенія должно указывать на не возможность задачи. И дѣйствительно, на окружности нѣтъ такихъ точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ концовъ діаметра была бы меньше діаметра.

Пусть $b = a$. Существуютъ 2 точки, обладающія тѣмъ свойствомъ, что сумм.



Черт. 56.

нѣхъ разстояній отъ А и В равна a : это точки А и В, что и указывается корнями $x' = 0$, $x'' = a$.

Когда $a < b < a\sqrt{2}$ или $AB < b < AN$, очевидно, дуга, описанная изъ А радиусомъ b , встрѣтитъ дугу АНВ въ двухъ точкахъ Е и Е', дающихъ двѣ точки В и D' на дугѣ АСВ. Это вполне согласуется съ результатомъ алгебраическаго изслѣдованія, что въ данномъ случаѣ задача имѣетъ 2 положительныхъ корня.

При $b = a\sqrt{2}$ или АН, точка встрѣчи одна, Н, и искомая точка на данной окружности одна, С, что согласуется съ результатомъ алгебраическаго изслѣдованія, съ полученіемъ въ этомъ случаѣ двухъ сливающихся корней.

Наконецъ, результатъ алгебраическаго изслѣдованія, что при $b > a\sqrt{2}$ ур—ніе имѣетъ мнимые корни, согласенъ съ геометрическимъ указаніемъ невозможности задачи при этомъ условіи: въ самомъ дѣлѣ, дуга, описанная изъ А радиусомъ, большимъ $a\sqrt{2}$, не встрѣтитъ дуги АНВ.

543. Примеръ IV. Возьмемъ теперь примѣръ нѣсколько сложнее.

Пусть дано рѣшить уравненіе

$$2x + \sqrt{a^2 - x^2} = 3b \quad . \quad . \quad (1).$$

Во-первыхъ, замѣчаемъ, что какъ вторая часть ур—нія дѣйствительна, то и первая должна быть такою же, и для этого должно быть $a^2 - x^2 \geq 0$, откуда

$$-a \leq x \leq a.$$

Изолируя радикалъ, получаемъ ур—ніе

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 3b - 2x \quad . \quad . \quad (2),$$

которое, по возвышеніи въ квадраты, даетъ ур—ніе

$$a^2 - x^2 = (3b - 2x)^2, \quad \text{или} \quad 5x^2 - 12bx + 9b^2 - a^2 = 0 \quad . \quad (3),$$

Но то же самое рациональное ур—ніе (3) мы получили бы и изъ ур—нія

$$2x - \sqrt{a^2 - x^2} = 3b, \quad \text{или} \quad -\sqrt{a^2 - x^2} = 3b - 2x.$$

(Слѣд., дѣйствительные корни (3), чтобы удовлетворять (2) или (1), должны еще удовлетворять требованію

$$3b - 2x > 0, \quad \text{или} \quad x < \frac{3}{2}b.$$

Переходимъ теперь къ изслѣдованію корней ур—нія (3), которые выражаются формулою

$$x = \frac{6b \pm \sqrt{5a^2 - 9b^2}}{5}.$$

Эти корни будут действительны, когда будет удовлетворено условие

$$5a^2 - 9b^2 > 0, \text{ или } (a\sqrt{5} + 3b)(a\sqrt{5} - 3b) > 0,$$

а какъ a и $b > 0$, то должно быть $b < \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Когда это условие удовлетворено, то корни уравнения (3) будут действительны.

Но когда a действительно, то вторая часть уравнения (2) будет действительна, следовательно и равная ей первая также будет действительна, а потому условие $-a \leq x \leq a$ будет удовлетворено.

Выразимъ теперь, что корни (3), чтобы удовлетворять данному уравнению, должны быть $< \frac{3}{2}b$.

Подставимъ въ триномъ (3) вмѣсто x $\frac{3}{2}b$, вмѣстъ

$$\frac{9}{4}b^2 - a^2 = \left(\frac{3}{2}b + a\right)\left(\frac{3}{2}b - a\right),$$

результатъ, который мѣняетъ знакъ при $b = \frac{2}{3}a$.

Слѣдств. корней, $\frac{12}{5}b$, всегда > 0 ; произвед. корней, $\frac{9b^2 - a^2}{5}$, мѣняетъ знакъ при $b = \frac{1}{3}a$.

Слѣдств. образомъ критическія значенія b суть

$$\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a \text{ и } \frac{1}{3}\sqrt{5}a,$$

и составляется слѣдующая таблица знаковъ:

Скала значений b	0	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}\sqrt{5}a$	∞
Реализантъ	+			+	
Произведение корней	—	+	+	+	
Сумма корней	+	+	+	+	
$\frac{3}{2}b$			—	+	
1-й коэффци.	+	+	+	+	

Разсмотримъ каждый интервалъ.

1) $b < \frac{2}{3}a$: корни действительны; $f\left(\frac{3}{2}b\right) < 0$, т. е. знакъ ее противоположенъ знаку коэффициента при x^2 , слѣд. $\frac{3}{2}b$ заключается между корнями:

$$x' < \frac{3}{2}b < x''.$$

Въ этомъ интервалѣ только одинъ корень ур—тъ данному ур.: это — меньшій корень ур—нія (3), который, пока $b < \frac{1}{3}a$ — отрицателенъ; при $b = \frac{1}{3}a$ равенъ 0, а при $b > \frac{1}{3}a$ — положителенъ.

2) $b = \frac{2}{3}a$; $f\left(\frac{3}{2}b\right) = 0$, сл. $\frac{3}{2}b$ есть одинъ изъ корней. Который это корень, покажетъ слѣдующій случай.

3) $\frac{2}{3}a < b < \frac{a\sqrt{5}}{3}$: $f\left(\frac{3}{2}b\right) > 0$, сл. $\frac{3}{2}b$ находится внѣ корней.

Полусумма корней $= \frac{6}{5}b$, что меньше $\frac{3}{2}b$: расположеніе корней относительно $\frac{3}{2}b$ таково:

$$x' \dots x'' \dots \frac{3}{2}b.$$

Заключаемъ, что оба корня меньше $\frac{3}{2}b$: задача имѣетъ 2 рѣшенія.

Отсюда же заключаемъ, что въ предыдущемъ случаѣ $\frac{3}{2}b$ былъ большій корень.

4) $b = \frac{a\sqrt{5}}{3}$: ур—ніе имѣетъ равные корни: $x' = x'' = \frac{6}{5}b$; какъ это значеніе $< \frac{3}{2}b$, то задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

5) $b > \frac{a\sqrt{5}}{3}$: корни мнимые.

Р е з ю м е.

$$0 < b < \frac{2}{3}a : 1 \text{ корень } \dots x' = \frac{6b}{5} \quad \frac{15a^2 - 9b^2}{5}.$$

$$b = \frac{2}{3}a : 2 \text{ корня } \dots x' = \frac{9}{10}b, \quad x'' = \frac{3}{2}b.$$

$$\frac{2}{3}a < b < \frac{a\sqrt{5}}{3} : 2 \text{ корня } \dots x = \frac{6b \pm \sqrt{5a^2 - 9b^2}}{5}.$$

$$b = \frac{a\sqrt{5}}{3} : 2 \text{ равныхъ корня } \dots x' = x'' = \frac{6}{5}b.$$

$$b > \frac{a\sqrt{5}}{3} : \text{Корни мнимые.}$$

544. Перейдемъ къ случаю, когда ур—ніе содержитъ два квадратныхъ корня: пусть это ур—ніе будетъ $\sqrt{P} + \sqrt{Q} + R = 0$. Изолируя ихъ въ первой части, возвышаемъ ур—ніе въ квадратъ; изолируемъ, затѣмъ, единственный оставшійся радикалъ, снова возвышаемъ ур—ніе въ квадратъ; въ результатѣ получимъ ур—ніе раціональное. Можно поступать еще такъ: изолируя одинъ изъ радикаловъ, возвышаемъ ур—ніе въ квадратъ; изолируемъ остающійся послѣ этого радикалъ и снова возвышаемъ ур—ніе въ квадратъ; получаемъ раціональное ур—ніе.

Возьмемъ сначала частный примѣръ: рѣшить ур—ніе

$$\sqrt{40+x} = \sqrt{18+2x} + 1.$$

Возвысивъ въ квадратъ, находимъ

$$40+x = 18+2x+2\sqrt{18+2x}+1$$

или, изолируя радикалъ и сдѣлавъ приведеніе, находимъ:

$$21-x = 2\sqrt{18+2x}.$$

Возвысивъ это ур—ніе въ квадратъ, по приведеніи въ порядокъ, найдемъ ур—ніе $x^2 - 30x + 369 = 0$, откуда $x' = 9$, $x'' = 41$. Эти корни не необходимо удовлетворяютъ данному ур—нію; они могутъ удовлетворять одному изъ уравненій:

$$\sqrt{40+x} = \sqrt{18+2x} + 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{40+x} = -\sqrt{18+2x} + 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{40+x} = \sqrt{18+2x} + 1 \quad (3)$$

$$-\sqrt{40+x} = -\sqrt{18+2x} + 1 \quad (4).$$

Во-первыхъ, устранимъ ур—ніе (2), ибо, написавъ его въ видѣ

$$\sqrt{40+x} - \sqrt{18+2x} = 1,$$

замѣчаемъ, что при положительномъ x (а таковы x' и x'') первая часть всегда больше 1. Затѣмъ, ур—ніе (3) не можетъ быть удовлетворено никакимъ действительнымъ значеніемъ x , ибо первая часть его < 0 , вторая же > 0 . Такимъ образомъ, найденные корни могутъ удовлетворять только ур—мъ (1) и (4). По ур—нію (1) разность $\sqrt{40+x} - \sqrt{18+2x}$, какъ равная -1 , должна быть > 0 ; по ур—нію (4), она должна быть < 0 . Слѣдовательно, необходимо, чтобы было: $\sqrt{40+x} > \sqrt{18+2x}$ или $40+x > 18+2x$, или $x < 22$. Слѣдовательно, данному ур—нію удовлетворяетъ корень $x' = 9$; $x'' = 41$ удовлетворяетъ ур—нію (4). Легко подтвердить то и другое прямою подстановкою.

Постараемся теперь формулировать общія для разсматриваемаго случая правила, которыя позволяли бы отличать тѣ изъ корней раціональнаго резольвента, которые принадлежатъ данному ур—нію, отъ корней, ему не удовлетворяющихъ.

Комбинируя всеми возможными способами двойные знаки передь радикалами уравненія $\pm \sqrt{P} \pm \sqrt{Q} + R = 0$, получимъ ур—нія

$$\sqrt{P} + \sqrt{Q} + R = 0 \dots (1),$$

$$\sqrt{P} - \sqrt{Q} + R = 0 \dots (2),$$

$$-\sqrt{P} + \sqrt{Q} + R = 0 \dots (3),$$

$$-\sqrt{P} - \sqrt{Q} + R = 0 \dots (4).$$

Перемноживъ ихъ почленно, найдемъ

$$(\sqrt{P} + \sqrt{Q} + R)(\sqrt{P} - \sqrt{Q} + R)(-\sqrt{P} + \sqrt{Q} + R)(-\sqrt{P} - \sqrt{Q} + R) = 0 \dots (5)$$

ур—ніе, необходимо рациональное. Въ самомъ дѣлѣ, его можно написать въ формѣ

$$[R^2 - (\sqrt{P} + \sqrt{Q})^2][R^2 - (\sqrt{P} - \sqrt{Q})^2] = 0$$

или

$$(R^2 - P - Q - 2\sqrt{PQ})(R^2 - P - Q + 2\sqrt{PQ}) = 0,$$

или

$$(R^2 - P - Q)^2 - 4PQ = 0 \dots (6),$$

которое также нашли бы и по двукратномъ возвышеніи въ квадратъ способомъ, указаннымъ выше.

Всякій корень ур—нія (6), въ силу (5), будетъ рѣшеніемъ одного изъ уравненій (1), (2), (3) и (4).

Комбинируя различнымъ образомъ множителей ур—нія (5), можно это ур. представить еще въ формахъ

$$[(R + \sqrt{P})^2 - Q][(R - \sqrt{P})^2 - Q] = 0,$$

или

$$(R^2 + P - Q)^2 - 4R^2P = 0 \dots (6').$$

Также

$$(R^2 + Q - P)^2 - 4R^2Q = 0 \dots (6'').$$

Ур—нія (6') и (6'') показываютъ, что всякій корень резольвента (6) дѣлаетъ полиномы P и Q положительными. Зная это, посмотримъ, какиимъ образомъ рѣшенія (6) распределяются между ур—ми (1), (2), (3) и (4).

Корни ур—нія (6) принадлежатъ тому или другому изъ ур—ній

$$R^2 - P - Q - 2\sqrt{PQ} = 0 \dots (7),$$

$$R^2 - P - Q + 2\sqrt{PQ} = 0 \dots (8).$$

Тѣ, которые принадлежатъ (7), должны удовлетворять неравенству

$$R^2 - P - Q > 0 \dots (m),$$

а тѣ, которые принадлежатъ (8), должны удовлетворять соотношенію

$$R^2 - P - Q < 0 \dots (8).$$

По (7) можно написать въ видѣ

$$(R + \sqrt{P} + \sqrt{Q})(R - \sqrt{P} - \sqrt{Q}) = 0;$$

слѣд. корни (7) удовлетворяютъ либо (1), либо (4): (1)-му, если они дѣлаютъ $R < 0$; (4)-му, если они дѣлаютъ $R > 0$.

Ур—ніе (8) можно написать въ видѣ

$$[R + (\sqrt{P} - \sqrt{Q})][R - (\sqrt{P} - \sqrt{Q})] = 0;$$

его корни удовлетворяютъ либо (2)-му, либо (3)-му, а именно: (2)-му, если они сообщаютъ R и $\sqrt{P} - \sqrt{Q}$ противоположные знаки, т.-е. если они удовлетворяютъ неравенству

$$R(\sqrt{P} - \sqrt{Q}) < 0;$$

(3)-му, если удовлетворяютъ неравенству

$$R(\sqrt{P} - \sqrt{Q}) > 0.$$

Эти ирраціональные соотношенія можно сдѣлать раціональными, помноживъ первыя изъ части на положительное количество $\sqrt{P} + \sqrt{Q}$, что дастъ

$$R(P - Q) < 0 \dots (p),$$

$$R(P - Q) > 0 \dots (q).$$

Резюмируя сказанное, находимъ, что рѣшеніе резольвента будетъ принадлежать:

уравненію (1), если оно удовлетв—тъ $R^2 - P - Q > 0$, $R < 0$;

» (2), » » » $R^2 - P - Q < 0$, $R(P - Q) < 0$;

(3), . » . $R^2 - P - Q < 0$, $R(P - Q) > 0$;

» (4), » » » $R^2 - P - Q > 0$, $R > 0$.

545. Примеръ. Решить уравненіе

$$\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c \dots (1).$$

въ которомъ $m \geq 1$.

По двукратномъ возвышеніи въ квадратъ или по перемноженіи четырехъ ур—ній съ различною комбинаціей знаковъ при радикалахъ, найдемъ резольвентъ

$$(m-1)^2c^2 + 2[(m-1)(a-b-c^2) - 2c^2]x + (a-b-c^2)^2 - 4bc^2 = 0 \dots (2).$$

Данное ур—ніе, написанное въ видѣ $\sqrt{mx+a} + \sqrt{x+b} - c = 0$, подходит подъ форму (4); слѣд., чтобы тотъ или другой корень резольвента удовлетворялъ ему, необходимо, чтобы было $R^2 - P - Q > 0$ и $R > 0$, или

$$c^2 - (mx+a) - (x+b) > 0 \dots (3) \quad \text{и} \quad c > 0 \dots (4).$$

Чтобы корни резольвента были действительны, необходимо, чтобы было

$$mc^2 + (m-1)(mb-a) \geq 0.$$

Когда $mb - a > 0$, это условіе удовлетворено; если же $mb - a < 0$, то должно быть

$$c^2 \geq \frac{(m-1)(a-mb)}{m}.$$

Затѣмъ, неравенство (3) требуетъ, чтобы было

$$x < \frac{c^2 - a - b}{m-1}.$$

Итакъ, данное ур—ніе будетъ имѣть столько корней, сколько резольвентъ имѣетъ действительныхъ корней меньшихъ $\frac{c^2 - a - b}{m-1}$. Чтобы знать, какъ корни резольвента расположены относительно этого числа, нужно знать результатъ подстановки этого числа вмѣсто x въ ур—ніи (2). Найдемъ:

$$f\left(\frac{c^2 - a - b}{m+1}\right) = -4mc^4 + 4(m-1)(a-bm)c^2 + 4(a-bm)^2 \dots (5).$$

Корни этого квадратнаго въ c^2 тринома суть $a - mb$ и $\frac{mb-a}{m}$. Когда c^2 заключается между этими значеніями, то $f\left(\frac{c^2 - a - b}{m+1}\right)$ будетъ > 0 , т.е. того же знака, какъ коэффициентъ при x^2 въ ур—ніи (2). Значитъ, $\frac{c^2 - a - b}{m+1}$ будетъ лежать внѣ корней этого ур—нія: слѣдов., чтобы ур—ніе (2) имѣло корень меньшій этой дроби, необходимо, чтобы полусумма его корней была меньше $\frac{c^2 - a - b}{m+1}$, что ведетъ къ условію

$$2mc^2 + (m-1)(mb-a) < 0,$$

которое противорѣчитъ условію действительности корней ур—нія (2).

Итакъ, необходимо, чтобы c^2 не находилось въ интерваллѣ корней тринома (5), а лежало бы внѣ этого интервала. Отсюда необходимость различать 3 случая:

1) Если $a - mb < 0$, то $\frac{mb-a}{m} > 0$, и какъ c^2 положительно, то если взять $c^2 < \frac{mb-a}{m}$, знакъ $f\left(\frac{c^2 - a - b}{m+1}\right)$ будетъ отрицателенъ, и слѣдовательно $\frac{c^2 - a - b}{m+1}$ будетъ лежать между корнями ур—нія (2), и потому одинъ изъ нихъ будетъ меньше этой дроби: задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

2) Если $a - mb > 0$, то $\frac{mb}{m} a < 0$. Взявъ c^2 , $a - mb$, опять найдемъ, что задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

3) Если $a - mb = 0$ данное уравненіе приметъ видъ

$$\sqrt{x+b}(1+\sqrt{m})=c,$$

и всегда имѣетъ одинъ корень,

$$x = -b + \frac{c^2}{(1+\sqrt{m})^2}.$$

Остается рассмотреть, будутъ ли значения обоихъ радикаловъ, $\sqrt{x+b}$ и $\sqrt{mx+a}$, действительны. Достаточно рассмотреть одинъ изъ нихъ, такъ какъ въ силу действительности c , если одинъ радикалъ действителенъ, то действителенъ и другой; если мнимъ одинъ, то мнимъ и другой. Чтобы $\sqrt{x+b}$ былъ действителенъ, должно быть $x > -b$. Подстановка $-b$ вмѣсто x въ триномъ (2) даетъ

$$f(-b) = (c^2 + bm - a)^2,$$

количество положительное; слѣд., $-b$ находится въ интервала корней этого уравненія, и потому, чтобы x было $> -b$, полусумма корней

$$\frac{2c^2 - (m-1)(a-b-c^2)}{(m-1)^2} \text{ должна быть } > -b,$$

что даетъ условіе $(m+1)c^2 + (m-1)(bm-a) > 0$, всегда выполненное, разъ условіе действительности корней резольвента удовлетворено.

546. Пусть уравненіе содержитъ три радикала:

$$\pm\sqrt{P} \pm \sqrt{Q} \pm \sqrt{R} = 0.$$

Если перемножить уравненія

$$\sqrt{P} + \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0 \dots (1)$$

$$\sqrt{P} + \sqrt{Q} - \sqrt{R} = 0 \dots (2)$$

$$\sqrt{P} - \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0 \dots (3)$$

$$-\sqrt{P} + \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0 \dots (4),$$

то получимъ резольвентъ въ формѣ

$$P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ - 2PR - 2QR = 0 \dots (5),$$

откуда легко заключить, что для всякаго корня этого уравненія всѣ три количества P , Q и R одновременно положительны, или всѣ отрицательны. Въ са-

номъ дѣлѣ: не можетъ быть одновременно $P > 0$, $Q > 0$ и $R < 0$; ибо, положивъ $R = -R'$, первая часть ур. (5) была бы

$$P^2 + Q^2 + R'^2 - 2PQ + 2PR' + 2QR' = (P + R' - Q)^2 + 4QR',$$

а это, при нашихъ предположеніяхъ, есть количество положительное.

Также, нельзя имѣть $P > 0$, $Q < 0$, $R < 0$; ибо, положивъ $Q = -Q'$, $R = -R'$, первая часть (5) будетъ

$$P^2 + Q'^2 + R'^2 + 2PQ' - 2PR' - 2Q'R' = (Q' - R')^2 + P^2 + 2PQ' - 2PR',$$

количество существенно-положительное.

Итакъ достаточно проверить, дѣлаетъ ли какой-либо корень ур-нія (5) одно изъ количествъ P , Q , R , положительнымъ.

Замѣтивъ, что ур. (1) не можетъ имѣть рѣшеній, ибо сумма положительныхъ количествъ не можетъ быть нулемъ, остается рассмотреть, какому изъ множителей (2), (3), (4) принадлежитъ тотъ или другой корень резольвента.

Разсмотримъ, напр., при какихъ условіяхъ нѣкоторый корень ур. (5) обращать въ нуль множитель $\sqrt{P} + \sqrt{Q} - \sqrt{R}$?

Если этотъ корень удовлетворяетъ ур-нію (2), то онъ удовлетворяетъ и ур-нію

$$(\sqrt{P} + \sqrt{Q} + \sqrt{R})(\sqrt{P} + \sqrt{Q} - \sqrt{R}) = 0 \dots (6),$$

первый множитель котораго не обращается въ нуль ни при какомъ дѣйствительномъ значеніи x . И обратно, всякій корень (6) удовлетворяетъ и ур-нію (2).

Но ур. (6) можно написать такъ

$$P + Q - R + 2\sqrt{PQ} = 0 \dots (7).$$

Всякій корень ур-нія (2), удовлетворяя (7)-ю, долженъ удовлетворять условію

$$P + Q - R < 0 \dots (8).$$

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что корень ур-нія (5) будетъ удовлетворять ур-нію

$$\sqrt{P} - \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0, \text{ если } P + R - Q < 0 \dots (9),$$

и уравненію

$$-\sqrt{P} + \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0, \text{ если } -P + R + Q < 0 \dots (10).$$

Но какой-либо изъ корней ур-нія (5) служатъ корнемъ (2), (3) или (4); слѣд., необходимо, чтобы одно изъ неравенствъ (8), (9) или (10) удовлетворялось, т.-е. чтобы для одного изъ дѣйствительныхъ корней резольвента одно изъ положительныхъ количествъ P , Q , R было больше суммы двухъ другихъ. Оче-

видно, что таково будет только одно изъ нихъ, и корень ур—нія (5) удовлетворяетъ

$$\begin{aligned} \text{уравненію } \sqrt{P} - \sqrt{Q} - \sqrt{R} &= 0, & \text{если } P + Q < R; \\ & \sqrt{P} - \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0, & \text{если } P + R < Q; \\ & -\sqrt{P} + \sqrt{Q} - \sqrt{R} = 0, & \text{если } Q + R < P. \end{aligned}$$

Уравненіе же $\sqrt{P} + \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0$ не можетъ имѣть дѣйствительныхъ корней.

547. Примѣръ. Решить уравненіе

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} + \sqrt{c-x} = 0,$$

гдѣ a, b, c —нѣкоторыя дѣйствительныя количества.

Въ этой формѣ записи содержатся 4 уравненія:

$$\begin{aligned} \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} + \sqrt{c-x} &= 0 \quad . \quad . \quad (m), \\ \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} - \sqrt{c-x} &= 0 \quad . \quad . \quad (n), \\ \sqrt{a+x} - \sqrt{b-x} + \sqrt{c-x} &= 0 \quad . \quad . \quad (p), \\ \sqrt{a+x} - \sqrt{b-x} - \sqrt{c-x} &= 0 \quad . \quad . \quad (q). \end{aligned}$$

Перемножая эти уравненія, найдемъ резольвентъ

$$3x^2 + 2(a-b+c)x - (a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) = 0 \quad . \quad (1).$$

Условіе дѣйствительности корней этого уравненія будетъ

$$(a+b+c)^2 + 3(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) > 0,$$

или

$$a^2 + b^2 + c^2 - (bc + ca + ab) \geq 0,$$

или еще, расположивъ по степенямъ c , напр.,

$$c^2 - (a+b)c + a^2 + b^2 - ab \geq 0.$$

Но корни тринома въ c мнимы, ибо его реализантъ

$$(a+b)^2 - 4(a^2 + b^2 - ab)$$

приводится къ $-3(a-b)^2$; слѣд., при всѣхъ значеніяхъ буквъ a, b, c триномъ положителенъ, и корни ур—нія (1) всегда дѣйствительны.

Посмотримъ теперь, какіе знаки даютъ эти корни подрадикальнымъ количествамъ уравненій (m) (n) . . . Подставимъ a вмѣсто x въ первую часть ур—нія (1); эта подстановка дастъ въ результатъ: $-(b-c)^2$; слѣд., одинъ изъ корней $> -a$, другой $< -a$. Для перваго, слѣд., $x+a > 0$, для втораго $x+a < 0$. На основаніи вышеизложеннаго анализа заключаемъ, что мень-

пшй корень. x' , будетъ меньше меньшаго изъ количествъ $-a$, $-b$, $-c$, и дѣлаеть всѣ три радикала мнимыми; большшй корень, x'' , больше большаго изъ количествъ $-a$, $-b$, $-c$, и дѣлаеть всѣ три радикала дѣйствительными

Разсмотримъ сначала большшй корень x'' . Во-1-хъ, онъ не можетъ удовлетворять ур-ншю (m). Чтобы онъ удовлетворялъ ур-ншю (n), необходимо, чтобы было $(a+x) + (b+x) < c+x$, или $x < c-a-b$. Подстановка въ ур. (1) $c-a-b$ вмѣсто x , какъ легко видѣть, даетъ результатъ

$$4(c-a)(c-b).$$

Пусть $a > b > c$, что нисколько не вредитъ общности заключенш; въ такомъ случаѣ, этотъ результатъ положительнъ, и слѣд., $c-a-b$ лежать внѣ интервала корней резольвента, и чтобы корень x'' былъ меньше $c-a-b$, необходимо, чтобы полусумма корней, равная $-\frac{a+b+c}{3}$, была меньше $c-a-b$, отсюда легко найдемъ, что должно быть: $c > \frac{a+b}{2}$, или, что то же, $c > a$, $c > b$.

Дѣлавъ подобное же изслѣдованше по отношенш къ ур-мъ (p) и (q), убѣдимся, что корень x'' будетъ удовлетворять

уравненшю (n), если $c > \frac{a}{b}$;

уравненшю (p), если $b > \frac{a}{c}$;

уравненшю (q), если $a > \frac{b}{c}$.

Перейдемъ къ корню x' , который дѣлаеть всѣ три радикала мнимыми. Чтобы этотъ корень удовлетворялъ одному изъ ур-ншй (m), (n) . . . , необходимо, чтобы коэффициентъ при $\sqrt{-1}$ былъ нулемъ, т.-е. должно быть

$$\sqrt{-a-x} + \sqrt{-b-x} \pm \sqrt{-c-x} = 0 \dots (2).$$

отсюда снова четыре ур-ншя. Составляя резольвентъ, получимъ снова ур. (1), котораго корень x' , дѣлающшй радикалы ур. (2) дѣйствительными, необходимо удовлетворяеть одному изъ ур-ншй (2). Очевидно, что никакое значенше x не можетъ удовлетворять ур-ншю (m'). Корень x' будетъ удовлетворять ур-ншю (n'), если будетъ

$$-c < -\frac{a}{b}, \text{ т.-е. если } c < \frac{a}{b};$$

этотъ корень удовлетворяеть

уравненшю (p'), если $b < \frac{a}{c}$,

> (q'), если $a < \frac{b}{c}$.

Резюмируя сказанное, заключаемъ, что:

ур—ніе (m) не имѣетъ рѣшеній;

ур—нію (n) удовлетворяетъ корни: x' , если $c < \frac{a}{b}$, и x'' , если $c > \frac{a}{b}$,

» (p) » » x' , » $b < \frac{a}{c}$, и x'' , » $b > \frac{a}{c}$,

» (q) » » x' , » $a < \frac{b}{c}$, и x'' , » $a > \frac{b}{c}$.

548. Что касается проверки корней, то иногда ее можно дѣлать и другими приемами. Пусть, напр., требуется рѣшить ур—ніе.

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{a}.$$

Возвышая первый разъ въ квадратъ, найдемъ: $2\sqrt{a^2 - x^2} = a$; возвысивъ въ квадратъ другой разъ, получимъ: $4a^2 - 4x^2 = a^2$ или $x^2 = \frac{3}{4}a^2$, откуда $x = \pm \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Подставляя то или другое значеніе x въ данное ур., одинаково находимъ, по сокращеніи на \sqrt{a} :

$$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

Такъ какъ оба части этого равенства положительны, то для проверки его можемъ ихъ возвысить въ квадратъ; находимъ $1 + 1 + 1 = 1$, что неверно, слѣд. ни одинъ изъ корней не удовлетворяетъ данному ур—нію. Но если въ немъ передъ вторымъ радикаломъ взять $-$, то получится $1 - 1 + 1 = 1$, что вѣрно. Заключаемъ, что найденные корни принадлежатъ ур—нію

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a}.$$

549. Для проверки рѣшеній можно иногда съ успѣхомъ примѣнять преобразование сложнаго радикала въ алгебраическую сумму простыхъ радикаловъ. Пусть требуется рѣшить ур—ніе.

$$x + \sqrt{x} = a$$

и проверить рѣшенія. Изолирую радикалъ, имѣемъ $\sqrt{x} = a - x$, а возвышая въ квадратъ, получаемъ

$$x^2 - (2a + 1)x + a^2 = 0.$$

Корни этого ур—нія, которое общѣ даннаго, дѣйствительны при условіи $(2a + 1)^2 - 4a^2 > 0$ или $a > -\frac{1}{4}$. Полагая это условіе выполненнымъ, находимъ 2 дѣйствительныхъ корня:

$$x' = \frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2}, \quad x'' = \frac{2a + 1 - \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

Написать предложенное ур-іе въ видѣ $\sqrt{x} = a - x$, подставляемъ первый корень x' ; въ первой части получается сложный радикалъ, который разлагаемъ на два простыхъ:

$$\sqrt{2a+1+\sqrt{4a+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1} + 2\sqrt{a^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2a+1} = 2\sqrt{a^2}.$$

Когда $a > 0$ и равно $+x$, то $\sqrt{a^2} = x$; если же $a < 0$ и равно $-x$, то $\sqrt{a^2} = -x$; но легко видѣть, что въ обоихъ случаяхъ

$$\sqrt{2a+1+\sqrt{4a+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a+1}.$$

Вторая же часть $a - x$ ур-нія обращается въ

$$a = \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a+1};$$

заключаемъ, что x' , не дѣлая обѣ части ур-нія $\sqrt{x} = a - x$ равными, не удовлетворяетъ этому ур-нію; но легко видѣть, что этотъ корень удовлетворяетъ ур-нію $x - \sqrt{x} = a$.

Постановка второго корня x'' даетъ въ первой части ур-нія $\sqrt{x} = a - x$:

$$\sqrt{2a+1-\sqrt{4a+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1} - 2\sqrt{a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1} - 2\sqrt{a^2}.$$

При $a > 0$ это выраженіе приводится къ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$; при $a < 0$ къ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$; между тѣмъ какъ вторая часть, $a - x''$, даетъ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$; заключаемъ, что x'' удовлетворяетъ предложенному ур-нію только при $a > 0$. Итакъ:

при $a < -\frac{1}{4}$ корни ур-нія мнимы;

при $-\frac{1}{4} < a < 0$ ур-іе не имѣетъ рѣшеній;

при $a > 0$ оно имѣетъ 1 корень, равный $\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

550. При рѣшеніи ирраціональных ур-ній, какъ и всегда, слѣдуетъ пользоваться всеми средствами, ведущими къ упрощенію вычисленій; въ этомъ отношеніи съ успѣхомъ примѣняются иногда и нѣкоторые искусственные приемы.

1. Такъ для рѣшенія ур-нія

$$\begin{aligned} \sqrt{5x-4} + \sqrt{5-x} &= \sqrt{4x-1} \\ \sqrt{5x-4} - \sqrt{5-x} &= \sqrt{4x-1} \end{aligned}$$

примѣняемъ свойство пропорціи (§ 305, II. (10)), и тогда получаемъ, по со-

кращеніи на 2: $\frac{5x-4}{5-x} = \sqrt{4x}$, отсюда, по возвышеніи въ квадратъ и по освобожденіи отъ знаменателя: $5x-4=20x-4x^2$, или $4x^2-15x+4=0$. Легко проверить, что оба корня этого ур-нія: $x'=4$, $x''=\frac{1}{4}$ удовлетворяютъ данному ур-нію.

2. Рѣшить ур-ніе $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$.

Примѣняя приемъ, указанный въ § 540, прибавляемъ къ обѣимъ частямъ ур-нія по 18, и въ ур-ніи

$$x^2-7x+18+\sqrt{x^2-7x+18}=42$$

полагаемъ $\sqrt{x^2-7x+18}=y$; рѣшивъ ур-ніе въ y

$$y^2+y-42=0,$$

находимъ корни: $y'=6$, $y''=-7$. Отбрасывая второй, ибо въ данномъ ур-ніи передъ радикаломъ стоитъ знакъ $+$, получаемъ ур-ніе: $\sqrt{x^2-7x+18}=6$, отсюда $x^2-7x+18=36$. Легко видѣть, что корни этого ур-нія: $x=9$, $x''=-2$ удовлетворяютъ данному ур-нію.

3. Пусть требуется рѣшить ур-ніе

$$(x+2)^2+2\sqrt{x(x-2)}=3, \quad x=46+2x,$$

это ур. легко привести къ виду: $x^2+2x, x+2x, x^2=42$ или

$$(x+\sqrt{x})^2+(x+\sqrt{x})=42 \quad \dots \quad (2)$$

Положивъ $x+\sqrt{x}=y$, получаемъ ур-ніе $y^2+y-42=0$, имѣющее корни $y=6$, $y''=-7$. Затѣмъ рѣшаемъ ур-нія: $x+\sqrt{x}=6$, или, освободивъ отъ радикала, $x^2-13x+36=0$; и $x+\sqrt{x}=-7$, или, по освобожденіи отъ радикала, $x^2+13x+49=0$. Первое имѣетъ корни 9 и 4; второе $=\frac{-13 \pm 3\sqrt{3}}{2}$. Проверка покажетъ, что изъ нихъ ур-нію (2) удовлетворяютъ только 4 и $-\frac{13+3\sqrt{3}}{2}$.

Примѣчаніе. Для проверки корня $-\frac{13+3\sqrt{3}}{2}$ преобразовываемъ

$$\sqrt{\frac{13}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}} \cdot i \text{ по формулѣ } § 417,6, \text{ въ } \frac{3\sqrt{3}}{2}+i,$$

а слѣдовательно, $\sqrt{\frac{13+3\sqrt{3}}{2}} \cdot i$ въ $\frac{3\sqrt{3}}{2}+i$, и подставляемъ въ (2).

4. Прежде освобожденія ур-нія отъ радикаловъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

полезно изслѣдовать, имѣтъ ли общаго множителя, на который можно бы было сократить уравненіе. Такъ, въ примѣрѣ

$$\sqrt{x^2 - 7ax + 10a^2} - \sqrt{x^2 + ax - 6a^2} = x - 2a,$$

разложивъ подрадикальные триномы на множителей, находимъ

$$\sqrt{(x - 2a)(x - 5a)} - \sqrt{(x - 2a)(x + 3a)} = x - 2a.$$

Сокративъ на общаго множителя всѣхъ членовъ, $\sqrt{x - 2a}$, найдемъ

$$\sqrt{x - 5a} - \sqrt{x + 3a} = \sqrt{x - 2a}$$

и, по освобожденіи отъ радикаловъ, получаемъ ур. $3x^2 - 8ax - 60a^2 = 0$, изъ котораго $x = 6a$, $x'' = -\frac{10a}{3}$. Приравнявъ нулю множителя $\sqrt{x - 2a}$, имѣемъ еще корень: $x''' = 2a$.

Повѣрка покажетъ, что изъ числа найденныхъ корней, $6a$ не удовлетворяетъ предложенному уравненію, которое, такимъ образомъ, имѣетъ два корня: $-\frac{10a}{3}$ и $2a$.

Этимъ же приѣмомъ упрощаемъ рѣшеніе уравненій

$$(1) \sqrt{2x^2 - 9x + 4} + 3\sqrt{2x - 1} = \sqrt{2x^2 - 21x - 11},$$

$$(2) \sqrt{4x^2 - 7x - 15} - \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x^2 - 9},$$

удаливъ изъ перваго предварительно общ. множ. $\sqrt{2x - 1}$, а изъ втораго $\sqrt{x - 3}$. Рѣшеніе (1) приводится такимъ образомъ къ рѣшенію пары: $\sqrt{2x - 1} = 0$ и $\sqrt{x - 4} + 3 = \sqrt{x + 11}$, а втораго — пары: $\sqrt{x - 3} = 0$ и $\sqrt{4x + 5} - \sqrt{x} = \sqrt{x + 3}$. Найдемъ, что ур-нію (1) удовлетворяютъ корни: 5 и $\frac{1}{2}$, а ур-нію (2): 1 и 3 .

5. Вотъ еще полезный искусственный приѣмъ. Пусть имѣемъ ур-ніе

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 2} = \sqrt{2x^2 + 5x - 9} - 1 \dots (1)$$

Имѣемъ тождественно

$$(2x^2 + 5x - 2) - (2x^2 + 5x - 9) = 7 \dots (2)$$

Раздѣливъ (2) на (1), получимъ

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 2} + \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 7 \dots (3)$$

(2) есть тождество, вѣрное для всякихъ значеній x , тогда какъ (1) есть уравненіе, вѣрное лишь для нѣкоторыхъ значеній x ; слѣд., и (3) есть ур-ніе, вѣрное для тѣхъ же значеній x . Складывая (1) съ (3), имѣемъ

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 4,$$

откуда

$$r' = 2, \quad r'' = -4\frac{1}{2}.$$

Рѣшая этимъ способомъ ур-нія

$$(1) \sqrt{3x^2 - 2x + 9} + \sqrt{3x^2 - 2x - 4} = 13,$$

$$(2) \sqrt{2r^2 - 7r + 1} = \sqrt{2r^2 - 9r + 4} + 1,$$

$$(3) \sqrt{3r^2 - 7r - 30} = \sqrt{2r^2 - 7r - 5} - x - 5,$$

пользуемся тождествами:

$$\text{для (1):} \quad (3x^2 - 2x + 9) - (3x^2 - 2x - 4) = 13$$

$$\text{для (2):} \quad (2r^2 - 7r + 1) - (2r^2 - 9r + 4) = 2r - 3,$$

$$\text{для (3):} \quad (3x^2 - 7x - 30) - (2x^2 - 7x - 5) = x^2 - 25,$$

и находимъ корни:

$$(1) 4 \text{ и } -\frac{10}{3}; \quad (2) 0 \text{ и } 5; \quad (3) 6 \text{ и } -\frac{5}{2}.$$

551. Приводимъ, въ заключеніе, примѣры на ирраціональныя ур-нія, содержащія радикалы выше второго порядка.

$$1. \text{ Рѣшить ур } \sqrt[3]{a} - x = \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{2a}.$$

Возвышаемъ обѣ части въ кубъ, применяя формулу $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$; получаемъ:

$$a - x - a - x = 3\sqrt[3]{a^2} - x^2(\sqrt[3]{a} - x + \sqrt[3]{a - x}) = 2a.$$

Положимъ и замѣчая, что выраженіе въ скобкахъ, въ силу даннаго ур., равно $\sqrt[3]{2a}$, находимъ ур.

$$\sqrt[3]{a^2} - x^2 \cdot \sqrt[3]{2a} = 0, \text{ или } \sqrt[3]{a^2} - x^2 = 0, \text{ откуда } a^2 - x^2 = 0.$$

откуда

$$x = \pm a.$$

Оба корня удовлетворяютъ предложенному ур-нію.

$$2. \text{ Рѣшить ур-ніе } \sqrt{1 - \frac{a}{1+x}} \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{x}{1+x}} + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} = 2 \left[\frac{1-a^2}{(1+a)^2} \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Сокративъ дробь второй части на $1 + a$; положивъ, затѣмъ, $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = y$, и слѣд. $\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{y}$, получаемъ ур-ніе

$$\sqrt{1 - \frac{a}{1+x}} \cdot y + \frac{1}{y} = 2 \sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}, \text{ или } \sqrt{1 - \frac{a}{1+x}} \cdot y^2 - 2 \sqrt[4]{1 - \frac{a}{1+a}} \cdot y + 1 = 0,$$

откуда

$$y = \sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Такимъ образомъ получаемъ ур. въ x : $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}$ или $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1+a}{1-a}$, откуда $x = -a$.

Корень этотъ удовлетворяетъ предложенному ур—нію.

3. Рѣшить ур—ніе

$$\left(\sqrt[4]{x^2 + \frac{2}{x^2}} - \sqrt[4]{x^2 - \frac{2}{x^2}} \right)^2 = 1300 - \frac{2}{x^2}.$$

Выполнивъ умноженіе въ первой части, освободивъ ур. отъ знаменателя и приведя въ порядок, находимъ:

$$x^{\frac{8}{3}} - 97x^{\frac{4}{3}} + 1296 = 0.$$

Это ур—ніе — квадратное относительно $x^{\frac{4}{3}}$ — даетъ: $x^{\frac{4}{3}} = 81$, $x^{\frac{4}{3}} = 16$, откуда:

$$x^4 = 81^3 = (3^4)^3 = (3^3)^4 = 27^4; \quad x^4 = 16^3 = (2^4)^3 = (2^3)^4 = 8^4.$$

Рѣшивъ оба двучленные ур—нія четвертой степени, находимъ 8 корней:

$$\pm 27; \pm 27i; \pm 8; \pm 8i.$$

552. Въ заключение этой главы докажемъ теорему, что возможно всякое иррациональное ур—ніе освободить отъ радикаловъ.

Теорема. *Всякое иррациональное ур. можетъ быть освобождено отъ радикаловъ, каковы бы они ни были и сколько бы ихъ ни было.*

Пусть данное ур. содержитъ радикаль $\sqrt[m]{x}$, гдѣ x — выраженіе, содержащее неизвѣстныя. Обозначивъ $\sqrt[m]{x}$ буквою x и замѣнивъ различныя степени $\sqrt[m]{x}$ степенями x , всегда можемъ привести ур. къ виду ур—нія рациональнаго относительно x . Освободивъ его отъ дробей, получимъ ур. вида:

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots = 0 \dots (1).$$

гдѣ A_0, A_1, \dots не содержатъ $\sqrt[m]{x}$, но могутъ содержать другіе радикалы. Если здѣсь окажутся члены съ степенями $x = sa$, большими m , то въ такихъ членахъ можно степени x сдѣлать ниже. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ членъ съ x^k , гдѣ $k \geq m$; раздѣливъ k на m и обозначивъ цѣлое число въ частномъ буквою q , а остатокъ r , напишемъ:

$$A_k x^k = A_k x^{mq+r} = A_k x^{mq} \cdot x^r;$$

Освобожденіе ур—нія (2) отъ радикаловъ можно еще выполнить такъ. Умножимъ обѣ части его на полиномъ

$$B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_{m-2}x^{m-2} + B_{m-1}x^{m-1},$$

гдѣ коэффициенты на время оставляемъ неопредѣленными. Умноженіе даетъ

$$A_0B_0 + (A_0B_1 + B_0A_1)x + \dots + A_{m-1}x^{2m-2} = 0.$$

Понизивъ степени x , гдѣ онѣ $> m$, получимъ ур.

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_{m-1}x^{m-1} = 0, \quad (4),$$

гдѣ C_0, C_1, \dots суть 1-я степени относительно коэффициентовъ B . Пользуясь неопредѣленностью послѣднихъ, полагаемъ

$$C_1 = 0, C_2 = 0, \dots, C_{m-1} = 0.$$

откуда найдемъ всѣ $m - 1$ коэффициентовъ B_0, B_1, \dots, B_{m-1} . Подставивъ ихъ въ ур. (4), получимъ

$$C_0 = 0$$

ур—ніе, не содержащее радикала $\sqrt[m]{2}$.

Примѣчаніе. Этотъ способъ уничтоженія ирраціональности въ ур—ніяхъ умноженіемъ на нѣкоторый полиномъ, очевидно, можно прилагать и для уничтоженія ирраціональности въ знаменателяхъ дробей: для этого нужно только умножить числителя и знаменателя на прилично выбранный многочленъ.

ГЛАВА XXXVII.

Системы уравненій второй степени и высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ.

Системы уравненій, изъ которыхъ одно второй, остальные — первой степени. — Системы двухъ уравненій второй степени. Системы уравненій второй степени болѣе чѣмъ съ двумя неизвѣстными — Системы уравненій высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ.

553. Уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными x и y есть цѣлое рациональное ур—ніе, содержащее члены: съ квадратами обоихъ неизвѣстныхъ, съ ихъ произведеніемъ, съ первыми степенями неизвѣстныхъ, и члены, независящіе отъ неизвѣстныхъ; слѣд. это есть ур—ніе вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Подобно этому, общий видъ ур—ній второй степени съ тремя неизвѣстными есть

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

и т. д.

Системою уравненій второй степени съ двумя или нѣсколькими неизвѣстными называютъ такую систему, въ которой по крайней мѣрѣ одно ур—нiе—второй степени, а остальные—первой или второй степени.

1. Системы ур—нiй, изъ которыхъ одно—второй степени.

554. Система ур—нiй съ двумя неизвѣстными, изъ которыхъ одно—второй, а другое—первой степени, имѣетъ видъ:

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, & (1) \\ Lx + My + N = 0. & (2) \end{cases}$$

Выражая изъ (2) y въ зависимости отъ x , имѣемъ

$$y = -\frac{Lx + N}{M}.$$

Внося это значеніе въ ур (1), получимъ:

$$Ax^2 - \frac{Bx(Lx + N)}{M} + \frac{C(Lx + N)^2}{M^2} + Dx - \frac{E(Lx + N)}{M} + F = 0.$$

Выполняя дѣйствія, располагая члены по степенямъ x и помня для краткости

$$\begin{aligned} P &= AM^2 - BLM + CL^2, \quad Q = BMN - 2CLN + DM^2 - ELM, \\ R &= CN^2 - EMN + FM^2, \end{aligned}$$

замѣняемъ данную систему ей эквивалентною:

$$Px^2 + Qx + R = 0, \quad y = -\frac{Lx + N}{M}.$$

Первое ур—нiе дастъ для x два значенія: x' и x'' ; внося ихъ поочередно во второе ур., найдемъ соотвѣтствующія значенія для y : y' и y'' . Итакъ, данная система ур—нiй имѣетъ двѣ системы рѣшеній:

$$x = x', \quad y = y' \quad \text{и} \quad x = x'', \quad y = y''.$$

Эти рѣшенія будутъ мнимы, если $Q^2 - 4PR < 0$, представляютъ двѣ дѣйствительныя системы при $Q^2 - 4PR > 0$; и сливаются въ одну систему рѣшеній при $Q^2 - 4PR = 0$.

Примѣръ. Решить систему

$$\begin{aligned} 5x^2 - 8xy + y^2 - 7x + 5y + 4 &= 0, \\ 6x - y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Изъ второго ур—нія имѣемъ: $y = 6x - 4$; подставляя это значеніе y въ первое ур., находимъ: $7x^2 - 7x = 0$, откуда: $x' = 0$, $x'' = 1$. При $x' = 0$ имѣемъ $y' = -4$; при $x'' = 1$ получаемъ $y'' = 2$. Итакъ, находимъ двѣ системы рѣшеній:

$$x' = 0, y' = -4; x'' = 1, y'' = 2.$$

555. Пусть дана система n ур—ній съ n неизвѣстными, и пусть одно изъ этихъ ур—ній — второй степени, а остальные — первой. При помощи $n - 1$ ур—ній первой степени можно $n - 1$ неизвѣстныхъ выразить черезъ n -ое; такимъ образомъ получимъ $n - 1$ новыхъ ур—ній 1-й степени вида

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ z &= a'x + b' \\ u &= a''x + b'' \\ &\dots \end{aligned}$$

Внося все эти значенія въ ур—ніе второй степени, получимъ квадратное ур. съ неизвѣстнымъ x ; изъ него найдемъ для x два значенія: x' и x'' . Каждому изъ этихъ значеній соответствуетъ своя система значеній неизвѣстныхъ y, z, u, \dots . Данная ур—нія имѣютъ двѣ системы рѣшеній.

Примѣръ. Рѣшить систему

$$\begin{aligned} x^2 + 3x^2 + 2yz + 10xy + 2x + 5y + 25 &= 0, \\ 5x + 22y + 7z &= 4, \\ 21x - 7y + z &= 81. \end{aligned}$$

Выражая изъ двухъ послѣднихъ ур—ній y и z черезъ x , имѣемъ

$$y = 2x - 3, z = -7x + 10;$$

внося въ первое ур—ніе, находимъ квадратное ур. въ x :

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

откуда: $x' = 1$, $x'' = 2$. Слѣд. рѣшенія предложенной системы будутъ:

$$x' = 1, y' = -1, z' = 3; \text{ и } x'' = 2, y'' = 1, z'' = -4.$$

556. Разсмотримъ рѣшеніе нѣкоторыхъ замѣчательныхъ системъ, прилагая особые искусственные приемы, болѣе изящные, нежели указанный общій приемъ.

I. Рѣшить систему

$$\left. \begin{aligned} x + y &= a \\ xy &= b^2 \end{aligned} \right\}.$$

Такъ какъ здѣсь дается сумма и произведеніе неизвѣстныхъ, то послѣднія опредѣляются какъ корни квадратнаго ур—нія, имѣющаго коэффициентомъ при первой степени неизвѣстнаго количество — a , а извѣстнымъ членомъ b^2 :

$$z^2 - az + b^2 = 0,$$

откуда

$$x' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}, \quad x'' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

Одно значеніе x принимаемъ за x , другое за y ; такимъ образомъ получаемъ двѣ системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \\ y' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x'' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \\ y'' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \end{cases}$$

Что такъ должно быть, понятно а priori, ибо x и y въ данныхъ уравненіяхъ входятъ одинаковымъ образомъ.

Другой приемъ. Возвысивъ первое уравненіе въ квадратъ, имѣемъ: $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$; помноживъ второе ур. на 4 и вычтя изъ предыдущаго, находимъ: $x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b^2$, или $(x - y)^2 = a^2 - 4b^2$; откуда $x - y = \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}$. Такимъ образомъ, предложенная система можетъ быть замѣнена двумя ей эквивалентными:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = \sqrt{a^2 - 4b^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = a \\ x - y = -\sqrt{a^2 - 4b^2}. \end{cases}$$

Рѣшая ту и другую, найдемъ прежнія двѣ системы рѣшеній.

II. *Рѣшить систему*

$$\begin{aligned} x - y &= a \\ xy &= b^2. \end{aligned}$$

Легко эту систему привести къ предыдущей: стоитъ только положить $y = -y'$. Такимъ образомъ получимъ ур.—нія

$$x + y' = a, \quad xy' = -b^2,$$

изъ которыхъ видно, что x и y' суть корни ур.—нія

$$z^2 - az - b^2 = 0,$$

слѣд., вторая система имѣетъ рѣшенія:

$$\begin{cases} x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \\ y' = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \\ y' = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}. \end{cases}$$

Подставляя сюда y вмѣсто $-y'$, найдемъ рѣшенія предложенной системы:

$$\begin{cases} x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \\ y = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \\ y = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}. \end{cases}$$

Другой приём. Возводя первое из данных уравнений в квадрат, умножая второе на 4 и складывая, получаемъ

$$(x+y)^2 = a^2 + 4b^2, \text{ откуда } x+y = \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

Такимъ образомъ предложенная система замѣняется двумя:

$$\begin{cases} x-y=a \\ x+y=\pm \sqrt{a^2+4b^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y=a \\ x+y=-\sqrt{a^2+4b^2}, \end{cases}$$

изъ которыхъ и находимъ прежнія двѣ системы рѣшеній.

III. Рѣшить систему

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x + y = b.$$

Возвысивъ вѣ квадратъ обѣ части второго уравненія, имѣемъ $x^2 + 2xy + y^2 = b^2$; вычитая изъ этого уравненія почленно первое, имѣемъ: $2xy = b^2 - a^2$, откуда

$$xy = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Такимъ образомъ извѣстны: сумма b и произведеніе $\frac{b^2 - a^2}{2}$ неизвѣстныхъ x и y ; слѣд. x и y суть корни уравненія

$$z^2 - bz + \frac{b^2 - a^2}{2} = 0.$$

Итакъ, имѣемъ двѣ системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \\ y = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \\ y = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}. \end{cases}$$

IV. Рѣшить систему

$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$x - y = b.$$

Рѣшеніе этой системы приводится къ предыдущей; ибо, положивъ $y = -y'$, получаемъ систему

$$x^2 + y'^2 = a^2, \quad x + y' = b,$$

откуда прямо можемъ написать обѣ системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \\ y = -y' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \\ y = -y' = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}. \end{cases}$$

V. Решить систему

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= a^2 \\x + y &= b.\end{aligned}$$

Исключив y , наведем ур—ние $2bx - b^2 = a^2$ — первой степени; из него

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2b}, \text{ и следовательно } y = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Можно решить эту систему еще так: замечая, что $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, мы, разделив первое ур. на второе, найдем ур.

$$x - y = \frac{a^2}{b};$$

комбинируя это ур—ние с ур—мь $x + y = b$, найдем x и y .

Подобным же образом решается система

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= a^2 \\x - y &= b.\end{aligned}$$

II. Система двух уравнений второй степени с двумя неизвестными.

557. Вообще, система двух ур—ний второй степени с двумя неизвестными приводит к полному ур—нию четвертой степени

Пусть данная система будет:

$$\begin{aligned}ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0 \quad . \quad . \quad (1) \\a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' &= 0 \quad . \quad . \quad (2)\end{aligned}$$

Исключим сначала y^2 , умножив ур. (1) на c' , (2) на c и вычтя почленно одно ур. из другого; найдем ур—ние

$$(ac' - ca')x^2 + (bc' - cb')xy + (dc' - cd')x + (ec' - ce')y + f'c - cf = 0,$$

или, обозначив каждый из коэффициентов одною буквою:

$$lx^2 + mxy + nx + py + q = 0 \quad . \quad . \quad (3).$$

Это ур—ние, въ сочетаніи съ однимъ изъ данныхъ, напр. съ (1), составитъ новую систему, эквивалентную данной. Изъ ур. (3) находимъ

$$y = -\frac{lx^2 + nx + q}{mx + p};$$

подставивъ это значеніе y въ ур. (1), получимъ

$$ax^2 - \frac{bx(lx^2 + nx + q)}{mx + p} + \frac{c(lx^2 + nx + q)^2}{(mx + p)^2} + dx - \frac{e(lx^2 + nx + q)}{mx + p} + f = 0.$$

Освободивъ это ур. отъ дробей, выполнивъ всѣ вычисленія и приведя въ порядокъ, получимъ, вообще, *полное* ур. четвертой степени:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \dots (4).$$

которое, въ соединеніи съ (3), составитъ систему, эквивалентную данной. Полное ур. четвертой степени (4) въ общемъ видѣ, хотя и можетъ быть рѣшено средствами элементарной алгебры, но обыкновенно не вводится въ кругъ ур—ній, рассматриваемыхъ въ нашихъ отдѣлахъ алгебры; элементарная алгебра занимается рѣшеніемъ ур—ній 4-й степени только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, когда напр. оно биквадратное, или возвратное, или степень его понижается до второй; въ такихъ случаяхъ безъ особаго труда найдемъ четыре значенія для x : подставивъ каждое изъ нихъ въ ур. (3), получимъ четыре соответствующія значенія для y .

Такимъ образомъ, данная система принимаетъ, вообще, четыре рѣшенія.

Примѣръ. Рѣшить систему

$$x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0 \dots (1)$$

$$2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0 \dots (2).$$

Исключивъ y^2 , получимъ ур—ніе

$$x^2 - 10xy + 6x - 18y + 21 = 0 \dots (3),$$

изъ котораго

$$y = \frac{x^2 + 6x + 21}{10x + 18} \dots (3').$$

Подставивъ найденное для y выраженіе (3') въ ур. (1), находимъ

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \dots (4)$$

ур—ніе, составляющее съ (3) систему, эквивалентную предложенной.

Но ур. (4) — биквадратное; рѣшивъ его, получимъ для x четыре значенія

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -3.$$

Вычисливъ по формулѣ (3'), соответствующія значенія y , найдемъ

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = 1.$$

Итакъ, данная система имѣетъ четыре рѣшенія:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = 1 \end{cases}.$$

558. Когда одно изъ ур—ній разлагается на два рациональных множителя первой степени, то рѣшеніе всегда можно привести къ квадратнымъ ур—ніямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, выразивъ изъ ур—нія (1) § 557 y по x , имѣемъ

$$y = \frac{-(bx + e) \pm \sqrt{(bx + e)^2 - 4c(ax^2 + dx + f)}}{2c}$$

Расположивъ подрадикальное выраженіе по степенямъ x , получимъ

$$(b^2 - 4ac)x^2 + 2(be - 2cd)x + e^2 - 4cf;$$

оно будетъ точнымъ квадратомъ при условіи

$$(be - 2cd)^2 = (b^2 - 4ac)(e^2 - 4cf);$$

какъ скоро это условіе существуетъ, значенія y будутъ раціональными:

$$y = \frac{-bx - e \pm (Px + Q)}{2c},$$

гдѣ $Px + Q$ есть $\sqrt{\quad}$ изъ подрадикальнаго выраженія; имѣемъ

$$y' = \frac{(P - b)x + Q - e}{2c}, \quad y'' = \frac{(P + b)x + Q + e}{2c};$$

слѣд. ур. (1) можно представить въ видѣ $c(y - y')(y - y'') = 0$; слѣд. это ур. будетъ удовлетворено, во-первыхъ, значеніями x и y , удовлетворяющими ур—нію

$$y = \frac{(P - b)x + Q - e}{2c} \dots (3),$$

а во-вторыхъ, такими значеніями, которыя, обращая въ нуль $y - y''$, удовлетворяютъ ур—нію

$$y = \frac{(P + b)x + Q + e}{2c} \dots (4),$$

такъ что вопросъ сводится къ рѣшенію двухъ системъ: (2), (3) и (2), (4); каждая изъ нихъ составлена изъ ур—нія 1-й ст. и ур—нія 2-й ст., а потому приведетъ къ ур—нію 2-й ст. въ x , для котораго и получится 4 значенія; подставляя ихъ въ ур—нія (3) и (4), найдемъ соотвѣтствующія значенія y .

Примѣръ. Рѣшить систему

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 + 3x - 2y - 5 = 0,$$

$$x^2 + xy - y^2 + x - y - 6 = 0.$$

Изъ перваго имѣемъ

$$y = \frac{5x + 2 \pm \sqrt{x^2 - 16x + 64}}{6} = \frac{5x + 2 \pm (x - 8)}{6},$$

откуда

$$y = x - 1, \quad y = \frac{2x + 5}{3}.$$

Подставляя вмѣсто y его величину $x - 1$ во второе данное уравненіе, получаемъ: $x^2 + x - 6 = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; а соответствующія значенія y : $y_1 = 1$, $y_2 = -4$.

Для $y = \frac{2x-1}{3}$ имѣемъ уравненіе $x^2 - 2x - 94 = 0$, изъ котораго $x_3 = 3,015$ и $x_4 = -2,834$; а соотв. значенія y : $y_3 = 3,677$ и $y_4 = -0,224$. Итакъ данная система имѣетъ рѣшенія:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 3,015 \\ y_3 = 3,677 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_4 = -2,834 \\ y_4 = -0,224 \end{cases}.$$

559. Когда одно изъ уравненій однородно по отношенію къ x и y , можно пользоваться слѣдующимъ приемомъ. Пусть, напр., ур. (1) § 557 однородно, т.-е. приводится къ

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

то, раздѣливъ всѣ его члены на y^2 , дадимъ ему видъ:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b \cdot \frac{x}{y} + c = 0.$$

Рѣшая это квадратное относительно $\frac{x}{y}$ уравненіе, найдемъ для отношенія $\frac{x}{y}$ два значенія: $\frac{x}{y} = m$, $\frac{x}{y} = m'$, откуда

$$x = my, \quad x = m'y.$$

Комбинируя каждое изъ этихъ уравненій со (2), получимъ двѣ системы, изъ коихъ каждая состоитъ изъ одного уравненія 1-й ст. и одного 2-й степени.

Примѣръ. Рѣшить систему

$$3x^2 + 13xy - 10y^2 = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

$$2x^2 + 3xy - y^2 + x + 5y - 34 = 0 \quad . \quad . \quad (2).$$

Ур. (1) даетъ: $x = \frac{2}{3}y$ и $x = -5y$. Комбинируя первое изъ этихъ уравненій со (2), находимъ два рѣшенія

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 3 \quad \text{и} \quad x_2 = -4, \quad y_2 = -6.$$

Рѣшая систему, образуемую уравненіемъ (2) съ $x = -5y$, находимъ еще два рѣшенія

$$x_3 = 5, \quad y_3 = -1 \quad \text{и} \quad x_4 = -5, \quad y_4 = 1$$

Не останавливаясь далѣе на этихъ частностяхъ, не имѣющихъ, къ тому же, большихъ приложений въ начальной алгебрѣ, перейдемъ къ рѣшенію нѣкоторыхъ замѣчательныхъ простыхъ системъ, часто встрѣчающихся въ приложенияхъ.

560. Решить систему

$$x^2 + y^2 = a, \quad xy = b$$

Умножив второе на 2 и сложив съ первымъ, а потомъ вычтя изъ перваго, находимъ

$$x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b, \quad \text{или } (x + y)^2 = a + 2b \quad . \quad (1)$$

$$\text{и } x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b, \quad \text{или } (x - y)^2 = a - 2b \quad . \quad (2)$$

Изъ ур—ній (1) и (2) находимъ

$$x + y = \pm \sqrt{a + 2b}, \quad x - y = \pm \sqrt{a - 2b}.$$

Отсюда, складывая, а потомъ вычитая, имѣемъ

$$x = \frac{1}{2} [\pm \sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}], \quad y = \frac{1}{2} [\pm \sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b}].$$

Комбинируя знаки всевозможными способами, получимъ четыре значенія для x и столько же для y ; чтобы изъ нихъ составить системы рѣшеній, удовлетворяющихъ даннымъ ур—ньмъ, достаточно замѣтить, что произведеніе x на y , въ силу второго ур—нія, должно давать b . Легко убѣдиться, что это требованіе будетъ выполнено, если въ формулахъ x и y передъ первымъ радикаломъ возьмемъ одинаковые знаки, а передъ вторымъ противоположные. Такимъ образомъ получимъ 4 системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} [\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}] \\ y_1 = \frac{1}{2} [\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}] \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} [\sqrt{a - 2b} - \sqrt{a + 2b}] \\ y_2 = \frac{1}{2} [\sqrt{a - 2b} + \sqrt{a + 2b}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} [-\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}] \\ y_3 = \frac{1}{2} [-\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}] \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{1}{2} [-\sqrt{a - 2b} + \sqrt{a + 2b}] \\ y_4 = \frac{1}{2} [-\sqrt{a - 2b} - \sqrt{a + 2b}] \end{cases}$$

Другой способъ. Возвышая въ квадратъ второе данное ур., замѣняемъ данную систему болѣе общою

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^2 y^2 = b^2 \quad . \quad (x)$$

Зная сумму a и произведеніе b^2 количествъ x^2 и y^2 , надѣемъ ихъ какъ корни квадратнаго ур—нія

$$z^2 - az + b^2 = 0;$$

$$x^2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}, \quad y^2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}.$$

Извлекая квадратные корни, получимъ:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}},$$

откуда легко составить прежнія комбинаціи соответствующих значений x и y . Легко их привести къ прежнему виду. Возьмемъ, напр., формулу λ и приложимъ къ ней преобразование сложнаго радикала

$$\pm \sqrt{A} + \sqrt{B} = \pm \left\{ \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \right\},$$

гдѣ

$$A = \frac{a^2}{2}, \quad B = \frac{a^2}{4} - b^2, \quad A^2 - B = b^2.$$

Найдемъ

$$\pm \sqrt{\frac{a^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = \pm \frac{1}{2} \{ \sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{a^2 - 2b^2} \}.$$

Такимъ же образомъ преобразуемъ и y .

561. Решить систему

$$x^2 + 2xy + y^2 - ax - ay = 0, \quad x^2 - 2xy + y^2 - bx - by = 0.$$

Эту систему можно написать въ видѣ:

$$(x + y)^2 - a(x + y) = 0, \quad (x - y)^2 - b(x - y) = 0,$$

или:

$$(x + y)(x + y - a) = 0, \quad (x - y)(x - y - b) = 0.$$

Рѣшеніе данной системы распадается на четыре другія:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y - b = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ x + y - a = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - a = 0, \\ x - y - b = 0, \end{cases}$$

изъ которыхъ получаемъ:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{b}{2} \\ y_2 = -\frac{b}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{a}{2} \\ y_3 = \frac{a}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{a + b}{2} \\ y_4 = \frac{a - b}{2} \end{cases}.$$

III. Системы уравненій второй степени болѣе нежели съ двумя неизвѣстными.

562. Примеръ I. Решить систему

$$x(x + y + z) = a^2, \quad y(x + y + z) = b^2, \quad z(x + y + z) = c^2.$$

Складывая и вынося за скобки $x + y + z$, получаемъ

$$(x + y + z)^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad \text{откуда } x + y + z = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Замѣняя въ каждомъ изъ данныхъ ур—ній $x + y + z$ его величиною, получимъ двѣ системы рѣшеній, взявъ передъ радикаломъ сперва $+$, потомъ $-$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ z = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ y = \frac{-b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ z = \frac{-c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{array} \right.$$

563. ПРИМѢРЪ П. РѢШИТЬ СИСТЕМУ

$$x^2 + yz = c \quad (1) \quad y^2 + xz = c \quad (2) \quad z^2 + xy = a \quad (3)$$

Вычитая (2) изъ (1), находимъ

$$(x - y)(x + y - z) = 0, \quad \text{или} \quad (x - y)(x + y - z) = 0.$$

Данная система распадается на двѣ:

$$\begin{array}{ll} x - y = 0 & (2) \\ y^2 + xz = c & (2) \\ z^2 + xy = a & (3) \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ll} x + y - z = 0 & (3) \\ y^2 + xz = c & (2) \\ z^2 + xy = a & (3) \end{array}$$

Рѣшимъ, напр., вторую. Приравнявая значенія z изъ (3) и (2), получаемъ

$$x + y = \frac{c - y^2}{x}, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + xy = c, \quad \text{или} \quad (x + y)^2 - xy = c,$$

или, такъ какъ изъ (3) имѣемъ $x + y = z$, то

$$z^2 - xy = c.$$

Это ур. вмѣстѣ съ (3) даетъ

$$z^2 = \frac{a + c}{2}, \quad \text{откуда} \quad z = \pm \sqrt{\frac{a + c}{2}}, \quad \text{и} \quad xy = \frac{a - c}{2}.$$

Такимъ образомъ z найдено; для опредѣленія x и y замѣчаемъ, что извѣстны: сумма $x + y$, равная z , т.-е. $\pm \sqrt{\frac{a + c}{2}}$, и произведение xy , равное $\frac{a - c}{2}$. Сл. x и y опредѣляются какъ корни ур—нія

$$X^2 \mp \sqrt{\frac{a + c}{2}} \cdot X + \frac{a - c}{2} = 0,$$

откуда:

$$X = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a + c}{8} - \frac{a - c}{2}} = \frac{\pm \sqrt{a + c} \pm \sqrt{5c - 3a}}{2\sqrt{2}}.$$

Каждое значение z дастъ намъ двѣ системы значений x и y , ибо x безразлично м. б. взято равнымъ X' или X'' , и слѣд. y равнымъ X' или X . Итакъ, получимъ 4 системы рѣшеній:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \sqrt[3]{\frac{a+c}{2}} \\ x = \frac{\sqrt[3]{a+c} + \sqrt[3]{5c-3a}}{2\sqrt[3]{2}} \\ y = \frac{\sqrt[3]{a+c} - \sqrt[3]{5c-3a}}{2\sqrt[3]{2}} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \sqrt[3]{\frac{a-c}{2}} \\ x = \frac{\sqrt[3]{a+c} - \sqrt[3]{5c-3a}}{2\sqrt[3]{2}} \\ y = \frac{\sqrt[3]{a+c} + \sqrt[3]{5c-3a}}{2\sqrt[3]{2}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = -\sqrt[3]{\frac{a-c}{2}} \\ x = \frac{-\sqrt[3]{a+c} + \sqrt[3]{5c-3a}}{2\sqrt[3]{2}} \\ y = \frac{-\sqrt[3]{a+c} - \sqrt[3]{5c-3a}}{2\sqrt[3]{2}} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = -\sqrt[3]{\frac{a+c}{2}} \\ x = \frac{\sqrt[3]{a+c} + \sqrt[3]{5c-3a}}{2\sqrt[3]{2}} \\ y = \frac{\sqrt[3]{a+c} - \sqrt[3]{5c-3a}}{2\sqrt[3]{2}} \end{array} \right.$$

IV. Системы уравненій высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ

564. Примеръ I. Решить систему

$$x + y = 17 \quad . \quad . \quad (1) \quad \quad x^3 + y^3 = 1343 \quad . \quad . \quad (2).$$

Возвысивъ ур. (1) въ кубъ, находимъ

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 4913 \quad . \quad . \quad (3).$$

Это ур—ніе общѣе ур—ній (1); именно, мы знаемъ, что если обозначить одинъ изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ 1 буквою α , то ур—нію (3) удовлетворяютъ значенія x и y , повѣряющія каждое изъ ур—ній: $(x + y) = 17\alpha$, $x + y = 17\alpha^2$, $x + y = 17\alpha^3$. Но если мы замѣнимъ въ немъ $x + y$ числомъ 17, то этия мы выразимъ, что корни его удовлетворяютъ ур—нію (1), и слѣд. паразитные корни будутъ устранены. Итакъ, замѣнивъ въ ур—нии (3) $x + y$ числомъ 17, подставимъ вмѣсто него ур—ніе $x^3 + y^3 + 51xy = 4913$, или, въ силу ур—нія (2)

$$51xy = 4913 - 1343, \text{ или } xy = 70.$$

Зная сумму и произведеніе x и y , найдемъ эти количества, какъ корни квадратнаго ур—нія

$$u^2 - 17u + 70 = 0,$$

откуда.

$$x' = 7, y' = 10, \text{ или } x'' = 10, y'' = 7.$$

Кромѣ того, данная система имѣетъ третью систему рѣшеній, образуемую безконечными и противоположными по знаку величинами x и y .

Другой способъ. Можно бы было употребить еще слѣдующій методъ. Ур-ніе (2) можно представить въ видѣ:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=1343, \text{ или, замѣнивъ } x+y \text{ числомъ } 17:$$

$$x^3-xy+y^3=79.$$

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ по $3xy$, получимъ:

$$(x+y)^3=79+3xy, \text{ или } 289=79+3xy, \text{ или } xy=70$$

Далѣе вычисленіе окончивается какъ выше указано.

565. Примеръ II. Решить систему

$$x+y=a \dots (1) \quad x^3+y^3=b^3 \dots (2)$$

Возвысимъ въ пятую степень обѣ части ур-нія (1) и сгруппировавъ известнымъ образомъ члены, получимъ:

$$x^5+y^5+5xy(x^3+y^3)+10x^2y^2(x+y)=a^5,$$

или

$$x^5+y^5+5xy[(x+y)^3-3(x+y)xy]-10(x+y)x^2y^2=a^5 \dots (3)$$

Это ур-е эквивалентно (1): если обозначимъ буквою α одинъ изъ минимыхъ корней 5-го порядка изъ 1, то ур-нію (3) удовлетворяютъ корни каждаго изъ уравненій:

$$x-y=a\alpha, x+y=a\alpha^2, x+y=a\alpha^3, x+y=a\alpha^4, x+y=a\alpha^5.$$

И если мы замѣнимъ въ немъ $x+y$ количествомъ a , то этимъ самымъ получимъ пять изъ него рѣшеній четырехъ паразитичeskихъ уравненій, и останется одно истинное.

$$x^3+y^3+5xy(a^3-3axy)+10a^2xy^2=a^3 \dots (4).$$

Уравненіе (4) выражаетъ систему, эквивалентную данной.

Ур-е (4) можно представить въ видѣ

$$5a(xy)^2-5a^2(xy)+a^3-b^3=0.$$

Будучи квадратнымъ относительно xy , оно дастъ два значенія для xy : каждое изъ нихъ комбинируемъ съ ур-ніемъ $x+y=a$. Такимъ образомъ получимъ четыре системы рѣшеній: пятую систему составятъ значенія x и y безконечныя по величинѣ и противоположныя по знаку.

566. Примеръ III. Решить систему

$$x+y+z=a \dots (1) \quad x^2+y^2+z^2=a^2 \dots (2) \quad x^3+y^3+z^3=a^3 \dots (3)$$

Возвысивъ обѣ части ур—нія (1) въ квадратъ, получаемъ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = a^2,$$

или, по причинѣ ур—нія (2):

$$xy + xz + yz = 0 \quad . \quad . \quad (4) \quad \text{откуда} \quad xy = -z(x + y) \quad . \quad . \quad (5).$$

Возвысивъ ур. (1) въ кубъ, получимъ:

$$z^3 + (x + y)^3 + 3z(x + y)(x + y + z) = a^3,$$

или, принимая во вниманіе ур—нія (1) и (3):

$$3xy(x + y) + 3az(x + y) = 0,$$

а, въ силу соотношенія (4),

$$xy(x + y) - azy = 0, \quad \text{или} \quad xy(x + y - a) = 0 \quad . \quad . \quad (5).$$

Это ур—ніе требуетъ, чтобы было: или $xy = 0$, или $x + y = a$. Если $xy = 0$, то должно быть: или $x = 0$, или $y = 0$. При $x = 0$, ур—ніе (4) дастъ $yz = 0$. Слѣд. необходимо еще, чтобы было: или $y = 0$, или $z = 0$, причемъ при $y = 0$ будетъ $z = a$, а при $z = 0$ имѣемъ $y = a$. Итакъ имѣемъ систему

$$\begin{aligned} x' &= 0, & y' &= 0, & z' &= a; \\ x'' &= 0, & y'' &= a, & z'' &= 0. \end{aligned}$$

Если $x + y = a$, тогда $z = 0$; и по причинѣ (4) нужно еще, чтобы было $z = a$ и $y = 0$; или $x = 0$ и $y = a$. Отсюда третья система рѣшеній.

$$x''' = a, \quad y''' = 0, \quad z''' = 0.$$

Иначе, необходимо и достаточно, чтобы два изъ неизвѣстныхъ были нули, а третье a .

567. Примеръ IV. Рѣшить систему

$$\begin{aligned} xu &= yz, & x + y + z &= u = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 &= b^2, & x^4 + y^4 + z^4 + u^4 &= c^4. \end{aligned}$$

Примемъ за вспомогательныя неизвѣстныя: произведенія $xu = yz = q$, и суммы $x + u = t$ и $y + z = v$. Такимъ образомъ прямо получимъ:

$$t + v = a \quad . \quad . \quad (1) \quad t^2 + v^2 - 4q = b^2 \quad . \quad . \quad (2)$$

$$t^4 + v^4 - 4q(t^2 + v^2) - 4q^2 = c^4 \quad . \quad . \quad (3)$$

Выразивъ q изъ ур—нія (2) и подставивъ въ (3), имѣемъ

$$4(t^4 + v^4) - 4(t^2 + v^2)(t^2 + v^2 - b^2) + (t^2 + v^2 - b^2)^2 - 4c^4,$$

или

$$-8v^2t^2 + 4b^2(t^2 + v^2) + (t^2 + v^2 - b^2)^2 = 4c^4.$$

Подставивъ сюда вмѣсто $t^2 + v^2$ его величину $a^2 - 2vt$, выведенную изъ (1), и обозначивъ vt буквою S , для опредѣленія S имѣемъ ур—ніе

$$4S^2 + 4(a^2 + b^2)S + 4c^4 - (a^2 + b^2)^2 = 0.$$

Найдя корни S' и S'' этого ур., найдемъ v и t изъ ур—ній

$$X^2 - aX + S' = 0, \quad X^2 - aX + S'' = 0.$$

Первое дастъ для v и t систему v', t' ; второе систему v'', t'' ; изъ ур—ній (2) найдемъ соответствующія значенія для $q: q'$ и q'' . Наконецъ, найдемъ двѣ системы значеній для x и y изъ ур—ній

$$X^2 - t'X + q' = 0, \quad X^2 - t''X + q'' = 0,$$

и двѣ соответственныя системы значеній для u и v изъ ур—ній

$$Y^2 - v'Y + q' = 0, \quad Y^2 - v''Y + q'' = 0.$$

568. ПРИМѢРЪ V. РѢШИТЬ СИСТЕМУ

$$x^4 + y^4 - x^2y^2 = a(x - y)^2 \dots (1) \quad xy(x - y)^2 - b(x + y)^2 \dots (2).$$

1-й способъ. Помноживъ (2) на 4 и сложивъ съ (1), получимъ:

$$(x - y)^4 - 15x^2y^2 = (a - 4b)(x - y)^2 \dots (3).$$

Положивъ $x + y = u$, $xy = v$, дадимъ ур—нямъ (2) и (3) видъ

$$v(u^2 - 4v) = bu^2, \quad u^4 - 15v^2 = (a + 4b)u^2,$$

исключивъ u^2 , получимъ квадратное ур. относительно v .

2-й способъ (неопредѣленныхъ коэффициентовъ).— Помножимъ ур—нія (1) и (2) соответственно на неопредѣленные коэффициенты λ и μ , затѣмъ опредѣлимъ λ и μ такъ, чтобы первая часть новаго уравненія, которое однородно по отношенію къ x и y , дѣлилась бы, какъ и вторая часть, на $x + y$. Эта первая часть, очевидно, есть $\lambda(x^4 + y^4 - x^2y^2) + \mu xy(x - y)^2$; и какъ она должна быть нулемъ при замѣнѣ въ ней x количествомъ $-y$, то имѣемъ условіе: $\lambda - 4\mu = 0$. Можно взять μ равнымъ 1, тогда $\lambda = 4$, т.-е.: чтобы выдѣлить множителя $x + y$ въ первой части новаго ур—нія, нужно помножить на 4 обѣ части ур—нія (1) и сложить со (2). Найдемъ:

$$(x + y)^2(4x^2 + 4y^2 - 7xy) = (4a + b)(x + y)^2.$$

Итакъ, множитель $(x + y)$, и даже его квадратъ, обнаруженъ въ первой части предыдущаго ур—нія. Приходимъ такимъ образомъ къ рѣшенію системъ

$$\begin{aligned} x + y &= 0, & xy(x - y)^2 &= b(x + y)^2; \\ 4(x^2 + y^2) - 7xy &= 4a + b, & xy(x - y)^2 &= b(x + y)^2. \end{aligned}$$

Первая система дает $x = y = 0$. Для рѣшенія второй полагаемъ $x + y = 2s$, $x - y = 2t$. Затѣмъ получаемъ выраженія $x^2 + y^2$ и xy въ s и t , и подставляя ихъ въ оба предыдущія ур-нія, получаемъ два ур-нія въ s и t , которыя рѣшить не трудно.

569. Примѣръ VI. Рѣшить систему:

$$(x^3 + y^3)(x + y) = a(x^2 + y^2) \dots (1) \quad x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = b(x^2 + y^2) \dots (2).$$

Множа данныя ур-нія соответственно на λ и μ и складывая почленно, находимъ въ первой части полиномъ

$$\lambda(x^5 + y^5) + \mu(x^4 - y^4 - 3x^2y^2) \dots (3).$$

Опредѣлимъ λ и μ такъ, чтобы полиномъ (3) дѣлился на $x^2 + y^2$. Рассматривая $x^2 + y^2$ какъ произведение комплексовъ $x + yi$, $x - yi$, посмотримъ, каково д. б. соотношеніе между λ и μ , чтобы полиномъ (3) дѣлился на $x - yi$. Для этого надо, чтобы результатъ подстановки yi вмѣсто x въ этотъ полиномъ былъ нулемъ. Находимъ условіе: $2\lambda + 5\mu = 0$. Подстановка $x + yi$ дала бы тотъ же результатъ; слѣд., при λ и μ , удовлетворяющихъ этому условію, полиномъ (3) раздѣлится на $x^2 + y^2$. Можно взять, напр. $\lambda = 5$ и $\mu = -2$. Итакъ, умноживъ ур-нія (1) и (2) соответственно на 5 и -2 и сложивъ ихъ, получаемъ

$$(x^2 + y^2)[3(x^2 + y^2) + 5xy] = (5a - 2b)(x^2 + y^2).$$

Вопросъ приведенъ къ рѣшенію двухъ системъ:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 - 3x^2y^2 &= b(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 &= 0; \\ x^4 + y^4 - 3x^2y^2 &= b(x^2 + y^2), & 3(x^2 + y^2) + 5xy &= 5a - 2b. \end{aligned}$$

Первая система даетъ: $x = y = 0$. Для рѣшенія второй полагаемъ: $x = u$, $y = v$, и выражаемъ $x^2 + y^2$ и $x^4 + y^4$ черезъ u и v ; такимъ обр. получаемъ два ур-нія

$$u^4 + v^4 - 3(2u^2 - b)v - v^2 = 0, \quad 3u^2 + v = 5a - 2b;$$

исключивъ изъ нихъ v , найдемъ биквадратное ур. въ u .

ГЛАВА XXXVIII.

Уравненія кубичное и четвертой степени.

Рѣшеніе полного кубическаго уравненія.

570. Выводъ формулы корней. Всякое кубичное уравненіе дѣлшемъ на коэффициентъ при x^3 всегда можно представить въ видѣ

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Въ такомъ ур. всегда можно уничтожить членъ съ квадратомъ неизвѣстнаго, тѣмъ самымъ приемомъ, какимъ уничтожали второй членъ въ квадратномъ ур—нии. Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ вмѣсто x въ наше ур—ние $y + h$, гдѣ y —новое неизвѣстное, а h —пока совершенно произвольное количество, и расположив члены по степенямъ y , найдемъ

$$y^3 + (3h + a)y^2 + (3h^2 + 2ah + b)y + h^3 + ah^2 + bh + c = 0.$$

Пользуясь неопредѣленностью количества h , распорядимся имъ такъ, чтобы коэффициентъ при y^2 обратился въ ноль; именно, положимъ $3h + a = 0$, откуда $h = -\frac{a}{3}$; подставивъ въ послѣднее ур—ние $-\frac{a}{3}$ вмѣсто h , и положивъ для краткости

$$-\frac{a^2}{3} + b = p, \quad -\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = q,$$

получимъ ур—ние

$$y^3 + py + q = 0. \quad (1)$$

которое и будемъ считать нормальной формою кубическаго ур—нія.

Чтобы рѣшать это ур—ние, положимъ

$$y = u + v,$$

гдѣ u и v пока произвольныя количества, связанныя только однимъ условіемъ, что сумма ихъ даетъ корень ур—нія (1). Подстановка въ это ур—ние дастъ

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

или

$$u^3 + v^3 + (u + v)(p + 3uv) + q = 0. \quad (2),$$

т.-е. одно ур—ние съ двумя неизвѣстными, которое, поэт-му, имѣетъ безчисленное множество рѣшеній: давая какое-нибудь частное значеніе, получимъ ур. съ неизвѣстнымъ u , которое дастъ соответственное значеніе этого неизвѣстнаго. Изъ безчисленнаго множества способовъ удовлетворить этому ур—нію выберемъ слѣдующій, который вопросъ приводитъ къ рѣшенію квадратнаго ур—нія и двухъ кубическихъ.

Обратимъ въ нуль членъ $(u + v)(p + 3uv)$. Въ этихъ видахъ нужно положить либо $u + v = 0$, либо $p + 3uv = 0$. По первое невозможно, такъ какъ въ этомъ случаѣ было бы $y = 0$, и ур—ние (1) обратилось бы въ $q = 0$, между тѣмъ какъ q отлично отъ нуля. Итакъ, должно положить $p + 3uv = 0$, или $uv = -\frac{p}{3}$, а слѣд. ур—ние (2) дастъ $u^3 + v^3 = -q$. Такимъ образомъ рѣшеніе ур—нія (1) мы привели къ рѣшенію совмѣстныхъ ур—ній

$$uv = -\frac{p}{3} \quad \text{и} \quad u^3 + v^3 = -q;$$

найдя отсюда u и v , останется внести ихъ значенія въ формулу $y = u + v$, которая и дастъ y .

Чтобы рѣшить систему ур—ній съ неизвѣстными u и v , возвысимъ первое въ кубъ, такъ что получимъ

$$u^3 + v^3 = -\frac{p^3}{27}, \quad u^3 + v^3 = -q,$$

откуда u^3 и v^3 найдемъ какъ корни квадратнаго ур—нія

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (3)$$

которое называется *резольвентомъ* (разрѣшающимъ) ур—нія (1)*; одно значеніе u дасть u^3 , другое v^3 . Такимъ образомъ, рѣшая (3), найдемъ:

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \dots (4) \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \dots (5)$$

и слѣд. y , равный $u + v$, будетъ

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \dots (6).$$

Въ этой формулѣ, называемой *формулой Кардана*, и заключается рѣшеніе кубическаго ур—нія. Название Карданово присвоено ей вслѣдствіе того, что впервые опубликована была этимъ ученымъ, въ 1545 г., но найдена была *Тартальей*; впрочемъ, есть основанія къ предположенію, что рѣшеніе кубическаго ур—нія найдено было еще ранѣе, въ 1505 г., *Сципиономъ Феррарио*.

Въ правой части ур—нія (6) указана сумма двухъ кубическихъ корней. Но мы знаемъ, что кубическій корень изъ даннаго числа имѣетъ 3 различныхъ значенія; слѣгая каждое значеніе перваго куб. корня съ каждымъ значеніемъ 2-го, мы, повидимому, должны имѣти 9 значеній для y , тогда какъ ур—ніе 3 степени не можетъ имѣть болѣе трехъ корней. Но это такъ и есть. Въ самомъ дѣлѣ, въ силу ур—нія $uv = -\frac{p}{3}$, u и v нужно комбинировать въ такія пары, чтобы произведеніе ихъ давало $-\frac{p}{3}$. Эти пары можно найти такъ.

Если правую часть ур—нія (4) назовемъ для краткости A^3 , то три значенія u , опредѣляемыя кубическимъ ур—нѣ $u^3 = A^3$, будутъ

$$u_1 = A, \quad u_2 = \omega A, \quad u_3 = \omega^2 A,$$

гдѣ A есть одинъ какой-либо изъ кубическихъ корней числа A^3 , а ω и ω^2 — два мнимыя кубическихъ корня изъ 1. Точно также, если правую часть ур—нія (5) назовемъ B^3 , и одинъ изъ кубическихъ корней числа B^3 назовемъ B , то будемъ имѣть

$$v_1 = B, \quad v_2 = \omega B, \quad v_3 = \omega^2 B.$$

Если, теперь, одна пара значеній u и v , дающая въ произведеніи $-\frac{p}{3}$, будетъ A и B , то другою парой будетъ: ωA и $\omega^2 B$, потому что произведеніе $\omega A \cdot \omega^2 B = \omega^3 AB = AB = -\frac{p}{3}$, ибо $\omega^3 = 1$; третья же пара будетъ $\omega^2 A$ и ωB , ибо $\omega^2 A \cdot \omega B = \omega^3 AB = AB = -\frac{p}{3}$. Легко видѣть, что никакія другія сочетанія не дадутъ въ произведеніи $-\frac{p}{3}$, и сл. должны быть отброшены.

Итакъ, три корня кубическаго ур—нія (1) будутъ

$$\begin{aligned} y' &= A + B \\ y'' &= \omega A + \omega^2 B \\ y''' &= \omega^2 A + \omega B, \end{aligned}$$

гдѣ A и B суть два кубическихъ корня изъ A^3 и B^3 , произведеніе которыхъ есть $-\frac{p}{3}$.

*) *Резольвентомъ* даннаго ур—нія называютъ ур—ніе, обладающее слѣдующими свойствами. 1) корней его могутъ быть найдены; 2) разъ эти корни найдены, можно вычислить и корни даннаго.

571. Примѣръ. Рѣшить ур—ніе $x^3 + 12x + 63 = 0$.

Положивъ $x = u + v$, имѣемъ

$$u^3 + v^3 + 3(u + v)(uv + 4) + 63 = 0.$$

Положивъ $uv + 4 = 0$, или $u^3 v^3 = -64$, имѣемъ $u^3 + v^3 = -63$.

Слѣдов., u^3 и v^3 будутъ корнями ур—нія $t^2 + 63t - 64 = 0$, изъ котораго

$$t' = 1, \quad t'' = -64; \quad \text{слѣд. } u^3 = 1, \quad v^3 = -64.$$

Итакъ:

$$x_1 = 1 - 4 = -3,$$

$$x_2 = 1 \cdot \omega - 4 \cdot \omega^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} - 4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 5i\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = 1 \cdot \omega^2 - 4 \cdot \omega = \frac{3 - 5i\sqrt{3}}{2}.$$

Примѣчаніе. Вышеизложенный методъ рѣшенія кубическаго ур—нія, принадлежащій Cardan, применимъ ко всякому кубическому ур—нію, будутъ ли коэффициенты p и q числа дѣйствит. или мнимыя.

572. Изслѣдованіе корней кубическаго ур—нія для случая, когда коэффиціенты p и q дѣйствительны. — Нужно различать 3 случая, въ зависимости отъ знака количества $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.

I. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Въ этомъ случаѣ $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ — количество дѣйствительное, слѣд. u^3 и v^3 также дѣйствительныя количества, а потому для u и v существуетъ по одному дѣйствительному значенію: назовемъ ихъ A и B . Такъ какъ произведеніе ихъ даетъ $-\frac{p}{3}$, то они образуютъ пару; и если замѣнить ω и ω^2 ихъ значеніями, то получатся слѣдующія 3 значенія для x :

$$x' = A + B,$$

$$x'' = A\omega + B\omega^2 = -\frac{A+B}{2} + \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} \cdot i,$$

$$x''' = A\omega^2 + B\omega = -\frac{A+B}{2} - \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

Значеніе x' — дѣйствительно. Что касается двухъ остальныхъ значеній x , то они — мнимы и притомъ сопряжены, такъ какъ $A - B$ не есть нуль; иначе A^3 и B^3 были бы равны, что противно условію. Итакъ: когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, одинъ корень ур—нія $x^3 + px + q = 0$ дѣйствителенъ, два другіе — мнимыя сопряженные.

II. Когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, u^3 и v^3 дѣлаются равными, слѣд. и дѣйствительныя значенія кубическихъ корней изъ нихъ, A и B , равны, и именна $-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, слѣд.

$$x' = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

А какъ $A = B$, то два другіе корня, также дѣйствительные, равны между собою:

$$x'' = x''' = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

Итакъ, въ данномъ случаѣ есть три корня кубическаго уравненія дѣйствительныя, причемъ два изъ нихъ равны между собою.

III. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Такъ какъ $\frac{q^2}{4}$ есть количество положительное, то данный случай требуетъ, чтобы p было количествомъ существенно отрицательнымъ, и численное значеніе $\frac{p^3}{27}$ было бы больше $\frac{q^2}{4}$. Въ этомъ случаѣ u^3 и v^3 представляются подъ видомъ мнимыхъ сопряженныхъ выраженій, А и В также мнимы, слѣд. всѣ три корня, выражаемые Карданою формулою, являются въ формѣ сложныхъ мнимыхъ выраженій. Но легко видѣть, что возможно такое кубическое уравненіе, всѣ три корня котораго были бы дѣйствительныя и неравные между собою. Таково, напр., кубическое уравненіе $(x-1)(x+3)(x-7) = 0$, корни котораго: $x' = 1$, $x'' = -3$ и $x''' = 7$ — дѣйствительныя и неравные. А какъ изъ двухъ разсмотрѣнныхъ случаевъ въ первомъ только одинъ корень дѣйствителенъ, а во второмъ, хотя всѣ корни дѣйствительны, но два изъ нихъ равны между собою, то нужно ожидать, что дѣйствительные неравные корни должны получаться именно въ случаѣ $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, хотя формула Кардана и даетъ ихъ въ видѣ мнимыхъ выраженій. Въ самомъ дѣлѣ, можно показать, что мнимость эта — только кажущаяся. Пусть будутъ

$$a + bi, (a + bi) \cdot \omega, (a + bi) \cdot \omega^2$$

три мнимыхъ кубическихъ корня изъ u^3 . Такъ какъ v^3 есть выраженіе мнимое, сопряженное выраженію u^3 , то по § 429, принимаяше, кубические корни изъ v^3 будутъ

$$a - bi, (a - bi)\omega, (a - bi) \cdot \omega^2.$$

Сочетать значенія перваго ряда съ значеніями втораго нужно такъ, чтобы произведеніе сочетаемыхъ значеній было дѣйствительно; слѣд., можно $a + bi$ сочетать съ $a - bi$, и такимъ образомъ три значенія x будутъ

$$(7) \begin{cases} x' = A + B = 2a \\ x'' = A\omega + B\omega^2 = -a + b\sqrt{3}, \\ x''' = A\omega^2 + B\omega = -a - b\sqrt{3}; \end{cases}$$

всѣ они—дѣйствительны. Кромѣ того, легко видѣть, что въ числѣ ихъ нѣтъ равныхъ. Во-первыхъ, нельзя положить $2a = -a + b\sqrt{3}$, ибо отсюда послѣдовательно имѣли бы: $b = +a\sqrt{3}$, $A = a(1 + i\sqrt{3})$, и $A^3 = a^3(1 + i\sqrt{3})^3$ равенство невозможное, потому что первая часть, по предположенію, мнима, вторая же есть число дѣйствительное. Затѣмъ, нельзя имѣть $-a - b\sqrt{3} = -a + b\sqrt{3}$, ибо отсюда вышло бы $b = 0$, что невозможно, такъ какъ мнимое количество u^3 не можетъ имѣть дѣйствительнаго кубическаго корня (§ 429, III). Итакъ:

Когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, есть три корня уравненія $x^3 + px + q = 0$ числа дѣйствительныя и неравные.

Вычисленіе корней кубическаго уравненія.—Формула Кардана имѣетъ весьма существенные недостатки. Во-первыхъ, въ случаѣ $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ дѣйствительный корень выражается посредствомъ радикаловъ даже тогда, когда онъ совмѣримъ. Такъ, если взять Эйлеровъ примѣръ, уравненіе $x^3 = 6x - 40 = 0$, то дѣйств. корни

его, какъ легко видѣть, равенъ 4, тогда какъ по Кардановой формулѣ онъ выразится въ видѣ $\sqrt[3]{20 - 14i} - \sqrt[3]{20 + 14i}$. Но еще важнѣе тотъ недостатокъ формулы Кардана, что при условіи $\frac{q^2}{4} = \frac{p^3}{27}$, 0 она даетъ корни въ мнимой формѣ, тогда какъ въ этомъ случаѣ всѣ 3 корни действительны. Если бы отъ этой мнимости мы захотѣли освободиться алгебраическими средствами, т. е. алгебраически вычислить количества a и b , въ которыхъ значенія x и y тогда же какъ и предложено; изъ действ. корни, какъ и у даннаго уравн., были бы сложены мнимыми количествами. Поэтому случаи этотъ и называю *исправоономыя*. Но если мы предложимъ себѣ вычислить корни тригонометрически то значенія x легко будетъ получить посредствомъ логарифмовъ. Итакъ, рѣшимъ уравн. тригонометрически, въ предположеніи $\frac{q^2}{4} = \frac{p^3}{27}$, 0. Здѣсь p количество существенно отрицательное; если буквами p и q обозначить абсолютныя величины коэффициентовъ, то уравн. будетъ

$$y^3 - py + q = 0,$$

гдѣ уже знаки окончательные, и $\frac{p^3}{27} = \frac{q^2}{4}$.

Для рѣшенія уравн. съ + перепишемъ q положимъ $y = r \cdot \sin \varphi$, гдѣ r и φ пока неизвѣстны; уравн. будетъ (по раздѣленіи на r^3),

$$\sin^3 \varphi - \frac{p}{r^3} \cdot \sin \varphi + \frac{q}{r^3} = 0, \dots (8)$$

Какъ скоро можно будетъ для r и φ найти действительныя величины, удовлетворяющія этому уравн., то вопросъ будетъ рѣшенъ, ибо извѣстно будетъ и $y = r \sin \varphi$. Но такія значенія r и φ найти не трудно. Возьмемъ формулу, связывающую синусъ тройной дуги съ синусомъ простой

$$\sin 3\varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 3\varphi = 0,$$

устанавливаемъ, что уравн. (8) будетъ удовлетворено, если взять

$$\frac{p}{r^3} = \frac{3}{4} \text{ и } \frac{q}{r^3} = \frac{1}{4} \cdot \sin 3\varphi.$$

Первое изъ этихъ уравн. даетъ значеніе r :

$$r = 2 \sqrt[3]{\frac{p}{3}} \dots (9).$$

Изъ второго имѣемъ

$$\sin 3\varphi = \frac{4q}{r^3} = \sqrt[3]{\frac{27q^2}{4p^3}} \dots (10),$$

и какъ изъ синуса условия имѣемъ $\frac{27q^2}{4p^3}$, то $\sin 3\varphi$ выражается правильно дробью, и потому всегда можно найти уголъ 3φ , котораго синусъ равенъ (10). Такимъ образомъ извѣстны будутъ r и 3φ , а слѣд. и y . Не одинаковыя синусы имѣютъ безчисленное множество угловъ: въ первыхъ, острый уголъ β , а затѣмъ, y имѣ

$$\pi - \beta, \quad 3\pi - \beta, \dots, \quad 2\pi - \beta, \quad 4\pi - \beta, \dots$$

я слѣд. для φ будемъ имѣть $\frac{\theta}{3}$, а затѣмъ

$$\frac{\pi - \theta}{3}, \quad \frac{3\pi - \theta}{3}, \dots; \quad \frac{2\pi + \theta}{3}, \quad \frac{4\pi + \theta}{3}, \dots$$

Но легко видѣть, что различныхъ значеній для y получится только 3.

$$y_1 = r \cdot \sin \frac{\theta}{3}, \quad y_2 = r \cdot \sin \left(60^\circ - \frac{\theta}{3} \right), \quad y_3 = -r \cdot \sin \left(60^\circ + \frac{\theta}{3} \right),$$

или

$$y_1 = 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sin \frac{\theta}{3}, \quad y_2 = 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sin \left(60^\circ - \frac{\theta}{3} \right), \quad y_3 = 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sin \left(60^\circ + \frac{\theta}{3} \right).$$

Итакъ, вычисляемъ острый уголъ θ по формулѣ (10), беремъ его третью и вносимъ въ послѣднія 3 формулы, которыя и дадутъ искомыя 3 действительныхъ корня.

Въ случаѣ ур—нія $y^3 - py - q = 0$, найдемъ для r ту же формулу, а для угла θ ур—ніе

$$\sin 3\varphi = \frac{1q}{r^3},$$

откуда для 3φ найдемъ отрицательное значеніе, слѣд. и корни получатся по абсолютному значенію тѣ же какъ и прежде, но знаки ихъ будутъ противоположны.

Примѣръ. Рѣшить ур—ніе $y^3 - 39y + 70 = 0$.

Въ данномъ случаѣ $p = 39$, $q = 70$; слѣд., $r = 2\sqrt{13}$ и $\sin 3\varphi = \frac{35}{13}$.

Таблицы дадутъ

$$\log \sin 3\varphi = 9,8731529, \quad \text{откуда} \quad 3\varphi = 18^\circ 18' 22'',77 \quad \theta,$$

и слѣд.,

$$\frac{\theta}{3} = 16^\circ 6' 7'',59,$$

$$60^\circ - \frac{\theta}{3} = 43^\circ 53' 52'',41$$

$$60^\circ + \frac{\theta}{3} = 76^\circ 6' 7'',59.$$

Найдя въ таблицахъ логарисмовъ синусовъ этихъ трехъ угловъ, также $\log r$, получимъ

$$\begin{aligned} \log y_1 &= 0,3710299, & y_1 &= +2; \\ \log y_2 &= 0,6989700, & y_2 &= +5; \\ \log (-y_3) &= 0,8450880, & y_3 &= -7. \end{aligned}$$

Повѣрка. Для повѣрки достаточно сложить корни: сумма должна давать ноль, что въ данномъ случаѣ и имѣеть мѣсто.

Указанный способъ повѣрки основывается на соотношеніи между коэффициентами и корнями, къ разсмотрѣнію котораго и переходимъ.

573. Соотношенія между коэффициентами и корнями кубическаго уравненія $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Такъ какъ кубическое ур—ніе имѣетъ 3 корня, то его можно представить въ

видѣ $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, откуда, раскрывъ скобки и сравнивая съ даннымъ ур—нмъ, найдемъ соотношенія

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a}, \\x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a}, \\x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}.\end{aligned}$$

т. е. сумма всѣхъ корней — взятому съ обратнымъ знакомъ частному отъ раздѣленія второго коэффициента на 1-й; сумма парныхъ произведений корней равна частному отъ раздѣленія третьего коэффициента на первый; а произведение всѣхъ корней — минусъ частному отъ раздѣленія послѣдняго коэффициента на первый. Функции корней, здѣсь рассматриваемыя, относятся къ такъ называемымъ *симметрическимъ функциямъ*, характеризующимся тѣмъ свойствомъ, что величина такихъ функций не измѣняется отъ перестановки входящихъ въ нихъ буквъ одной на мѣсто другой. послѣдовательно, комбинируя ихъ попарно. Легко, въ самомъ дѣлѣ, проверить, что ни величина, ни знакъ этихъ функций не перемѣняется отъ перемѣны x_1 на x_2 , x_2 на x_1 и т. д.

Рѣшеніе полного уравненія четвертой степени.

574. Предложено было нѣсколько способовъ рѣшенія ур—нія 4-й степени; и во всѣхъ этихъ методахъ нахожденіе корней ур—нія 4-й степени зависитъ отъ предварительнаго рѣшенія *кубическаго* уравненія. Впервые общее рѣшеніе ур—нія 4-й степени найдено было *Феррари*, ученикомъ Кардано, и это рѣшеніе, равно какъ и рѣшеніе, данное *Декартомъ*, принадлежать къ простѣйшимъ.

575. Способъ Феррари.—Чтобы рѣшить ур—ніе

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

придадимъ къ обѣимъ частямъ $(ax + b)^2$, вслѣдствіе чего найдемъ

$$x^4 + px^3 + (q + a^2)x^2 + (r + 2ab)x + s + b^2 = (ax + b)^2,$$

и опредѣлимъ a и b такъ, чтобы л-я часть сдѣлалась точнымъ квадратомъ нѣкотораго тринома $x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda$. Сравненіе коэффициентовъ покажетъ, что это будетъ достигнуто, какъ скоро будутъ удовлетворены ур—нія

$$2\lambda + \frac{p^2}{4} = q + a^2, \quad p\lambda = r + 2ab \quad \text{и} \quad \lambda^2 = s + b^2.$$

Исключая a и b , получимъ для опредѣленія λ кубическое уравненіе

$$8\lambda^3 - 4p\lambda^2 + 2(pr - 4q)\lambda - p^2s + 4qs - r^2 = 0,$$

которое всегда, какъ извѣстно, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ истинный корень; найдя этотъ корень, мы будемъ знать a и b . Такимъ образомъ найдемъ уравненіе

$$(x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda)^2 = (ax + b)^2,$$

откуда

$$x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda = \pm (ax + b),$$

гдѣ a, b, λ известны, и слѣд. всѣ 4 корня x найдены будутъ изъ квадратныхъ ур—ній

$$x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda = ax + b \quad \text{и} \quad x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda = -ax - b,$$

и задача рѣшается въполнѣ.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^4 = 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0$.

Придавая къ обѣимъ частямъ $(ax + b)^2$, найдемъ

$$x^4 - 2x^3 + (a^2 - 5)x^2 + 2(ab + 5)x + b^2 - 3 = (ax + b)^2.$$

Приравнявъ первую часть $(x^2 - x - \lambda)^2$, сравненіемъ коэффициентовъ при одинаковыхъ степеняхъ x получимъ

$$a^2 = 6 - 2\lambda, \quad ab + 5 = \lambda, \quad b^2 - 3 = \lambda^2,$$

откуда, исключивъ a и b , имѣемъ

$$2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda - 7 = 0;$$

испытаніе $+1$ и -1 покажетъ, что $\lambda = -1$; отсюда

$$a^2 = 4, \quad ab = -4, \quad b^2 = 4;$$

такъ что можно положить

$$(x^2 - x - 1)^2 = (2x - 2)^2, \quad \text{или} \quad x^2 - x - 1 = \pm (2x - 2).$$

Рѣшая полученныя два квадратныхъ уравненія, имѣемъ

$$x_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad x_3 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \quad x_4 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}).$$

576. Способъ Декарта.—Въ 1637 году Декартъ далъ слѣдующій способъ рѣшенія ур—нія 4-й степени, подобно предыдущему основанный также на способѣ неопредѣленныхъ коэффициентовъ, нѣмъ же изобрѣтенномъ. Освободивъ отъ коэффициента при x^4 и отъ члена съ кубомъ x , т.-е. приведя ур—ніе къ виду

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \quad \text{гдѣ} \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}, \quad r = \frac{d}{a},$$

предположимъ, что оно рѣшено и что первая часть разложена на двучленные множители. Если соединить эти множители попарно, то можно представить себѣ первую часть приведенную къ произведенію

$$(x^2 + mx + n)(x^2 + m'x + n').$$

Приравнявъ коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ x , найдемъ для опредѣленія неопредѣленныхъ коэффициентовъ m, n, m', n' ур—нія

$$m + m' = 0, \quad \dots (1) \quad mn' + n = p, \quad \dots (2) \quad mn - m'n = q, \quad \dots (3) \quad mn - r, \quad \dots (4).$$

Подставляя $m' = -m$ въ остальные ур—нія, получимъ

$$-m^2 + n + n' = p, \quad \dots (5) \quad m(n' - n) = q, \quad \dots (6) \quad mn - r, \quad \dots (7).$$

Изъ (5) и (6) имѣемъ

$$n = \frac{1}{2} \left(m^2 + p - \frac{q}{m} \right), \quad n' = \frac{1}{2} \left(m^2 - p + \frac{q}{m} \right).$$

и внося въ (7), получаемъ

$$\frac{1}{4} \left[(m^2 + p)^2 - \frac{q^2}{m^2} \right] - r,$$

или

$$m^6 + 2pm^4 + (p^2 - 4r)m^2 - q^2 = 0,$$

третьей степени отъ m^2 . Решивъ это ур., найдемъ m , а затѣмъ m' , n и n' , послѣ чего останется решить два квадратныя уравненія $x^2 + mx + n = 0$ и $x^2 + m'x + n' = 0$, которыя и дадутъ 4 искомыхъ корня предложеннаго.

Примѣръ. Решить уравненіе $x^4 - 12x^2 + 21x - 10 = 0$.

Поступая указаннымъ образомъ, найдемъ, что разлагающее кубическое уравненіе (положивъ $m^2 = s$):

$$s^3 - 24s^2 + 184s - 441 = 0,$$

или, положивъ для уничтоженія члена съ s^2 , $s = k + h$, найдемъ

$$k^3 - 8k + 7 = 0 \quad \text{и} \quad h = 8.$$

Это куб. ур., очевидно, имѣетъ корень $k = 1$; слѣд. $s = 9$, откуда $m = \pm 3$. Взявъ $m = 3$, найдемъ $m' = -3$, $n = -5$, $n' = 2$. Такимъ образомъ, квадратныя уравненія, на которыя распадается данное, будутъ

$$x^2 + 3x - 5 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Рѣшая ихъ, найдемъ всѣ 4 корня предложеннаго уравненія:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}[-3 + \sqrt{29}], \quad x_4 = \frac{1}{2}[-3 - \sqrt{29}].$$

577. Соотношенія между коэффициентами и корнями уравненія 4-й степени.—Ур-ніе 4-й степени имѣетъ 4 корня, слѣд. его можно представить въ формѣ

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0.$$

Раскрывъ скобки и сравнивая съ даннымъ уравненіемъ

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

найдемъ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a},$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{e}{a}.$$

Таковы соотношенія между коэффициентами и корнями уравненія 4-й степени. Легко замѣтить ихъ значенію подобнымъ же свойствамъ для уравненій квадратнаго и кубическаго, и нетрудно выразить эти соотношенія словами.

578. Теорема. Во всякомъ уравненіи съ действительными коэффициентами мнимые корни входятъ парно.

Пусть данное ур. съ действительными коэффициентами есть $f(x) = 0$, и положимъ, что оно имѣетъ мнимый корень $a - bi$. докажемъ, что мнимое сопряженное $a + bi$ будетъ также корнемъ того уравненія.

Составив произведение $[x - (a + bi)][x - (a - bi)]$, или $(x - a)^2 + b^2$, разделим $f(x)$ на $(x - a)^2 + b^2$, и пусть частное будет Q , а возможный остаток $Rx + R'$; имеем

$$f(x) = Q[(x - a)^2 + b^2] + Rx + R'.$$

Положим в этом тождестве $x = a + bi$. Так как $a + bi$, по предположению, есть корень данного уравнения, то $f(x)$ обратится при этой подстановке в нуль; $(x - a)^2 + b^2$ также обращается в нуль; слѣд. остается: $R(a + bi) + R' = 0$. Приравнявая нулю действительную и мнимую части, имеем

$$Ra + R' = 0, \quad Rb = 0.$$

Но b , по условию, не есть нуль, слѣд. $R = 0$; а потому и $R' = 0$. Заключаемъ, что остатокъ обращается в нуль, т.-е. что $f(x)$ дѣлится на $(x - a)^2 + b^2$, или на $[x - (a + bi)][x - (a - bi)]$. Это значитъ, что $x = (a - bi)$ входитъ множителемъ въ $f(x)$, которая, так. обр., при $x = a - bi$ обращается в нуль; $a - bi$ есть также корень уравнения $f(x) = 0$.

Изъ этой теоремы, по отношенію къ кубическому уравненію, слѣдуетъ, что оно не можетъ имѣть трехъ мнимыхъ корней; имѣя два мнимыхъ корня, третій корень всегда действителенъ. слѣд., кубическое уравн. всегда имѣетъ, во крайней мѣрѣ, одинъ действительный корень.

Кромѣ того, эта теорема облегчаетъ вычисленіе корней куб. уравненія. Разъ мы нашли одинъ мнимый корень, другой нѣтъ надобности вычислять особо: слѣдуетъ прямо написать мнимое, сопряженное найденному корню.

579. Мы убѣдились, что для всякаго уравненія 3-й и 4-й степени, взятаго въ общемъ видѣ (т.-е. съ буквенными коэффициентами) можно найти рѣшенія въ алгебраической формѣ, т.-е. выразить корни посредствомъ радикаловъ. Если же степень уравненія, взятаго въ общемъ видѣ, будетъ выше четвертой, то Норвежскій ученый *Абель* доказалъ невозможность алгебраическаго рѣшенія такихъ уравненій (т.-е. невозможность выразить ихъ корни въ радикалахъ). Но въ случаѣ уравненій съ численными коэффициентами всегда можно вычислить ихъ действительные корни съ какою угодно точностью, какова бы ни была степень уравненія.

ГЛАВА XXXIX.

Численные вопросы высшихъ степеней.

580. Когда отвѣтъ на вопросъ, приводящій къ квадратному уравненію, выражается мнимыми корнями, это служитъ признакомъ невозможности задачи. Если же корни действительны, то могутъ имѣть мѣсто слѣдующіе случаи:

1. Оба корня положительны. Тогда задача допускаетъ два рѣшенія, если только корни неравны; въ случаѣ равныхъ корней вопросъ имѣетъ одно рѣшеніе. Однако же, если одно или оба значенія неизвѣстнаго выходятъ изъ тѣхъ предѣловъ, между которыми, по смыслу вопроса, должно заключаться неизвѣстное, то вопросъ имѣетъ или одно рѣшеніе, или же невозможенъ.

2. Если одно или оба значенія неизвѣстнаго будутъ отрицательны, то всегда можно составить такое уравненіе, котораго корни равны, но противоположны корнямъ даннаго: нужно только въ уравненіе задачи подставить $-x$ вмѣсто x . Если окажется возможнымъ подобрать задачу, слегка разнящуюся отъ предложенной и отвѣчающую видоизмѣненному уравненію, этимъ путемъ значеніе отрицательнаго корня и будетъ истолковано.

Эти замѣчанія относятся и къ уравненіямъ второй степени съ нѣсколькими неизвѣстными. Въ поясненіе сказаннаго приводить примѣры.

Задача I. Два торговца продали нѣсколько головъ розатаго скота за 1350 р.; первый изъ 5 головъ больше второго. Если бы первый продалъ столько головъ, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то первый получилъ бы 540 р., а второй 840 р. Сколько головъ продалъ каждый и по какой цѣнѣ?

Пусть будетъ x —число головъ, проданныхъ первымъ; тогда число головъ, проданныхъ вторымъ, будетъ $x - 5$. Первый за $x - 5$ головъ получилъ бы 540 р.; слѣд. за одну голову онъ получалъ по $\frac{540}{x-5}$ р., а за x головъ выручалъ $\frac{540x}{x-5}$ р. Второй за x головъ получилъ бы 840 р., слѣд. онъ бралъ за одну голову $\frac{840}{x}$ р., а за $x - 5$ головъ получилъ $\frac{840(x-5)}{x}$ р. Слѣд. оба продали скота на $\frac{540x}{x-5} + \frac{840(x-5)}{x} = 1350$ р.

По освобожденіи отъ дробей и по упрощеніи находимъ уравненіе $x^2 - 55x + 700 = 0$, откуда: $x' = 35$; $x'' = 20$. Слѣд. $x' - 5 = 30$; $x'' - 5 = 15$.

Итакъ, задача имѣетъ два рѣшенія: 1-й продалъ 35 головъ по 18 р. за голову, а второй 30 головъ по 24 рубля за голову (въ самомъ дѣлѣ, $18 \cdot 35 + 24 \cdot 30 = 630 + 720 = 1350$); или же: 1-й продалъ 20 головъ по 36 р., а 2-й 15 по 42 р., что опять составляетъ 1350 р.

Задача II. Отданъ въ банкъ капиталъ и черезъ годъ получено прибыли 200 р. Капиталъ вмѣстѣ съ процентными деньгами былъ оставленъ въ банкъ еще на годъ. После этого капиталъ съ наросшими на него процентными деньгами составлялъ 2420 р. Какъ великъ былъ первоначальный капиталъ?

Пусть первоначальный капиталъ былъ x р. Черезъ годъ онъ обратился въ $x + 200$ р., слѣд. принесъ $\frac{20000}{x}$ процентовъ. Въ концѣ второго года этотъ капиталъ, принося $\frac{20000}{x}\%$, обратился въ $(x + 200) \left(1 + \frac{2000}{x}\right) = 2420$ р.

Освободивъ отъ дробей и упростивъ, имѣемъ ур. $x^2 - 2020x + 40000 = 0$, откуда: $x' = 2000$ р.; $x'' = 20$ р. Такимъ образомъ опять получили два положительныхъ корня; вычисляя проценты, приносимые этими капиталами, находимъ, что первый даетъ 10%, второй 1000%. Такъ какъ въ дѣйствительности банки не даютъ такихъ высокихъ процентовъ, какъ 1000%, то заключаемъ, что корень $x'' = 20$ р. не м. б. допущенъ, и задача имѣетъ одно рѣшеніе: $x' = 2000$ р.

Задача III. Нѣкто купилъ нѣсколько аршинъ сукна за 240 руб.; если бы за ту же сумму онъ получилъ 3-мя аршинами меньше, то аршинъ обошелся бы 4-мя рублями дороже. Сколько аршинъ сукна куплено?

Пусть куплено было x арш.; цѣна 1 арш. равна, слѣдоват., $\frac{240}{x}$ р. Если бы за ту же сумму онъ получалъ 3-мя арш. меньше, т.-е. $x - 3$ аршина, то

цѣна аршина была бы $\frac{240}{x} + 4$; а всѣ $x = 3$ аршина стоили бы опять 240 р.; слѣд. ур—ніе будетъ

$$\left(\frac{240}{x} + 4\right)(x - 3) = 240 \dots (1).$$

Приведемъ его къ виду $x^2 - 3x - 180 = 0$ и рѣшивъ, найдемъ два корня: $x' = 15$, $x'' = -12$. Положительный корень, какъ не трудно убѣдиться, даетъ прямой отвѣтъ на задачу. Что касается отрицательнаго корня: -12 , онъ не можетъ представлять отвѣта на данную задачу, ибо неизвѣстное (число купленныхъ аршинъ сукна), по существу своему, положительно. Но мы можемъ попытаться *истолковать* это рѣшеніе, т.-е. подыскать задачу, аналогичную данной, отвѣтомъ на которую служила бы абсолютная величина отрицательнаго рѣшенія.

Для этого въ первоначальное ур—ніе (1) вмѣсто x подставимъ $(-x)$; получимъ $\left(\frac{240}{-x} + 4\right)(-x - 3) = 240$, или, умноживъ оба множителя 1-й части на (-1) :

$$\left(\frac{240}{x} - 4\right)(x + 3) = 240 \dots (2).$$

Мы уже знаемъ, что рѣшенія этого ур—нія суть: $x' = -15$, $x'' = +12$, равная рѣшеніямъ ур—нія (1), но съ противоположными знаками. Положительное рѣшеніе $+12$ будетъ служить отвѣтомъ на задачу, соответствующую уравненію (2); задача эта, очевидно, такова: «нѣкто купилъ нѣсколько аршинъ сукна за 240 р.; если бы на ту же сумму онъ получилъ 3-мя аршинами *болѣе*, то аршинъ обошелся бы 4-мя рублями *дешевле*. Сколько аршинъ онъ купилъ?» Отвѣтомъ на эту задачу и служить число 12 аршинъ.

Задача IV. Нѣкоторое число N есть произведеніе трехъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ; раздѣливъ N послѣдовательно на каждое изъ этихъ чиселъ и сложивъ частныя, найдемъ въ суммѣ 239. Найти N ?

Пусть 3 послѣдовательныхъ искомыя нечетныя числа будутъ $2x-1$, $2x+1$, $2x+3$; $N = (2x-1)(2x+1)(2x+3)$. Ур—ніе задачи будетъ:

$$(2x+1)(2x+3) + (2x-1)(2x+3) + (2x-1)(2x+1) = 239, \dots (1),$$

или, по выполненіи всѣхъ дѣйствій и по упрощеніи: $x^2 - x = 20$, откуда: $x' = 4$, $x'' = -5$.

Положительное рѣшеніе даетъ для трехъ искомыхъ чиселъ: 7, 9 и 11. Проверка: $9 \times 11 + 7 \times 11 + 7 \times 9$ дѣйствительно = 239.

Для истолкованія отрицательнаго рѣшенія подставимъ въ первоначальное ур. (1) $-x$ вмѣсто x , находимъ: $(1-2x)(3-2x) + (-2x-1)(3-2x) + (-2x-1)(1-2x) = 239$, или, переимѣнивъ въ каждомъ членѣ знаки обоихъ множителей, находимъ ур—ніе

$$(2x-1)(2x-3) + (2x+1)(2x-3) + (2x+1)(2x-1) = 239,$$

корни котораго суть: -4 и $+5$. Взявъ корень $+5$, находимъ, что искомыя числа суть: $2x-3 = 7$; $2x-1 = 9$; $2x+1 = 11$. Такимъ образомъ, рѣшеніе $x = 5$ даетъ тотъ же отвѣтъ, что и $x = 3$, требуя только, чтобы

искомыя числа были обозначены формулами $2x - 3$, $2x - 1$ и $2x + 1$ вмѣсто того, чтобы обозначать ихъ знаками $2x - 1$, $2x + 1$ и $2x + 3$. Но и то и другое обозначенія одинаково возможны, и замѣчательно, что алгебра показываетъ намъ a posteriori, что все равно, какое изъ этихъ обозначеній мы примемъ.

Задача V. Мужчины и женщины, въ числѣ 32 лицъ, работаютъ на фабрикѣ, причемъ каждый мужчина зарабатываетъ въ день 2-мя рублями больше, нежели каждая женщина; не смотря на это, ежедневный заработокъ всѣхъ мужчинъ таковъ же, какъ и заработокъ женщинъ, и составляетъ 60 р. Найти число мужчинъ?

Пусть мужчинъ было x ; число женщинъ будетъ $32 - x$. Каждый мужчина зарабатываетъ въ день $\frac{60}{x}$, каждая женщина $\frac{60}{32 - x}$ р. Уравненіе задачи будетъ:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{32 - x} = 2 \dots (1).$$

Окончательное уравненіе $x^2 - 92x + 960 = 0$ даетъ: $x = 80$, $x' = 12$; слѣд. $32 - x' = -48$; $32 - x'' = 20$.

Рѣшеніе $x'' = 12$ для числа мужчинъ, даетъ число женщинъ 20; причемъ ежедневный заработокъ мужчины составляетъ $60 : 12$ или 5 руб.; заработокъ женщины $= 60 : 20 = 3$ р. Слѣд. это рѣшеніе удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ задачи.

Но рѣшеніе $x = 80$ для числа мужчинъ, будучи больше числа лицъ обоого пола (32), даетъ къ тому же для числа женщинъ отрицательное количество -48 ; слѣдов. второе рѣшеніе не соответствуетъ предложенному вопросу. Для истолкованія этого рѣшенія положимъ $32 - x = y$, откуда $x = 32 - y$, и подставимъ эти величины въ ур. (1); найдемъ ур. $\frac{60}{32 - y} - \frac{60}{y} = 2$, которому удовлетворяетъ $y = -48$; подставивъ $(-y)$ вмѣсто y , получаемъ уравненіе

$$\frac{60}{32 + y} + \frac{60}{y} = 2 \dots (2),$$

изъ котораго y (число женщинъ) $= 48$, а $32 + y$ (число мужчинъ) $= 80$. Эти положительныя рѣшенія отвѣчаютъ на задачу, соответствующую уравненію (2); задача эта такова: «мужчины и женщины работаютъ на фабрикѣ, причемъ число мужчинъ 32 больше числа женщинъ; мужчина и женщина зарабатываютъ вмѣстѣ 2 р. въ день; всѣ мужчины зарабатываютъ въ день 60 руб.; столько же и женщины. Найти число женщинъ?» Отвѣтъ: 80 мужчинъ, зарабатывающихъ по 75 к. въ день, и 48 женщинъ, получающихъ по 1 р. 25 к. въ день.

Задача VI Никто, имѣя капиталъ въ 120000 р., раздѣлилъ его на двѣ части, которая помѣстилъ подъ проценты. Первая часть даетъ ему ежегоднаго дохода 2800 руб.; вторая, принося 1 процентомъ больше, даетъ дохода 2500 р. въ годъ. Каковы обѣ части, и по сколько процентовъ онѣ приносятъ?

Пусть первая часть приноситъ $x\%$; въ такомъ случаѣ 1 р. прибыли получится со $\frac{100}{x}$ р., а 2800 р. прибыли получится съ $\frac{280000}{x}$ р. Разсуждая такимъ

же образомъ, найдемъ, что вторая часть капитала равна $\frac{250000}{x+1}$ руб. А какъ сумма обѣихъ частей равна 120000 р., то имѣемъ ур—ніе

$$\frac{280000}{x} + \frac{250000}{x+1} = 120000,$$

или $12x^2 - 41x - 28 = 0$, откуда: $x' = 4$, $x'' = -\frac{7}{12}$.

Положительное рѣшеніе $+4$ дастъ прямой отвѣтъ на вопросъ, и показываетъ, что вторая часть приноситъ 5%. Слѣд. 1-я часть $= \frac{280000}{4} = 70000$ р.; 2-я часть $\frac{250000}{5} = 50000$ р. Сумма ихъ дѣйствительно составляетъ 120000 р.

Истолкованіе отрицательнаго рѣшенія, $-\frac{7}{12}$, повело бы къ условіямъ, несовмѣстнымъ съ понятіемъ о процентѣ; потому рѣшеніе это должно быть прямо отброшено. Полученіе посторонняго рѣшенія зависитъ отъ того, что ур—ніе, къ которому привела частная задача, общѣ этой послѣдней; оно отвѣчаетъ на всѣ вопросы, которые привели бы къ тому же ур—нію, какъ и разсматриваемый частный вопросъ, и которыхъ безчисленное множество. Поэтому неудивительно, что одно изъ рѣшеній этого ур—нія чуждо частному вопросу.

Задача VII. *Вакхъ, заставъ Силена спящимъ около бочки, наполненной виномъ, сталъ пить въ продолженіи $\frac{3}{5}$ того времени, въ какое Силенъ могъ бы выпить всю бочку. Послѣ этого Силенъ проснулся и выпилъ оставшееся вино. Если бы Вакхъ и Силенъ пили вмѣстѣ, то они выпили бы всю бочку 6-ю часами скорѣе, и на волю Вакха пришлось бы только $\frac{2}{3}$ того, что онъ на самомъ дѣлѣ оставилъ Силену. Во сколько часовъ каждый изъ нихъ можетъ выпить цѣлую бочку?*

Означимъ время, въ которое Вакхъ можетъ выпить всю бочку, черезъ $3x$, а время, въ которое Силенъ можетъ выпить ту же бочку, черезъ $5y$. Сначала Вакхъ пьетъ въ продолженіи $3y$ часовъ, и какъ въ одинъ часъ онъ выпиваетъ $\frac{1}{3x}$ бочки, то въ $3y$ часовъ выпьетъ $\frac{y}{x}$ бочки. Затѣмъ, легко видѣть, что вмѣстѣ они выпили бы всю бочку въ $\frac{15xy}{3x+5y}$ час. Вакхъ оставилъ Силену $1 - \frac{y}{x}$ бочки, и слѣд. послѣдній пилъ вино въ продолженіи $\left(1 - \frac{y}{x}\right) \cdot 5y$ часовъ: поэтому оба они пили въ теченіе $3y + \left(1 - \frac{y}{x}\right) \cdot 5y$ или $\frac{(8x-5y)y}{x}$ часовъ. Приравнявъ разность временъ, указанную въ условіи, 6 часамъ, получимъ ур—ніе

$$\frac{(8x-5y)y}{x} - \frac{15xy}{3x+5y} = 6.$$

Выразимъ теперь, что количество вина, выпитаго Вакхомъ, было бы во второмъ случаѣ равно $\frac{2}{3}$ того, что онъ на самомъ дѣлѣ оставилъ Силену. Такъ какъ Вакхъ выпиваетъ въ часъ $\frac{1}{3x}$ бочки, то въ $\frac{5y}{3x+5y}$ часовъ, въ теченіи

которых онъ нѣтъ бы во второмъ случаѣ, онъ выпалъ бы часть бочки, равную $3(3x + 5y)$. Такимъ образомъ второе ур—нѣе будетъ:

$$3(3x + 5y) = \frac{5y}{3} + 1 - \frac{y}{r}.$$

Освободивъ ур—нѣе отъ дробей, дадимъ имъ видъ

$$\begin{aligned} 25xy^2 - 25y^3 + 9xy - 18x^2 - 30xy &= 0 \\ 10y^3 + 11xy - 6x^2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда $x = 5$, $y = 2$; слѣд. искомыя числа часовъ суть 15 и 10.

ГЛАВА XL.

Исслѣдованіе измѣненія нѣкоторыхъ функций. Maxima и minima.

581. Предварительныя свѣдѣнія и опредѣленія. Количество назъ *переменнымъ*, если оно можетъ измѣнять свою величину; переменное назъ *независимымъ*, если его измѣненія произвольны; если же измѣненія переменнаго y зависятъ отъ другаго переменнаго x , такъ что каждому значенію x соответствуетъ одно или нѣсколько совершенно опредѣленныхъ значений переменнаго y , то y назъ *зависимымъ* переменнымъ или *функцией* переменнаго x . Такъ, окружность и площадь круга, измѣняющъ съ измѣненіемъ радиуса, суть функции радиуса, который въ данномъ случаѣ играетъ роль независимаго переменнаго; площадь треугольника есть функция основанія и высоты; объемъ прямоугольнаго параллелепипеда есть функция трехъ его измѣреній и т. п. Чтобы обозначить, что y есть функция x , пишутъ: $y = f(x)$.

Функция непрерывная. Если измѣнять x отъ $x = \alpha$ до $x = \beta$ постепенно, такъ чтобы это переменное принимало послѣдовательно всѣ промежуточные значенія между α и β , то если при этомъ $f(x)$ остается действительною, конечною, а ея приращенія сами могутъ быть сдѣланы какъ угодно малыми, — она назъ *функциею непрерывною* между α и β .

Итакъ, чтобы $f(x)$ была непрерывна въ интерваллѣ отъ $x = \alpha$ до $x = \beta$, она должна удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: 1) не имѣть въ этомъ интерваллѣ никакихъ значений, 2) не обращаться въ $+\infty$; 3) когда x —у даемъ безконечно малое приращеніе, то и соответствующее приращеніе функции д. б. безконечно — мало, другими словами, непрерывная функция не должна переходить отъ одного своего значенія къ другому скачками, не проходя всѣхъ промежуточныхъ значений. Напр., такая функция не можетъ ить положительной сдѣлаться отрицательною, не проходя черезъ нуль. Если независимое переменное x непрерывно измѣняется отъ $x = \alpha$ до $x = \beta$, то сама функция, предполагая, что она въ этомъ интерваллѣ непрерывна, можетъ и измѣняться, или постоянно возрастая, или постоянно убывая, или — то возрастаая, то убывая.

Maxima и minima. Когда функция, сначала возрастающая, начинаетъ уменьшаться, то въ самый моментъ перехода отъ увеличенія къ уменьшенію

она принимает значение большее соедѣнных; это значение наз. *наибольшимъ значениемъ* или *максимумомъ* функціи. Наоборотъ, если функція, сначала уменьшалась, начиная потомъ увеличиваться, то въ самый моментъ перехода отъ уменьшенія къ увеличенію она принимаетъ значение, меньшее непосредственно предшествующихъ и непосредственно слѣдующихъ; такое значение наз. ея *наименьшимъ величиною* или *минимумомъ*.

Пусть γ будетъ то значение x , содержащееся между α и β , при которомъ функція принимаетъ значение c , и пусть h будетъ положительное количество, какъ угодно близкое къ нулю. Если эта функція при возрастаніи x отъ $\gamma - h$ до γ возрастала, а затѣмъ при увеличеніи x отъ γ до $\gamma + h$ идетъ убывая, то c и есть максимумъ функціи при $x = \gamma$. Наоборотъ, если функція уменьшалась при возрастаніи x отъ $\gamma - h$ до γ , затѣмъ увеличивается при возрастаніи x отъ γ до $\gamma + h$, то c и будетъ минимумомъ функціи при $x = \gamma$. Максима и мініма, какъ мы ихъ только что опредѣлили, не слѣдуетъ смѣшивать съ *самомъ большимъ* или съ *самомъ меньшимъ величиною* функціи. Во многихъ вопросахъ независимое переменное не можетъ измѣниться отъ $-\infty$ до $+\infty$, т.-е. черезъ всю область действительныхъ чиселъ, но въ своихъ измѣненіяхъ бываетъ ограничено конечными предѣлами, и если въ тотъ моментъ, какъ независимое переменное x достигло своего предѣла, функція получаетъ значение большее или меньшее прежнихъ своихъ значений, то это самое большее или самое меньшее ея значеніе не составляютъ максимума или мінімума въ выше опредѣленномъ смыслѣ, такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ не можетъ быть сравненія этихъ значений съ непосредственно слѣдующими: послѣднихъ не существуетъ. Такъ функція $\sqrt{1-x}$ действительна только для x , не превышающихъ 1; и если измѣнять x отъ $-\infty$ до $+1$, то функція будетъ идти уменьшаясь отъ ∞ до 0, котораго она достигаетъ при $x = 1$; здѣсь 0 есть самое меньшее значеніе функціи, но не есть *минимумъ* въ выше-опредѣленномъ смыслѣ, ибо при $x > 1$ функція уже становится мнимой, сл. ея значенія не могутъ быть сравниваемы съ предшествующими.

Эти особая максима и мініма иногда называются *абсолютными*, въ отличие отъ наибольшихъ или наименьшихъ значеній функціи по сравнению съ соедѣнными, называемыхъ *относительными*.

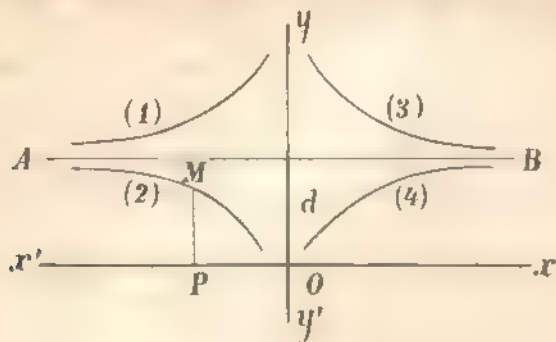
Въ виду скампаго, итъ нчего удивительнаго въ томъ, что одна и та же функція можетъ имѣть нѣсколько относительныхъ максима или мініма, или въ томъ, что относит. мінімумъ функціи можетъ быть больше ея максимума.

Разрывъ непрерывности. Нѣкоторыя функціи (не цѣлыя относительно x) могутъ для нѣкоторыхъ значений переменнаго x претерпѣвать разрывъ непрерывности.

Такъ, функція $\frac{1}{2x-3}$ обращается въ ∞ при $x = \frac{3}{2}$; въ этомъ случаѣ говорятъ, что она непрерывна при всякомъ значеніи x , кромѣ $x = \frac{3}{2}$; при $x = \frac{3}{2}$, обращаясь въ ∞ , функція теритъ свойство непрерывности.

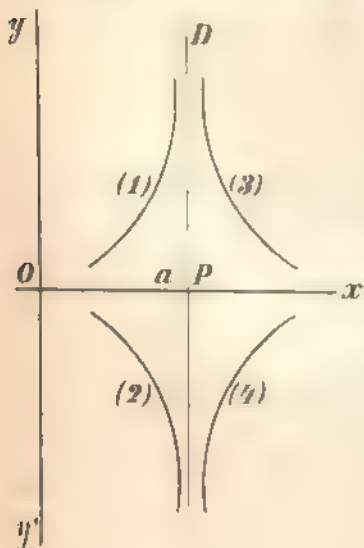
Функція $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$, которую можно представить въ видѣ $\sqrt{(x-2)(x-3)}$, также не при всякомъ x непрерывна. Въ самомъ дѣлѣ, теорема о знакѣ квадратнаго трінома показываетъ, что тріномъ $x^2 - 5x + 6$ остается положительнымъ при всякомъ x , не содержащемся между его корнями 2 и 3; но при $2 < x < 3$ становится отрицательнымъ, а функція мнимой. Слѣд. послѣдняя

Когда рассматриваемая функция — дробная, то может случиться, что при $x = \pm \infty$ величина y стремится къ конечному значенію d . Въ такомъ случаѣ построеніе кривой покажетъ (черт. 58), что по мѣрѣ удаленія точки P влѣво,



Черт. 58.

т.-е. по мѣрѣ приближенія x къ $-\infty$, ордината MP будетъ стремиться къ d , и слѣд. точка M болѣе и болѣе будетъ приближаться къ прямой AB , параллельной оси $x'x$ и отстоящей отъ нея на d ; кривая будетъ имѣть видъ (1) или (2), смотря по тому, будетъ ли функция приближаться къ d уменьшаясь, или же увеличиваясь. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что *прямая AB служитъ асимптотою кривой*; кривая неограниченно приближается къ прямой AB , никогда ее не достигая, ибо ордината (или, что то же, величина функций), обращается въ d только при $x = -\infty$. Такъ какъ при $x = +\infty$ функция получаетъ опять величину d , какъ и при $x = -\infty$, то получится другая вѣтвь кривой, (3) или (4), имѣющая ту же асимптоту AB . Въ данномъ случаѣ асимптота параллельна оси x .



Черт. 59.

Если рассматриваемая функция есть дробь, то может случиться, что знаменатель ея обращается къ нулю при нѣкоторомъ дѣйствительномъ значеніи x , напр., при $x = a$. Тогда при $x = a - h$ (гдѣ h какъ угодно мало), т.-е. при x стремящемся къ a , но остающемся всегда $< a$, дробь стремится къ $+\infty$, либо къ $-\infty$; иначе говоря, по мѣрѣ приближенія абсциссы къ OP (черт. 59), ордината неограниченно возрастаетъ въ положительномъ, либо въ отрицательномъ направленіи; получается вѣтвь кривой (1), либо (2). Если, затѣмъ, x сдѣлается не-

много больше a , принявъ значеніе $a + h$, болѣе a , функция останется безконечно большою, или того же знака, какъ прежде, или переѣмливъ знакъ; но эта величина, свѣчала безконечно большая, будетъ по абсолютному значенію становиться все меньше и меньше, по мѣрѣ того какъ x будетъ удаляться отъ a , и получится вѣтвь кривой (3) или (4).

Прямая PO будет *асимптотой* кривой, параллельною оси Oy .

Переходимъ къ изученію измѣненія нѣкоторыхъ элементарныхъ функций.

I. Изслѣдованіе функціи первой степени.

583. Теорема. Функція первой степени.

$$y = ax + b$$

непрерывна на всемъ протяженіи дѣйствительныхъ значеній переменнаго x ; при увеличеніи x она прогрессивно возрастаетъ, когда $a > 0$, и уменьшается, когда $a < 0$.

1. Во-первыхъ, очевидно, что при всякомъ дѣйствительномъ и конечномъ x функція дѣйствительна и конечна. Затѣмъ, пусть x_0 будетъ нѣкоторое определенное значеніе переменнаго x ; соответствующее значеніе y пусть будетъ y_0 , такъ что

$$y_0 = ax_0 + b.$$

Дадимъ x_0 нѣкоторое приращеніе h , и пусть соответствующее приращеніе y_0 будетъ K : то $y_0 + K = a(x_0 + h) + b$; вычтя изъ новаго состоянія функціи прежнее, найдемъ:

$$K = [a(x_0 + h) + b] - (ax_0 + b) = ah.$$

Такъ какъ a конечно, то по мѣрѣ приближенія h къ нулю, и произведеніе ah приближается къ нулю; слѣд. ah , т.-е. приращеніе K функціи м. б. сдѣлано какъ угодно мало. Это имѣетъ мѣсто при всякомъ x_0 , слѣд. функція непрерывна на всемъ протяженіи дѣйствительныхъ значеній x .

2. Возьмемъ рядъ возрастающихъ значеній x :

$$x' < x'' < x''' < \dots \quad (1)$$

Если $a > 0$, то умноженіе на a не измѣнитъ смысла неравенствъ, и получимъ: $ax' < ax'' < ax''' < \dots$. Придавая во b , также не нарушимъ неравенствъ, слѣд.

$$ax' + b < ax'' + b < ax''' + b < \dots$$

Если же $a < 0$, то изъ (1) найдемъ: $ax' > ax'' > ax''' > \dots$; а отсюда

$$ax' + b > ax'' + b > ax''' + b > \dots$$

Итакъ, когда x возрастаетъ, то функція постоянно возрастаетъ при $a > 0$, и постоянно уменьшается при $a < 0$.

Примѣръ 1. Функція $y = 5x - 2$ при возрастаніи x возрастаетъ; при x безконечномъ она безконечна; когда x , увеличиваясь, проходитъ чрезъ зна-

чение $\frac{2}{5}$, обращающее функцию въ 0, она изъ отрицательной обращается въ положительную:

$$\begin{array}{l} x \quad \sim \quad \cdot < \quad \cdot < \quad \cdot \cdot \cdot \frac{2}{5} \quad \cdot \cdot \cdot < \quad \cdot \cdot \cdot < \quad \cdot \cdot \cdot \sim \\ y \quad \sim \quad \cdot < \quad \cdot < \quad \cdot \cdot \cdot 0 \quad \cdot \cdot \cdot < \quad \cdot \cdot \cdot < \quad \cdot \cdot \cdot \sim. \end{array}$$

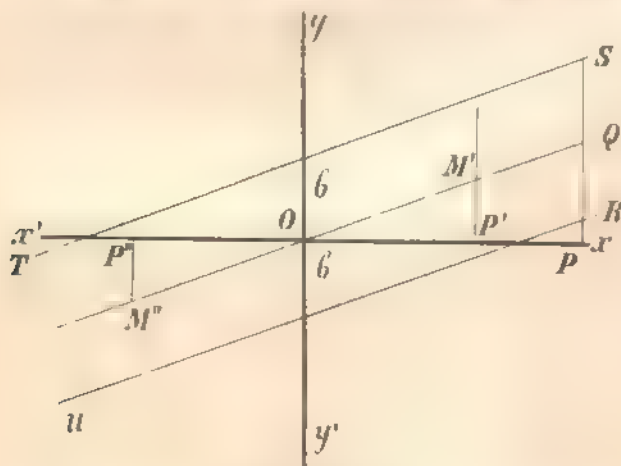
Примѣръ II. Функция $y = -2x + 1$ при возрастаніи x идетъ убывая; когда x безконечно, абсолютная величина ея безконечна; когда x , увеличиваясь, проходитъ чрезъ значеніе $\frac{1}{2}$, обращающее функцию въ 0, она изъ положительной обращается въ отрицательную:

$$\begin{array}{l} x \quad | \quad -\infty \quad \cdot \cdot \cdot < \quad \cdot \cdot \cdot < \quad \cdot \cdot \cdot \frac{1}{2} \quad \cdot \cdot \cdot < \quad \cdot \cdot \cdot < \quad \cdot \cdot \cdot \sim \\ y \quad | \quad +\infty \quad \cdot \cdot \cdot > \quad \cdot \cdot \cdot > \quad \cdot \cdot \cdot 0 \quad \cdot \cdot \cdot > \quad \cdot \cdot \cdot > \quad \cdot \cdot \cdot \sim. \end{array}$$

Примѣчаніе. Такимъ образомъ, функций $ax + b$ не имѣетъ относительныхъ максимума и минимума, ибо она измѣняется не колеблется; она имѣетъ абсолютный минимумъ, равный $-\infty$, и абсолютный максимумъ, равный $+\infty$.

584. Теорема. Линія, изображающая функцию, связанную съ независимымъ переменнымъ уравненіемъ первой степени, есть прямая.

Возьмемъ уравненіе $y = ax + b$ и, положивъ $Y = ax$, построимъ сперва геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ координаты удовлетворяютъ уравненію $Y = ax$. Пусть Q, M', M (черт. 60) будутъ точки искомаго мѣста; проведемъ ихъ орди-



Черт. 60

наты $QR, M'P', M''P''$, соединимъ точки Q, M', M'' съ O . Такъ какъ координаты искомаго мѣста должны удовлетворять уравненію $Y = ax$, то

$$\frac{QR}{OP} = a, \frac{M'P'}{OP'} = a, \frac{M''P''}{OP''} = a, \text{ и т. д. откуда } \frac{QR}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \dots$$

Изъ этого слѣдуетъ, что треугольники QOP , MOP , $M'OP$, ... имѣютъ по равному (прямому) углу, заключенному между пропорціональными сторонами, сл. подобны. Изъ подобія же ихъ слѣдуетъ равенство угловъ QOP , $M'OP$, $M'OP$, ... доказывающее, что лини OQ , OM , OM' , ... совпадаютъ, а слѣд. точки Q , M , M' , ... лежатъ на одной и той же прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Итакъ, геометрическое мѣсто уравненія $Y = ax$ есть прямая OQ .

Чтобы отъ ординатъ Y перейти къ ординатамъ y , соответствующимъ тѣмъ же значеніямъ x , достаточно къ первымъ прибавить b (къ ту или другую сторону, см. по знаку b): получится прямая ST , либо KU , параллельная первой.

Итакъ, *функция $ax + b$ во всякомъ случаѣ представляетъ ординату прямой.*

II. Изслѣдованіе квадратнаго тринома.

585. ТЕОРЕМА. Квадратный триномъ

$$y = ax^2 + bx + c$$

есть функция непрерывная для всѣхъ действительныхъ значений x отъ $-\infty$ до $+\infty$; когда $a > 0$, функция имѣетъ минимумъ, при $a < 0$ она имѣетъ максимумъ; максимумъ и минимумъ выражаются формулою

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

а соответствующія значенія x формулою: $-\frac{b}{2a}$; наконецъ, функция имѣетъ равныя величины, когда x получаетъ значенія, равноотстоящія отъ $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ и наоборотъ.

1. Во-первыхъ, очевидно, что при всякомъ действительномъ и конечномъ значеніи x триномъ действителенъ и конеченъ. Давъ перемѣнному x значенія x_0 и $x_0 + h$, обозначимъ соответствующія величины y черепъ y_0 и $y_0 + K$, найдя:

$$\begin{aligned} K = (y_0 + K) - y_0 &= [a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c] - (ax_0^2 + bx_0 + c) \\ &= ah^2 + (2ax_0 + b)h = h[2ax_0 + b + ah]. \end{aligned}$$

Множитель въ скобкахъ, будучи цѣлымъ относительно x_0 и h , конеченъ при всякихъ конечныхъ значеніяхъ x_0 и h , а слѣд. произведение этого конечнаго количества на h можно сдѣлать какъ угодно близкимъ къ нулю, приближая къ нулю приращеніе h ; иначе говоря, когда h стремится къ 0, то и K стремится къ предѣлу нулю, слѣд. триномъ есть функция непрерывная.

2. Замѣтимъ, что квадратъ какаго-либо выраженія измѣняется въ томъ же смыслѣ, какъ и абсолютная величина этого выраженія. Если положительныя числа идутъ возрастаю, то и квадраты ихъ идутъ возрастаю. Если отрицательныя числа идутъ возрастаю, ихъ квадраты уменьшаются. Помня это, дадимъ триному знакомую уже форму:

$$y = a \left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (1).$$

Будемъ измѣнять x отъ $-\infty$ до $+\infty$, замѣтивъ въ числѣ этихъ значеній то, при которомъ $x + \frac{b}{2a}$ обращается въ нуль, именно $x = -\frac{b}{2a}$. Напишемъ рядъ значеній x , возрастающихъ отъ $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$, а потомъ отъ $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$:

$$x = -\infty \dots < \dots < \dots - \frac{b}{2a} \dots < \dots < \dots +\infty.$$

Придавая къ каждому, воображаемому въ этомъ ряду количеству, по $\frac{b}{2a}$, мы не измѣнимъ смысла неравенствъ; слѣд. измѣненія $x + \frac{b}{2a}$ будутъ идти слѣдующимъ образомъ:

$$x + \frac{b}{2a} \quad \underbrace{-\infty \dots < \dots < \dots 0 \dots < \dots < \dots +\infty}_{+}$$

Возимая значенія $x + \frac{b}{2a}$, воображаемая здѣсь, въ квадраты, и замѣчая, что квадраты отрицательныхъ значеній пойдутъ уменьшаясь, а положительныхъ увеличиваясь, получимъ слѣдующій рядъ измѣненій выраженій $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\infty \dots < \dots < \dots 0 \dots < \dots < \dots +\infty.$$

Замѣтимъ здѣсь, что выраженіе $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ идетъ уменьшаясь до того момента, когда x достигаетъ критическаго значенія $-\frac{b}{2a}$, и потомъ идетъ, безъ предѣла увеличиваясь. Такимъ образомъ, выраженіе $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ проходитъ черту *minimum*, равной 0, когда x достигаетъ величины $-\frac{b}{2a}$.

Придавая къ каждому члену, воображаемому въ последнемъ ряду, постоянное количество $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, мы не нарушимъ смысла измѣненій, и получимъ нижеслѣдующій рядъ измѣненій выраженія $x + \frac{b}{2a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \underbrace{-\infty \dots < \dots < \dots 0 \dots < \dots < \dots +\infty}_{+}$$

Наконецъ, чтобы отъ этого выраженія перейти къ триному, нужно ввести множителя a ; но здѣсь нужно различать два случая: $a > 0$ и $a < 0$. Въ первомъ случаѣ умноженіе на a не нарушитъ смысла неравенствъ, во второмъ, умноженіе на a измѣнитъ смыслъ всѣхъ неравенствъ. Итакъ, окончательно имѣемъ слѣдующую таблицу измѣненій триннома:

$$\begin{array}{l} x = -\infty \dots < \dots < \dots - \frac{b}{2a} \dots < \dots < \dots +\infty \\ ax^2 + bx + c \text{ при } a > 0 \quad +\infty \dots > \dots > \dots - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \dots < \dots < \dots +\infty \\ ax^2 + bx + c \text{ при } a < 0 \quad -\infty \dots < \dots < \dots - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \dots > \dots > \dots -\infty \end{array}$$

Отсюда непосредственно видно, что:

1) При $a > 0$ триномъ $ax^2 + bx + c$ идетъ уменьшаясь до того момента, когда x достигаетъ величины $-\frac{b}{2a}$, а съ этого момента онъ идетъ возрастающа неограниченно; слѣд. при $a > 0$ триномъ имѣетъ *minimum*, равный

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

когда x получаетъ значеніе $-\frac{b}{2a}$.

2) При $a < 0$ триномъ $ax^2 + bx + c$ идетъ возрастающа до того момента, когда x достигаетъ величины $-\frac{b}{2a}$, затѣмъ онъ неограниченно уменьшается; слѣд. при $a < 0$ триномъ имѣетъ *maximum*, равный

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

котораго достигаетъ при $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Дадимъ переменному x два значенія, одинаково по абсолютной величинѣ различающіяся отъ $-\frac{b}{2a}$; эти значенія будутъ вида

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + h \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - h.$$

Подставивъ эти значенія x въ формулу (1), найдемъ, что триномъ въ обоихъ случаяхъ обращается въ $a \cdot h^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, т. е. получаетъ равныя значенія.

Обратно, пусть триномъ получаетъ равныя величины при двухъ значеніяхъ x' и x'' переменнаго x , т. е. пусть

$$ax'^2 + bx' + c = ax''^2 + bx'' + c$$

откуда

$$a(x'^2 - x''^2) + b(x' - x'') = 0,$$

или, раздѣляя обѣ части на $a(x' - x'')$, найдемъ

$$x' + x'' + \frac{b}{a} = 0;$$

пусть $x < x''$; мы можемъ предыдущее равенство написать въ видѣ

$$x'' = \left(-\frac{b}{2a}\right) - \left(-\frac{b}{2a} - x'\right).$$

а это означаетъ, что избытокъ количества x'' надъ $-\frac{b}{2a}$ равенъ избытку $-\frac{b}{2a}$ надъ x' , или, другими словами, что x' и x'' равно отстоятъ отъ $-\frac{b}{2a}$; если большее изъ этихъ количествъ равно $-\frac{b}{2a} + h$, то меньшее будетъ $-\frac{b}{2a} - h$.

586 Примѣчаніе I. Изъ предыдущей теоремы непосредственно заключаемъ, что:

Когда $a > 0$ триномъ два раза проходитъ черезъ нуль, если его *минимумъ отрицателенъ*, одинъ разъ — когда этотъ *минимумъ 0*, и не обращается въ нуль, если *минимумъ положителенъ*.

Въ самомъ дѣлѣ, триномъ непрерывенъ и измѣняется въ разсматриваемомъ случаѣ отъ $-\infty$ до *минимума*, а потомъ отъ *минимума* до $+\infty$, проходя чрезъ прежнія значенія; слѣд. онъ можетъ обратиться въ нуль только тогда, когда его *минимумъ* < 0 , и въ такомъ случаѣ два раза пройдетъ черезъ нуль.

Значенія x , обращающія триномъ въ нуль, даютъ въ этомъ случаѣ сумму равную $-\frac{b}{2a}$, ибо они равноостоятъ отъ этой величины.

Иначе говоря: когда $a > 0$, уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$ имѣетъ действительные неравные корни, если $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$, или $b^2 - 4ac > 0$, а сумма корней равна $-\frac{b}{a}$; но имѣетъ равные корни, если $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$, или $b^2 - 4ac = 0$, а общая величина ихъ есть $-\frac{b}{2a}$; наконецъ, корни его мнимы, когда $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$, или $b^2 - 4ac < 0$.

Все это — знакомые результаты, найденные здѣсь только инымъ путемъ.

Такимъ же образомъ, одного взгляда на таблицу измѣненій тринома достаточно, чтобы убѣдиться, что при $a < 0$ необходимо, чтобы *максимумъ* былъ положительнъ, для того, чтобы функция прошла черезъ 0, но тогда она и другой разъ пройдетъ черезъ ту же величину. Этотъ случай изслѣдуется какъ и предыдущій.

Примѣчаніе II. Когда триномъ не можетъ обратиться въ нуль, всѣ его значенія — того же знака, какъ a ; тоже самое имѣетъ мѣсто, когда *максимумъ* или *минимумъ* равенъ нулю.

Когда триномъ проходитъ два раза черезъ нуль, знакъ его противоположенъ знаку a для всѣхъ значеній x , содержащихся между этими двумя частными значеніями x , но знакъ его одинаковъ съ знакомъ a для всѣхъ остальныхъ значеній x .

$x = -\infty < x_1 < -\frac{b}{2a} < x_2 < \dots < +\infty$		
$ax^2 + bx + c$ при $a > 0$	$\left \begin{array}{c} +\infty \dots > \dots > 0 \\ \text{знакъ коэф.} \dots a \end{array} \right $	$\left \begin{array}{c} \frac{b^2 - 4ac}{4a} \dots > 0 \dots < \dots < -\infty \\ \text{знакъ коэф.} \dots a \end{array} \right $
$ax^2 + bx + c$ при $a < 0$	$\left \begin{array}{c} -\infty \dots < \dots < 0 \\ \text{знакъ коэф.} \dots a \end{array} \right $	$\left \begin{array}{c} \frac{b^2 - 4ac}{4a} \dots < 0 \dots > \dots > -\infty \\ \text{знакъ коэф.} \dots -a \end{array} \right $
	зн. коэф. $+\alpha$	зн. коэф. $+\alpha$

Такимъ образомъ уже знакомые намъ результаты относительно измѣненія знака тринома ясно вытекаютъ изъ непрерывности измѣненій этой функции.

Примѣчаніе III. Относительный *максимумъ* или *минимумъ* тринома $ax^2 + bx + c$ есть *амплитда* съ тѣмъ и абсолютный.

Пусть напр., $a > 0$; таблица изменений показывает, что

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

действительно меньше всех других значений функций; слѣд. это — *минимум абсолютный*.

Это же непосредственно слѣдует из формулы

$$y = a \left[\left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

Въ самомъ дѣлѣ, переменное количество $\left(x - \frac{b}{2a} \right)^2$, будучи квадратомъ, имѣетъ наименьшую величину нуль, при $x = \frac{b}{2a}$.

Слѣд. наименьшая величина скобокъ есть $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$; умножая на положительное a , найдемъ и для y наименьшую величину, которая, слѣд.,

$$y = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

587. Графическое представлѣніе хода изменений квадратнаго тринома.

Укажемъ планъ построения кривыхъ, изображающихъ изменения тринома, различая два главныхъ случая: $a > 0$ и $a < 0$, и въ каждомъ изъ нихъ 3 подразделения: $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

Пусть $a > 0$ и $b^2 - 4ac > 0$; въ этомъ случаѣ таблица изменений тринома (§ 586) показываетъ, что при $x = \frac{b}{2a}$ онъ имѣетъ отрицательный минимум $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$; затѣмъ, при x , равныхъ корнямъ (x_1 и x_2), обращается въ нуль; наконецъ, по мѣрѣ уменьшенія переменнаго x отъ x_1 до $-\infty$ и увеличенія отъ x_2 до $+\infty$, триномъ возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$. При каждаго двухъ значеніяхъ x , равноотстоящихъ отъ $-\frac{b}{2a}$, значенія тринома одинаковы по величинѣ и по знаку. Отсюда такое построеніе. Откладываемъ (черт. 61) на оси абсциссъ, вправо или влѣво, смотря по знаку, отрезокъ $OA = -\frac{b}{2a}$. Въ точкѣ А проводимъ параллель ВС къ оси yy' и откладываемъ на ней отрезокъ $AB = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ внизъ отъ точки А (т. е. минимумъ этотъ < 0); такимъ образомъ получаемъ наименьшую ординату, и точка В есть нисшая точка кривой.

Вправо и влѣво отъ точки А откладываемъ линіи $AN = AN' = \frac{b^2 - 4ac}{2a}$; получаемъ точки Н и Н', которыми опредѣляются корни ОН и ОН' тринома; для этихъ значеній x ординаты $= 0$, слѣд. въ точкахъ Н и Н' кривая пересѣкаетъ ось x -въ. Соединивъ точку В съ точками Н и Н' кривою, продолжаемъ части ВН и ВН' этой кривой вверхъ, располагая обѣ вѣтви симметрично относительно прямой ВВ'. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ (§ 585, 3), что для всякихъ двухъ значеній x , равноотстоящихъ отъ ОА, значенія y равны, т. е. что если взять $AP = AP'$, то перпендикуляры РМ и Р'М' къ оси xx' въ точкахъ Р и Р', представляющіе ординаты кривой, равны; слѣд. хорда ММ' будетъ параллельна оси x -въ и раздѣ-

лится прямою AC пополамъ. Слѣд. линія AC дѣлитъ пополамъ всѣ хорды кривой, ей перпендикулярныя, т.е. дѣлитъ кривую на двѣ симметричныя части. Поэтому AC наз. *осью* кривой, точка B *вершиною* кривой. Сама кривая есть *парабола*.

Для болѣе точнаго построения кривой нужно дать x -су большее число значеній и вычислить соответствующія значенія тринома, нанося ихъ на ординатахъ: такимъ образомъ получится большее число точекъ кривой и фигура ея опредѣлится точнѣе. Такимъ образомъ, ходъ измѣненій тринома изображается наглядно и выясняются всѣ частности. Напр., видно, что кривая можетъ пересѣкать ось x -овъ только тогда, когда шшшшш отрицателенъ, и т. п.

Разъ кривая построена тщательно, т.е. при помощи достаточнаго числа точекъ, она можетъ служить для болѣе быстрою опредѣленія величины функции (y), соответствующей данной величинѣ переѣннаго x , и обратно, для опредѣленія значеній x , соответствующихъ данной y . Въ первомъ случаѣ достаточно нанести данный x по оси x' отъ точки O , вправо или влѣво, см по знаку; пусть P будетъ найденная точка; затѣмъ взять точку M кривой, въ которой перпендикуляръ къ оси x' , возставленный въ точкѣ P , пересѣкаетъ кривую. Длина MP и представитъ абсолютную величину тринома, о знакѣ же судимъ по положенію точки M относительно оси x -овъ.

Для опредѣленія значеній x -са, при которыхъ триномъ принимаетъ данную величину k , наносимъ на ось y -въ, начиная отъ точки O , въ направленіи, опредѣляемомъ знакомъ k , длину $OK = k$; черезъ точку K проводимъ параллель оси x -въ; пусть она встрѣчаетъ кривую въ точкахъ M и M' ; абсциссы OP и OP' этихъ точекъ и будутъ искомыя значенія x .

Указаннаго достаточно для построения кривыхъ во всѣхъ случаяхъ; разъясненія излишни. Поэтому мы прямо прилагаемъ таблички измѣненій тринома для каждаго случая, а противъ нихъ кривыя, выражающія эти измѣненія.

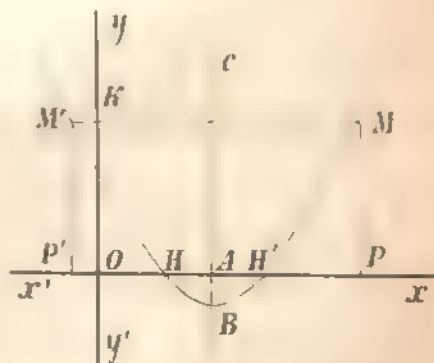
Значеніе линій указано вѣлѣтъ въ каждомъ чертежѣ.

I случай: $a > 0$.

1. $b^2 - 4ac > 0$; $x_1 < x_2$.

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

x	y
x_1	0
$-\frac{b}{2a}$	$\min. y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$
x_2	0
$+\infty$	$+\infty$



Черт. 61.

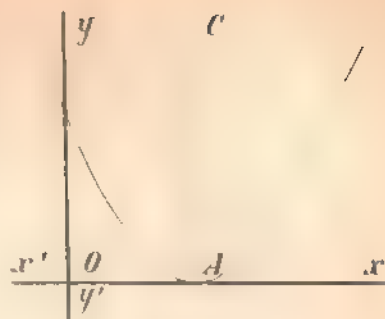
$$OA = \frac{b}{2a} \quad AB = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad OH = c_1 \quad OH' = c_2$$

2. $b^2 - 4ac = 0$; $x_1 = x_2$.

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$



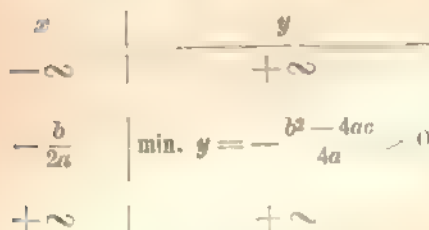
$$OA = \frac{b}{2a}$$



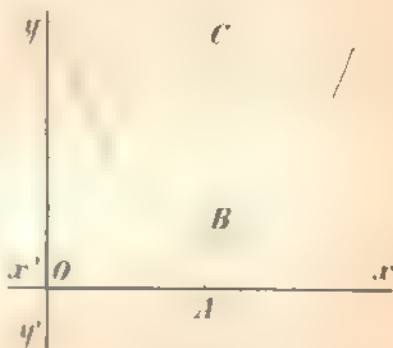
Черт. 62

3. $b^2 - 4ac < 0$; x_1 и x_2 мнимые.

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$



$$OA = -\frac{b}{2a}; \quad AB = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

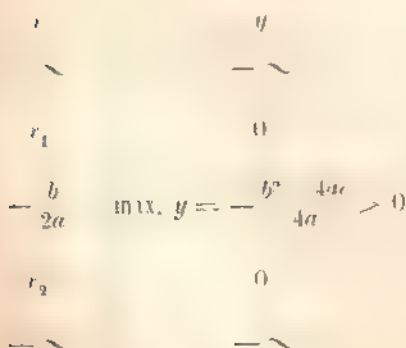


Черт. 63.

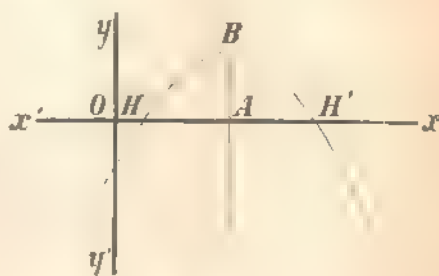
II случай: $a < 0$.

1. $b^2 - 4ac > 0$; $x_1 < x_2$.

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$



$$OA = -\frac{b}{2a}; \quad AB = \frac{b^2 - 4ac}{4a}; \quad OH = x_1; \quad OH' = x_2.$$



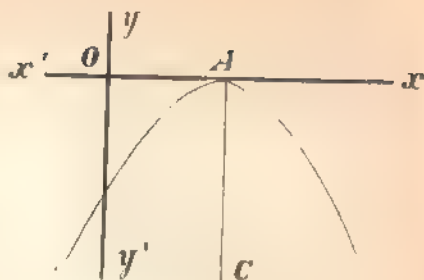
Черт. 64.

$$2. b^2 - 4ac = 0; \quad x_1 = x_2.$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$



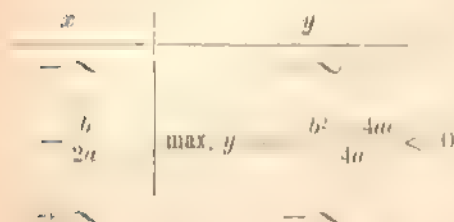
$$OA = -\frac{b}{2a}.$$



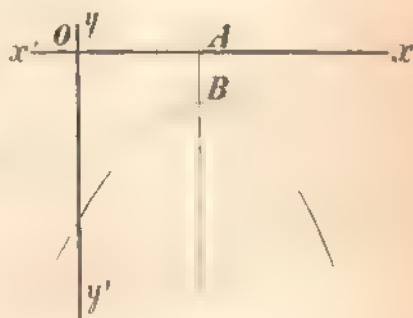
Черт. 65.

$$3. b^2 - 4ac < 0; \quad x_1 \text{ и } x_2 \text{ мнимые.}$$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$



$$OA = -\frac{b}{2a}; \quad AB = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$



Черт. 66.

588. Примеръ 1. Изслѣдовать измѣненія тринома $y = \frac{3}{2}x^2 + 12x + 18$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Представимъ триномъ въ видѣ

$$y = \frac{3}{2}[(x + 4)^2 - 4].$$

Отсюда, по предыдущему, прямо слѣдуетъ таблица измѣненій:

x	$-\infty \dots < \dots -6 \dots < -4 \dots < \dots -2 \dots < \dots +\infty$
y	$+\infty \dots > \dots 0 \dots > -6 \dots < \dots 0 \dots < \dots +\infty$

т.-е. данный триномъ уменьшается отъ $+\infty$ до -6 , когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до -4 ; потомъ онъ увеличивается отъ -6 до $+\infty$, когда x возрастаетъ отъ -4 до $+\infty$. Слѣд. триномъ имѣетъ минимумъ $= -6$ при $x = -4$; проходитъ дважды чрезъ каждую величину, большую -6 , и никогда не дѣлается меньше -6 .

Графически измѣненія функцій изобразятся измѣненіемъ ординаты параболы, которой ось параллельна оси y , причемъ координаты нижней точки (вершины) суть: $x = -4$, $y = -6$; кривая два раза пересѣкаетъ ось x , въ точкахъ, коихъ абсциссы суть: -2 и -6 (черт. 67).

Примеръ II. Изслѣдовать измѣненія тринома $y = x^2 - 2x - 3$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

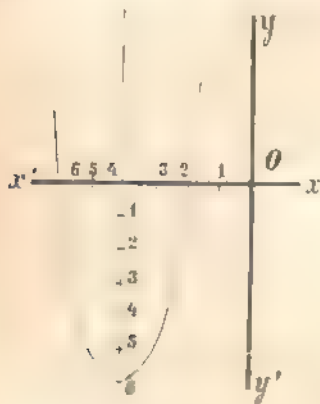
Представимъ триномъ въ видѣ:

$$y = -(x - 1)^2 - 2.$$

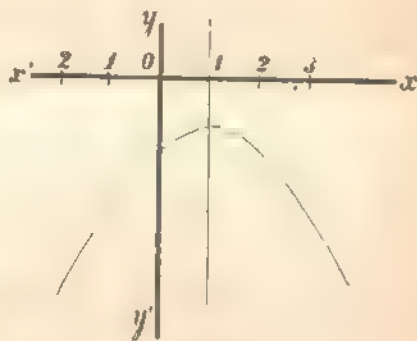
Имѣемъ таблицу измѣненій

x	$-\infty$	$<$	\dots	$<$	\dots	1	$<$	\dots	$<$	\dots	$+\infty$
y	$-\infty$	$<$	\dots	$<$	\dots	-2	$>$	\dots	$>$	\dots	$-\infty$

Заключаемъ, что триномъ увеличивается отъ $-\infty$ до -2 , когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+1$; затѣмъ онъ уменьшается отъ -2 до $-\infty$, когда x возрастаетъ отъ $+1$ до $+\infty$. Слѣдоват. функция имѣетъ максимумъ (-2), соот-



Черт. 67.



Черт. 68.

вѣствующій $x = +1$; слѣд. она не проходитъ черезъ 0, но проходитъ дважды чрезъ всякое значение, меньшее -2 . Парабола, представляющая ходъ измѣненій тринома, вся лежитъ въ области отрицательныхъ угловъ (черт. 68).

III Изслѣдованіе биквадратнаго тринома.

589. ТЕОРЕМА. Биквадратный триномъ

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

есть функция непрерывная для всего действительныхъ значений x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Функция эта необходимо имѣетъ максимумъ, либо минимумъ, равный c ; кроме того, когда a и b имѣютъ противоположные знаки, она еще имѣетъ либо два максимумъа, либо два минимумъа; если же a и b имѣютъ знаки одинаковые, то никакого макс. или мин., кроме c , триномъ не имѣетъ.

1. Очевидно, что при всякомъ действительномъ и конечномъ значеніи x триномъ действителенъ и конеченъ. Давъ переѣнному x нѣкоторое приращеніе

h и вычти изъ новаго состоянія функціи прежнее, найдемъ соответствующее приращеніе $y(h)$:

$$k = a(x+h)^4 + b(x+h)^2 + c - ax^4 - bx^2 - c = h[4ax^3 + 2bx + h(6ax^2 + 4axh + ah^2 + b)].$$

Множитель въ квадратныхъ скобкахъ конеченъ при всякихъ конечныхъ x и h , и слѣд. при безконечно маломъ h , вторая часть и б. сдѣлана какъ угодно малою; слѣд. триномъ непрерывенъ.

2. Представимъ триномъ въ видѣ

$$y = a \left[\left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

Первый случай: $a > 0, b < 0$.

Какъ и для квадратнаго тринома, составляемъ таблицу:

$$\begin{array}{lcl} x & \sim \dots & \left| -\frac{b}{2a} \dots 0 \dots \right| \frac{b}{2a} \dots \sim \\ x^2 & \sim \dots & \frac{b^2}{4a^2} \dots 0 \dots & -\frac{b^2}{4a^2} \dots +\infty \\ x^2 & \frac{b^2}{4a^2} & \sim \dots & 0 \dots \frac{b^2}{4a^2} \dots \sim \end{array}$$

Фунд. $\left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2$ проходитъ черезъ минимумъ 0, когда x проходитъ чрезъ величину $\left| -\frac{b}{2a} \right|$; затѣмъ тотъ же квадратъ проходитъ чрезъ максимумъ $\frac{b^2}{4a^2}$, когда x обращается въ 0; уменьшается до минимума равнаго нулю, когда x увеличится до $\left| \frac{b}{2a} \right|$, а потомъ увеличивается до безконечности.

Прибавляя постоянное количество $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, и умножая на положительное количество a , мы не измѣнимъ смысла перенесенья, и найдемъ:

$$\begin{array}{lcl} x & \sim \dots & \left| -\frac{b}{2a} \dots 0 \dots \right| \frac{b}{2a} \dots \sim \\ y & \sim \dots & \frac{b^2 - 4ac}{4a} \dots \frac{b^2 - 4ac}{4a} \dots \sim \end{array}$$

Итакъ, въ случаѣ: $a > 0, b < 0$, биквадратный триномъ имѣетъ два минимума, равные $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, и одинъ максимумъ, равный с. Минимума триномъ имѣетъ при $x = \pm \left| -\frac{b}{2a} \right|$, максимумъ при $x = 0$.

Для слѣдующихъ случаевъ мы прямо даемъ результаты, которые получаются тѣмъ же приемомъ.

Второй случай: $a > 0, b \geq 0$.

$$\begin{array}{lcl} x & | -\infty \dots & & \dots 0 \dots & \dots +\infty \\ y & | \sim \dots & & \dots c \dots & \dots +\infty \end{array}$$

триномъ имѣетъ минимумъ $= c$, при $x = 0$.

Третій случай: $a < 0$, $b \leq 0$.

$$\begin{array}{l} x \mid -\infty \dots < \dots < \dots 0 \dots < \dots < \dots +\infty \\ y \mid -\infty \dots < \dots < \dots c \dots > \dots > \dots -\infty \end{array}$$

триномъ имѣетъ maximum $= c$, при $x = 0$.

Четвертый случай: $a < 0$, $b > 0$.

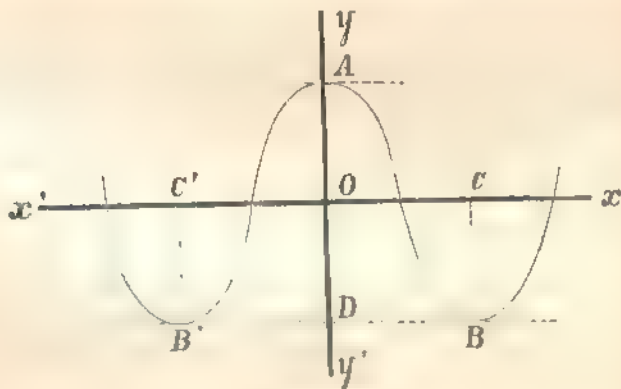
$$\begin{array}{l} x \mid -\infty \dots < \dots < -\sqrt{-\frac{b}{2a}} \dots 0 \dots \sqrt{-\frac{b}{2a}} \dots +\infty \\ y \mid -\infty \dots < \dots < -\frac{b^2-4ac}{4a} > \dots c \dots < \dots < -\frac{b^2-4ac}{4a} \dots > \dots -\infty \end{array}$$

Въ этомъ случаѣ триномъ имѣетъ два maximum'а, равные $-\frac{b^2-4ac}{4a}$, которыхъ онъ достигаетъ при $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$, и одинъ minimum $= c$, при $x = 0$.

590. Графическое представлѣніе. 1. Пусть напр.

$$a > 0, \quad b \leq 0, \quad b^2 - 4ac > 0, \quad c > 0.$$

При этихъ условіяхъ триномъ имѣетъ положительный maximum c и два отрицат. минимальныя значенія, равныя $-\frac{b^2-4ac}{4a}$; max. c триномъ имѣетъ при $x = 0$, minima при $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Отсюда построеніе; беремъ (черт. 69)



Черт. 69.

$OA = c$; $OB' = OB = \sqrt{-\frac{b}{2a}}$; $OD = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Maximum соответствуетъ точкѣ

A кривой, minima — точкамъ B и B'. ось xx' пересѣкаетъ кривую въ четырехъ дѣйствительныхъ точкахъ, слѣд. триномъ 4 раза обращается въ нуль, при x попарно равныхъ, но противоположныхъ по знаку. Это совершенно сообразно съ тѣмъ результатомъ, что при данныхъ условіяхъ биквадратное уравненіе $ax^4 + bx^2 + c = 0$ имѣетъ 4 различныхъ дѣйствительныхъ корня.

Возьмем численный примѣръ для разсматриваемаго случая.

Примѣръ. Изслѣдовать измѣненіе y , связаннаго съ x уравненіемъ $2y = x^4 - 6x^2 + 5$, при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

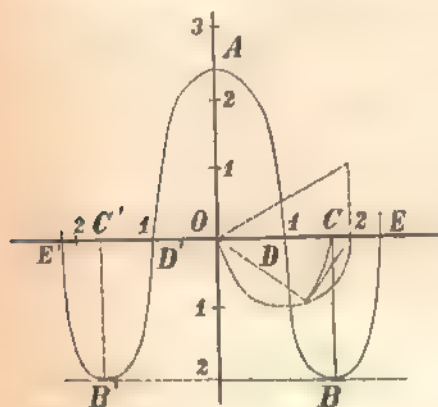
Въ числѣ критическихъ значеній x опредѣливъ корни триннома $x^4 - 6x^2 + 5$, которые равны $\pm\sqrt{5}$ и ± 1 , даемъ y форму:

$$y = \frac{1}{2}[(x^2 - 3)^2 - 4],$$

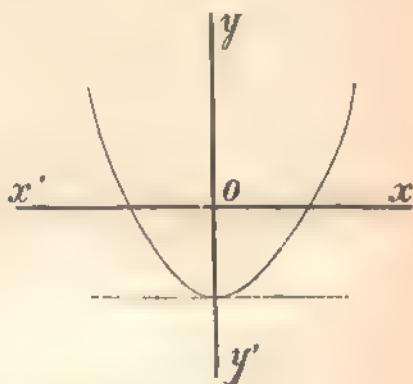
и находимъ слѣдующую таблицу измѣненій y :

x	$-\infty$	\dots	$-\sqrt{5}$	$<$	\dots	1	$<$	\dots	0	$<$	\dots	$+\sqrt{3}$	$<$	\dots	$+\infty$		
y	$+\infty$	\dots	0	$>$	\dots	-2	\dots	0	$<$	\dots	$\frac{5}{2}$	$>$	\dots	0	$<$	\dots	$+\infty$
						minim.						max.					

(Отсюда заключаемъ, что функція уменьшается отъ $+\infty$ до -2 , когда x увеличивается отъ $-\infty$ до $-\sqrt{5}$, проходя чрезъ 0 при $x = -\sqrt{5}$; затѣмъ она увеличивается до $\frac{5}{2}$ при возрастаніи x до 0 , проходя чрезъ нулевое значе-



Черт. 70.



Черт. 71.

ніе при $x = -1$. Съ этого момента функція проходитъ прежнія значенія, въ обратномъ порядкѣ. На чертежѣ (черт. 70):

$$OC' = OC = \sqrt{3};$$

$$C'B' = CB = 2;$$

$$OA = \frac{5}{2};$$

$$OE' = OE = \sqrt{5}; \quad OD' = OD = 1.$$

2. Пусть будетъ: $a > 0$, $b > 0$.

При этих условиях триномъ $ax^2 + bx + c$ уменьшается отъ $+\infty$ до c , а потомъ возрастаетъ отъ c до $+\infty$, проходя черезъ минимумъ c при $x = 0$. Въ нуль онъ можетъ обратиться только два раза, при двухъ равныхъ и противоположныхъ значеніяхъ x , и то лишь въ томъ случаѣ, когда $c < 0$.

Эти измѣненія представлены на чертежѣ 71-омъ, причемъ предполагается $c < 0$.

IV. Исслѣдованіе дроби: $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$.

591. Даемъ переменному x нѣкоторое приращеніе h ; для соотвѣтствующаго приращенія k дроби находимъ:

$$k = \frac{a(x+h) + b}{a'(x+h) + b'} - \frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{h(ab' - a'b)}{(a'x + b')(a'x + b + a'h)}.$$

Отсюда заключаемъ: 1) когда x приближается къ $-\frac{b'}{a'}$, знаменатель выраженія k приближается къ 0, а слѣд. коэффициентъ при h , т.-е. дробь $\frac{ab' - a'b}{(a'x + b')(a'x + b + a'h)}$ приближается къ ∞ , поэтому и приращеніе k функціи приближается къ ∞ , т.-е. функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности. При всѣхъ другихъ значеніяхъ x , по мѣрѣ приближенія h къ 0, k стремится къ 0, т.-е. функція непрерывна. Итакъ, дробь y непрерывна въ каждомъ изъ интервалловъ:

$$\text{отъ } -\infty \text{ до } -\frac{b'}{a'} \quad \text{и} \quad \text{отъ } -\frac{b'}{a'} \text{ до } +\infty,$$

претерпѣвая разрывъ непрерывности только при $x = -\frac{b'}{a'}$, общему предѣлу этихъ интервалловъ.

2) Знакъ выраженія k зависитъ только отъ числителя; въ самомъ дѣлѣ, знаменатель можно представить въ видѣ $(a'x + b')^2 + h \cdot a'(a'x + b)$, а это выраженіе, при достаточно маломъ h , существенно—положительно, ибо знакъ его будетъ зависетьъ только отъ перваго члена $(a'x + b')^2$, который (какъ квадратъ) положителенъ при всякомъ дѣйствительномъ x . Но числитель $ab' - a'b$, какъ количество постоянное, всегда имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ, сл. функція всегда идетъ: или возрастаая, или уменьшаясь; т.-е. въ каждомъ изъ интервалловъ непрерывности дробь

идетъ постоянно увеличиваясь, если $ab' - a'b > 0$;

идетъ постоянно уменьшаясь, если $ab' - a'b < 0$;

имѣетъ постоянную величину, если $ab' - a'b = 0$,

ибо въ послѣднемъ случаѣ всегда $k = 0$, т.-е. дробь не получаетъ приращеній при измѣненіяхъ x , сохраняя одну и ту же величину.

Итакъ, при исслѣдованіи измѣненій функціи, должны различать три указанныя случая; при этомъ, раздѣливъ числ. на знаменателя дроби, получаемъ

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'^2x + a'b'} = \frac{a}{a'} + \frac{a'^2}{x + \frac{b'}{a'}}.$$

Положивъ, для краткости, $\frac{ab - a'b}{a^2} = \lambda$, замѣчаемъ, что знакъ λ зависитъ только отъ числителя, именно: при $ab' - a'b > 0$ будетъ $\lambda < 0$, а при $ab' - a'b < 0$ будетъ $\lambda > 0$; дробь можно представить въ видѣ

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\lambda}{x + \frac{b'}{a'}}.$$

Соображая все сказанное, прямо находимъ слѣдующіе выводы относительно измѣненій дробі при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

I. $ab' - ba' > 0$.

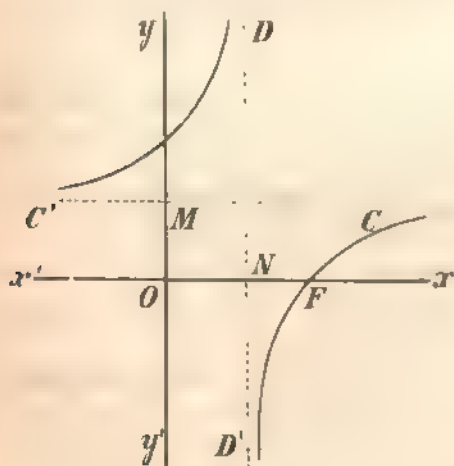
$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\lambda}{x + \frac{b'}{a'}}, \quad \text{гдѣ } \lambda < 0.$$

$$\begin{array}{l} x \left| -\infty < \dots < -\frac{b'}{a'} - \varepsilon \right| \quad \left| \frac{b'}{a'} + \varepsilon < \dots < \infty \right. \\ y \left| \frac{a}{a'} < \dots < +\infty \right. \quad \left| -\infty < \dots < \frac{a}{a'} \right. \end{array}$$

Т.-е. при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $-\frac{b'}{a'}$, функція идетъ постоянно увеличиваясь отъ $\frac{a}{a'}$ до $+\infty$; при $x = -\frac{b'}{a'}$ имѣетъ мѣсто разрывъ непрерывности: функція изъ $+\infty$ внезапно обращается въ $-\infty$; затѣмъ, при возрастаніи x отъ $-\frac{b'}{a'}$ до $+\infty$, идетъ постоянно увеличиваясь отъ $-\infty$ до $\frac{a}{a'}$.

Въ одномъ изъ интервалловъ она проходитъ чрезъ 0, при $x = -\frac{b}{a}$.

Измѣненія функціи изобразятся, такимъ образомъ, измѣненіями ординатъ слѣдующей кривой (гипербола).



На чертежѣ (72):

$$OM = \frac{a}{a'}.$$

$$ON = -\frac{b'}{a'}.$$

$$OF = -\frac{b}{a}.$$

Черт. 72.

CC' и DD'—двѣ ассимитоты кривой.

Это условіе, будучи необходимымъ, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно; ибо изъ него: $b' = \frac{a'b}{a}$, и слѣд. дробь обращается въ

$$\frac{ax+b}{a'(x+\frac{b}{a})}, \text{ или въ } \frac{a(x+\frac{b}{a})}{a'(x+\frac{b}{a})}, \text{ а это } = \frac{a}{a'}.$$

Итакъ, условіе необходимое и достаточное для того, чтобы наша дробь имѣла постоянную величину, есть $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, или $ab' - a'b = 0$, что и было найдено при изслѣдованіи.

2-й способъ. Пусть k будетъ эта постоянная, пока неизвѣстная, величина. Нахожденіе условія, необи. и дост. для того, чтобы $\frac{ax+b}{a'x+b'} = k$, сводится къ нахожденію условія, при которомъ было бы $ax+b = k(a'x+b')$, или $(a-a'k)x + (b-b'k) = 0$ при всякомъ x ; а для этого необходимо и достаточно (§ 70), чтобы было: $a-a'k=0$ и $b-b'k=0$, или $k = \frac{a}{a'}$, и $k = \frac{b}{b'}$, откуда $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, или $ab' - a'b = 0$.

592. Приложенія.— I. Изслѣдовать измѣненія x задачи § 367, полагая, что шарикъ, помещенный въ бильярдъ, можетъ свободно проникать внутрь круга и свободно возвращаться въ исходную точку?

Для x мы имѣемъ формулу

$$x = \frac{R(R-a)}{2a}.$$

R — величина постоянная, слѣд. x измѣняется въ томъ же смыслѣ какъ дробь $\frac{R-a}{2a}$. Эта дробь даетъ: $ab' - ba' = -2R$, а потому заключаемъ, что увеличенію a соответствуетъ уменьшеніе x -а. Формула даетъ: если $x = R$, то $a = \frac{R}{3}$; если же $a = \infty$, $x = -\frac{R}{2}$. Отсюда заключаемъ, что когда a возрастаетъ отъ своего minimum'a до $+\infty$, x уменьшается отъ своего maximum'a R до minimum'a $= -\frac{R}{2}$; такимъ образомъ сразу находимъ таблицу критическихъ величинъ x :

$$\begin{array}{c|ccccccc} a & R & \dots & \frac{R}{2} & \dots & R & \dots & +\infty \\ r & R & \dots & \frac{R}{2} & \dots & 0 & \dots & -\frac{R}{2} \end{array}$$

II. Пересѣчь данный шаръ плоскостью такъ, чтобы объемъ одного изъ сегментовъ составлялъ данную дробь K объема цилиндра одной высоты и одного основанія съ сегментомъ. Между какими предѣлами можно завести число K ?

Обозначивъ высоту сегмента буквою x , найдемъ:

$$K = \frac{x - 3R}{3x - 6R}.$$

Будемъ измѣнять x отъ 0 до $2R$. Такъ какъ $ab - a^2b = +3$, то функція K идетъ возрастаю; при $x = 0$, $K = \frac{1}{2}$; при $x = 2R$, $K = \infty$. Отсюда таблица:

x	0	...	R	...	$2R$
K	$\frac{1}{2}$...	$\frac{2}{3}$...	∞

Слѣд. для K можно брать всѣ числа отъ $\frac{1}{2}$ до $+\infty$. Каждый разъ задача имѣетъ 1 рѣшеніе. Отношеніе шара къ описанному цилиндру равно $\frac{2}{3}$: результатъ, являющійся деталію изслѣдованія.

Примѣчаніе. Изъ числа дробныхъ функцій элементарному изслѣдованію подлежатъ еще квадратная дробь $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$; но изученіе ея рациональнѣе отнести къ спеціальной статьѣ о максимѣ и минимѣ.

V. Примѣры изслѣдованія ирраціональныхъ функцій.

593. *Примѣръ 1. Изслѣдовать функцію $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.*

Триномъ $x^2 + 2x - 3$ имѣетъ действительные корни: -3 и $+1$; слѣд. онъ положителенъ при всѣхъ x , меньшихъ -3 , а также большихъ $+1$, и отрицателенъ при всѣхъ значеніяхъ x , заключающихся между -3 и $+1$. Итакъ, функція y действительна при всѣхъ значеніяхъ x , лежащихъ внѣ корней тринома, и мнимѣ для всякаго x , заключающагося между корнями.

Докажемъ, что она непрерывна для всѣхъ x , заключающихся между $-\infty$ и -3 , и между $+1$ и $+\infty$. Пусть x' и $x' + h$ будутъ два значенія x , лежащихъ внѣ интервала отъ -3 до $+1$. Имѣемъ:

$$y' = \sqrt{x'^2 + 2x' - 3} \text{ и } y' + K = \sqrt{(x' + h)^2 + 2(x' + h) - 3};$$

отсюда

$$K = \sqrt{(x' + h)^2 + 2(x' + h) - 3} - \sqrt{x'^2 + 2x' - 3};$$

или, множа и дѣля вторую часть на сумму радикаловъ

$$K = \frac{h^2 + 2h(x' + 1)}{\sqrt{(x' + h)^2 + 2(x' + h) - 3} + \sqrt{x'^2 + 2x' - 3}};$$

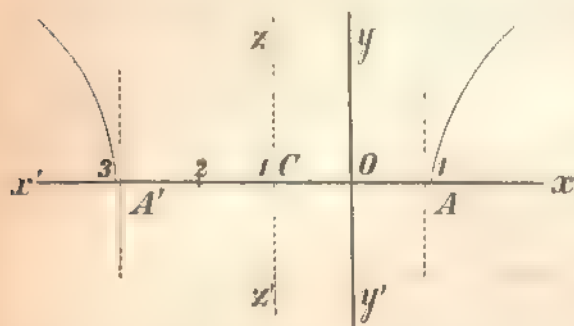
по мѣрѣ приближенія h къ нулю, числитель стремится къ нулю; знаменатель же, будучи действительнымъ при x' и $x' + h$, отличенъ отъ нуля, ибо эти значенія x отличны отъ -3 и $+1$. Слѣд. частное K стремится къ нулю вмѣстѣ съ h , а слѣд. функція y непрерывна въ указанныхъ интервалахъ ея действительности.

Сперва исследуемъ измѣненія подрадикальнаго тринома, а отсюда и самой функціи; получаемъ таблицу:

x	$-\infty \dots < \dots - 3 \dots < \dots - 1 \dots < \dots + 1 \dots < \dots + \infty$
$x^2 + 2x - 3$	$\sim \dots > \dots 0 \dots > \dots - 4 \dots < \dots 0 \dots < \dots + \infty$
$\sqrt{x^2 + 2x - 3}$	$\sim \dots > \dots 0 \dots \text{---} 0 \dots < \dots + \infty$

y — минимй.

Не трудно изобразить измѣненія функціи графически. Для этого замѣтимъ, что триномъ имѣетъ равныя значенія, когда x получаетъ величины, равноотстоящія отъ -1 ; сл. и y имѣетъ это свойство, и потому кривая имѣетъ ось симметріи прямую ZZ' , параллельную оси y и отстоящую отъ этой оси на $OC = -1$.



Черт. 75.

Затѣмъ, кривая не имѣетъ точекъ между параллелями къ оси yy' , находящимися отъ этой оси въ разстояніяхъ: $OA = 1$, $OA = 3$, ибо въ этихъ предѣлахъ y имѣетъ минимья значенія; наконецъ, кривая не имѣетъ точекъ, лежащихъ внизу отъ оси x , ибо y есть положительная величина $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$, по заданію.

Примѣръ II. Исследовать функцію $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$, когда x измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Корни тринома $-x^2 - 2x + 3$ суть -3 и $+1$; изъ закона измѣненій тринома заключаемъ, что онъ имѣетъ положительныя величины только при x , содержащихся между -3 и $+1$; для всѣхъ значеній x , лежащихъ внѣ этихъ предѣловъ, триномъ отрицателенъ; слѣд. функція y дѣйствительна, когда x измѣняется внутри корней, и мнима при всѣхъ x , лежащихъ внѣ корней. Какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ докажемъ, что она непрерывна для интервала отъ -3 до $+1$. Отсюда такая таблица измѣненій:

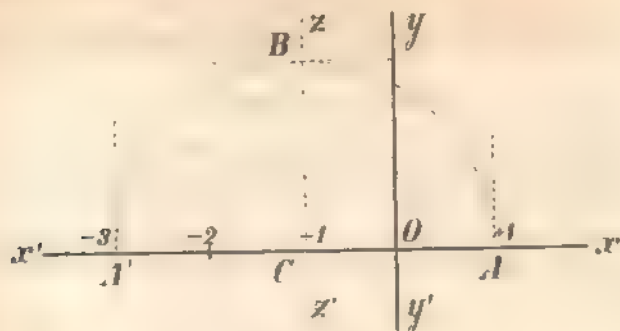
x	$-\infty \dots < \dots - 3 \dots < \dots - 1 \dots < \dots + 1 \dots < \dots + \infty$
$-x^2 - 2x + 3$	$-\infty \dots < \dots 0 \dots < \dots + 4 \dots > \dots 0 \dots, > \dots - \infty$
$\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$	$\text{---} 0 \dots < \dots + 2 \dots > \dots 0 \text{---}$

y — минимй. y — минимй.

Итакъ, функція возрастаетъ отъ 0 (при $x = -3$) до $+2$ (при $x = -1$), затѣмъ уменьшается до 0 (при $x = +1$). Слѣд. она имѣетъ максимумъ $= +2$ при $x = -1$.

Кривая имѣетъ ось симметріи, параллельную yy' и проходящую черезъ точку C , причѣмъ $OC = -1$; на этой оси помѣщается максимумъ $= +2$. Кривая не имѣетъ точекъ внѣ параллелей оси yy' , проведенныхъ черезъ точки A и A' , такія, что

$OA = 1$ и $OA' = 3$; она не имѣетъ точекъ внизу отъ оси xx' . Кривая эта — полуокружность центра C .



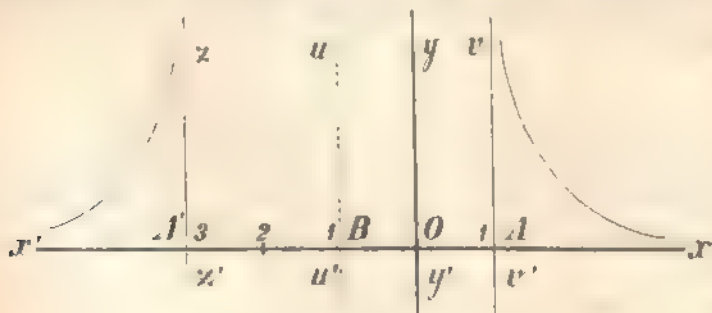
Черт. 76.

Примѣръ III. Изслѣдовать функцию $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Функция непрерывна въ интервалахъ: отъ $-\infty$ до -3 и отъ $+1$ до $+\infty$; и претерпѣваетъ разрывъ непрерывности отъ -3 до $+1$. Измѣненія ея обратны измѣненіямъ функции $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$; отсюда таблица:

x	$-\infty$	\dots	-3	\dots	-1	\dots	1	\dots	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	$-\infty$	\dots	0	\dots	-4	\dots	0	\dots	$+\infty$
$\sqrt{x^2 + 2x - 3}$	$-\infty$	\dots	0	\dots	$-\infty$	\dots	0	\dots	$+\infty$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$	0	\dots	$+\infty$	\dots	0	\dots	$+\infty$	\dots	0

Кривая функций имѣетъ ось симметріи uu' , параллельную оси yy' и опредѣляемую линіей $OB = -1$. Затѣмъ, она не имѣетъ точекъ между vv' и zz' , параллельными оси yy' и отстоящими отъ этой оси на $OA = 1$ и $OA' = -3$.



Черт. 77.

Вмѣстѣ съ этимъ, тѣ же прямая и ось xx' суть три асимптоты кривой, которая, къ тому же, не имѣетъ точекъ внизу отъ оси x -овъ.

ГЛАВА ХLI.

Образцы изслѣдованія вопросовъ второй степени.

Задача I.

594. Раздѣлить данную прямую АВ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, т.-е. найти на ней такую точку С, чтобы большій отръзокъ АС былъ среднимъ пропорциональнымъ между всюю линіею АВ и меньшимъ ей отръзкомъ ВС.

По условію задачи должно быть: $AC^2 = AB \times CB$, или, назвавъ данную прямую АВ буквою a , разстояніе АС буквою x , и слѣд. обозначивъ ВС разностью $a - x$, получимъ уравненіе

$$x^2 = a(a - x) \dots (1) \quad \text{или} \quad x^2 + ax - a^2 = 0 \dots (2).$$

Изслѣдованіе. Чтобы корень уравненія (2) представлялъ рѣшеніе задачи въ прямомъ смыслѣ, необходимо, чтобы онъ былъ дѣйствителенъ, положителенъ и былъ $< a$.

Уравненіе (2) имѣетъ всегда корни дѣйствительные, потому что послѣдній членъ ($-a^2$) отрицателенъ; далѣе, корни имѣютъ противоположные знаки, такъ какъ произведеніе ихъ отрицательно ($-a^2$); притомъ, меньшій по абсолютной величинѣ корень положителенъ, ибо сумма корней отрицательна ($= -a$). Остается убѣдиться, будетъ ли положительный корень меньше a ; для этого подставляемъ въ тринომъ, образующій первую часть уравненія (2), вмѣсто x снѣрва 0, потомъ a , и замѣчаемъ, что результаты этихъ подстановокъ ($-a^2$ и $+a^2$) имѣютъ противоположные знаки. Слѣд. положительный корень меньше a ; онъ даетъ точку С, лежащую между А и В и представляющую рѣшеніе задачи въ прямомъ смыслѣ.

Другой корень уравненія отрицателенъ; чтобы найти его значеніе, подставляемъ въ уравненіе (1), первоначальное, $-x$ вмѣсто x ; получимъ уравненіе

$$x^2 = a(a + x) \dots (3),$$

имѣющее корни равные по величинѣ, но противоположные по знаку корнямъ уравненія (1). Такимъ образомъ, отрицательный корень уравненія (1), взятый съ противоположнымъ знакомъ, представляетъ прямое рѣшеніе задачи, отвѣчающей уравненію (3). Последнее, какъ непосредственно видно, опредѣляетъ точку С', лежащую на продолженіи линіи ВА вправо отъ А, и также удовлетворяющую вопросу въ самомъ дѣлѣ, положивъ $AC' = x$, имѣемъ $BC' = a + x$, и уравненіе (3) тождественно съ

$$\frac{a^2}{AC'^2} = \frac{AB}{BC'}.$$

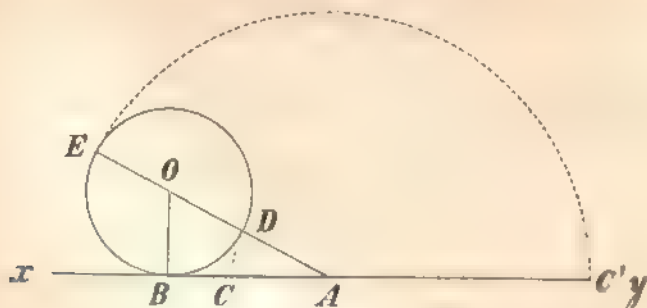
Итакъ, отрицательный корень даетъ другое рѣшеніе задачи, а знакъ этого корня показываетъ, что послѣдній долженъ быть нанесенъ на продолженіи линіи АВ, въ сторону отъ А, противоположную первую корню. Алгебраическое рѣшеніе, кромѣ отвѣта на вопросъ въ тѣсномъ смыслѣ заданія, показало намъ, что вопросу, взятому въ болѣе широкое смѣслъ, удовлетворяютъ двѣ точки: С и С', причѣмъ знаки корней указываютъ расположеніе этихъ точекъ относительно А.

Рѣшая уравненіе (1), находимъ:

$$x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a}{2}(1.5 + 1);$$

$$x'' = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = -\frac{a}{2}(1.5 + 1).$$

Построение корней. Взявъ неограниченную прямую xy и на ней отрезок $AB = a$, возстаемъ къ этой прямой перпендикуляръ въ точкѣ B , откладываемъ на немъ часть $BO = \frac{a}{2}$; изъ точки O , какъ изъ центра, радиусомъ BO



Черт. 78.

описываемъ окружность, и соединивъ A съ центромъ, продолжаемъ прямую AO до пересѣкающагося съ окружностью въ точкѣ E ; другую точку пересѣчения назовемъ буквою D . Прямая AD и AE представляютъ абсолютныя величины корней x' и x'' . Въ самомъ дѣлѣ изъ прямоуг. треуго. AOB имѣемъ:

$$AO = \sqrt{BO^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2};$$

или,

$$AD = AO - OB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} = x',$$

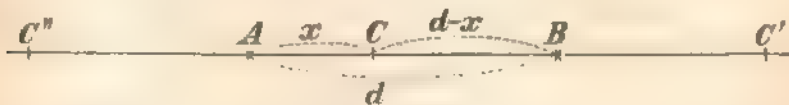
$$AE = AO + OB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} + \frac{a}{2} = x''.$$

Остается нанести AD на AB влѣво отъ точки A , линию же AE на продолжение AB вправо отъ A ; для этого нужно заставить прямую xy двумя дугами круговъ, описанныхъ изъ точки A , какъ изъ центра, радиусами AD и AE . Такимъ образомъ получимъ требуемыя точки C и C' .

Задача II.

595. На неограниченной прямой, соединяющей два источника свѣта A и B , найти точку, равноосвѣщенную обоими.

Задача эта впервые появилась въ алгебрѣ Клеро (1746 г.), и съ тѣхъ поръ вошла въ учебники, какъ одинъ изъ поучительныхъ образцовъ изслѣдованій вопросовъ.



Черт. 79.

Обозначимъ разстояніе AB буквою d , разстояніе искомой точки C отъ A буквою x ; тогда BC будетъ равно $d-x$. Далѣе, пусть сила освѣщенія источникомъ A тѣла, находящагося отъ него на единичномъ разстояніи, будетъ α , а сила освѣщенія источникомъ B на единичномъ разстояніи пусть будетъ β . Изъ физики

известно, что сила освещения обратно пропорциональна квадрату расстояния освещаемого тела от источника. След., если сила освещения источником А на расстоянии 1 есть α , то на расстоянии 2, 3, 4 . . . единиц она будет $\frac{\alpha}{2^2}$, $\frac{\alpha}{3^2}$, $\frac{\alpha}{4^2}$, . . . , а потому на расстоянии x она будет $\frac{\alpha}{x^2}$. Таким же образом, сила освещения точки С источником В будет $\frac{\beta}{(d-x)^2}$. По условию задачи, точка С освещена обоими источниками одинаково, следовательно,

$$\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{(d-x)^2} \dots (1)$$

или

$$(x-\beta)^2 = 2x \cdot d \dots (2)$$

Исследование Чтобы задача была возможна, нужно чтобы корни были действительны, т.е. реализантъ не был бы отрицателенъ. Но реализантъ

$$\alpha^2 d^2 - (\alpha - \beta)^2 d^2 = \alpha^2 d^2 - \alpha^2 d^2 + \alpha \beta d^2 = \alpha \beta d^2,$$

а это есть количество положительное, такъ какъ, по натурѣ задачи, α и β суть количества существенно-положительныя. Итакъ, корни уравненія всегда действительны.

Для опредѣленія ихъ знаковъ обращаемся къ произведенію и суммѣ корней; имѣемъ

$$x' \cdot x'' = \frac{\alpha d^2}{2 - \beta}, \quad x' + x'' = \frac{2\alpha d}{2 - \beta},$$

гдѣ и d — количество положительное, въ частности, могущее обратиться и въ нуль. Отсюда возможные случаи таковы:

- 1) $d > 0, \alpha > \beta$; 2) $d > 0, \alpha < \beta$; 3) $d > 0, \alpha = \beta$; 4) $d = 0, \alpha < \beta$;
■ 5) $d = 0, \alpha = \beta$.

1-й случай: $d > 0, \alpha > \beta$.

Произведение корней положительно; следовательно, знаки ихъ одинаковы, сумма корней также положительна, следовательно, оба корня положительны. Это значить, что въ данномъ случаѣ существуютъ двѣ точки, лежащія *справа* отъ А, одинаково освещаемыя обоими источниками. Посмотримъ, какъ эти точки расположены относительно источника В.

Для этого надо сравнить корни съ линіей d . Подставляя въ ур-ніе (2) вмѣсто x букву d , найдемъ:

$$f(d) = (\alpha - \beta)^2 d^2 - 2\alpha d^2 + \alpha d^2 = -\beta d^2.$$

Результатъ подстановки отрицателенъ, т.е. имѣетъ знакъ, противоположный знаку коэффициента при x^2 ; заключаемъ, что d содержится между корнями, следовательно, одинъ изъ нихъ меньше d , другой больше d . Итакъ, существуютъ *два* равноосвещаемыя точки: одна, С, находится между А и В, другая, С', вправо отъ В.

Остается узнать, къ которому изъ данныхъ источниковъ первая точка, С, ближе: къ источнику А, или къ источнику В? Подстановка въ первую часть ур-нія (2) количества $\frac{d}{2}$ вмѣсто x , даетъ результатъ

$$f\left(\frac{d}{2}\right) = (2 - \beta)^2 \frac{d^2}{4} -$$

положительный, т.-е. одного знака съ коэффициентомъ при x^2 . Это значитъ, что $\frac{d}{2}$ находится вѣ корней, и, очевидно, меньше меньшаго корня. Заключаемъ, что точка С находится ближе къ слабѣйшему источнику В, чего и слѣдовало ожидать. Что касается второй равноосвѣщаемой точки, С', то, находясь вправо отъ В, она также лежитъ ближе къ слабѣйшему источнику, какъ и должно быть.

2-й случай: $d > 0$, $a < \beta$.

Произведение корней, имѣя въ этомъ случаѣ положительный числитель и отрицательный знаменатель, отрицательно; слѣдовательно, одинъ корень положительный, другой отрицательный. Сумма корней отрицательна, слѣдовательно абсолютное значеніе отрицательнаго корня больше.

Положительный корень даетъ точку, лежащую вправо отъ А. Для опредѣленія ея положенія относительно В, замѣчаемъ, что $f(d) = \beta d^2$, т. е. имѣетъ знакъ коэффициента при x^2 , слѣдовательно, d находится вѣ корней, т.-е. положительный корень меньше d . Онъ даетъ точку, находящуюся между А и В. Къ какому источнику она ближе? Такъ какъ

$$f\left(\frac{d}{2}\right) = (a - \beta) \frac{d^2}{4},$$

имѣетъ знакъ 1-го коэффициента, то $\frac{d}{2}$ находится вѣ корней, т.-е. положительный корень $< \frac{d}{2}$. Это значитъ, что искомая точка С ближе къ источнику А, какъ и должно быть, ибо въ данномъ случаѣ этотъ источникъ слабѣ В.

Что касается отрицательнаго корня, то для истолкованія его обратимся къ ур—нію (1); подставивъ въ него x вмѣсто x , найдемъ ур—ніе

$$\frac{d}{x^2} = \frac{\beta}{(d+x)^2},$$

которое и получили бы, если бы искали равноосвѣщенную точку влѣво отъ А. Итакъ, отрицательный корень опредѣляетъ точку С', лежащую *влево* отъ А. Действительно, такая точка, находясь ближе къ слабѣйшему источнику А, при надлежащемъ разстояніи отъ него, можетъ быть одинаково освѣщена обоими.

3-й случай: $d > 0$, $a = \beta$.

Въ этомъ случаѣ коэффициентъ при x^2 обращается въ нуль, и слѣдовательно, одинъ корень уравненія обращается въ *бесконечность*, а другой надемъ, отбросивъ членъ съ x^2 , т.-е. взявъ ур—ніе

$$-2adx + ad^2 = 0, \text{ или } -2x + d = 0,$$

откуда

$$x = \frac{d}{2}.$$

Корень $x' = \frac{d}{2}$ означать, что одна изъ искомымъ точекъ находится какъ разъ въ срединѣ линіи АВ, что и должно быть при равенствѣ освѣщенія обоими источниками.

Для истолкованія бесконечнаго корня можно замѣтить, что при равенствѣ яркости источниковъ всякая точка, взятая на продолженіи линіи АВ въ конечномъ разстояніи отъ источниковъ, будетъ освѣщаться ими неодинаково, но что чѣмъ дальше отодвигать эту точку, тѣмъ разницъ въ освѣщеніи будетъ становиться все меньше и меньше, но можетъ исчезнуть лишь при удаленіи точки въ бесконечность. Можно обратиться также къ формулѣ корней. Написавъ ур—ніе въ видѣ

$$\left(\frac{d-x}{x}\right)^2 = \frac{\beta}{a}, \text{ имѣемъ } \frac{d-x}{x} = \pm \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{a}},$$

откуда найдемъ

$$x_1 = \frac{d + a}{\sqrt{a} + \sqrt{\beta}}, \quad x_2 = \frac{d + a}{\sqrt{a} - \sqrt{\beta}}.$$

Первый корень при $a = \beta$ дастъ первую изъ искомымъ точекъ $x_1 = \frac{d}{2}$.

Если въ формулѣ x_2 взять сначала $a > \beta$, то x_2 дастъ точку C' вправо отъ A ; по мѣрѣ приближенія a къ β , и слѣдовательно, знаменателя — къ нулю, x_2 будетъ болѣе и болѣе возрастать, и точка C' удалится вправо; наконецъ, когда a слѣдается равнымъ β , точка C' удалится на бесконечно большое разстояніе вправо отъ A . Если бы a было въ началѣ меньше β , то корень x_2 далъ бы точку C'' , лежащую влѣво отъ A ; по мѣрѣ приближенія a къ β , она удалялась бы въ бесконечность влѣво отъ A .

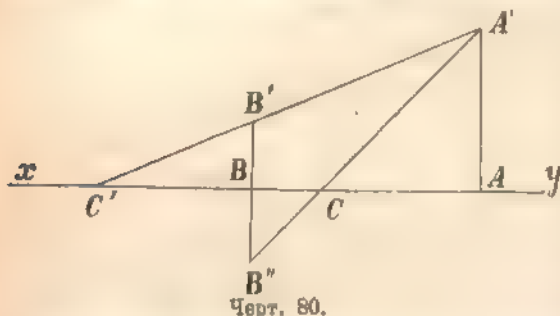
4-й случай: $d=0$, $a > \beta$.

Ур—ніе обращается въ $(a - \beta)x^2 = 0$, откуда $x' = x'' = 0$. Это значить, что только одна точка будетъ равно освѣщена: та точка, въ которой находятся оба источника свѣта.

5-й случай: $d=0$, $a = \beta$.

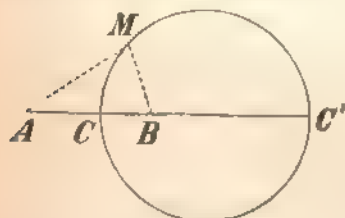
Уравненіе принимаетъ видъ $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$; ему удовлетворяетъ всякое значение x , такъ что число рѣшеній неограниченно, и задача неопредѣлена. И въ самомъ дѣлѣ, когда оба источника находятся въ одномъ мѣстѣ и равносильны, то всякая точка соединяющей ихъ прямой будетъ освѣщаться ими одинаково. Въ числѣ ихъ находится и сама точка, гдѣ помѣщены оба источника, и которую опредѣляетъ первый корень x' , равный въ этомъ случаѣ нулю.

Примѣчаніе I. Нетрудно построить оба равноосвѣщенные точки. Возставивъ въ точкѣ A (черт. 80) перпендикуляръ, равный \sqrt{a} , а въ точкѣ B два перпендикуляра, одинъ вверхъ, другой книзу отъ линіи xy , равные $\sqrt{\beta}$, проводимъ прямыя $A'B'$ и $A'B''$, изъ коихъ первая пересѣчетъ линію xy въ точкѣ C' , вторая въ C . Это и будутъ искомыя точки; въ самомъ дѣлѣ:



Черт. 80.

перпендикуляръ, равный \sqrt{a} , а въ точкѣ B два перпендикуляра, одинъ вверхъ, другой книзу отъ линіи xy , равные $\sqrt{\beta}$, проводимъ прямыя $A'B'$ и $A'B''$, изъ коихъ первая пересѣчетъ линію xy въ точкѣ C' , вторая въ C . Это и будутъ искомыя точки; въ самомъ дѣлѣ:



Черт. 81.

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{BB''}{BC}, \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{a}}{x-d} = \frac{\sqrt{\beta}}{x};$$

$$\frac{AA'}{AC'} = \frac{BB'}{BC'}, \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{a}}{x} = \frac{\sqrt{\beta}}{x-d} = \frac{\sqrt{\beta}}{d-x}.$$

Результаты алгебраическаго изслѣдованія представляемъ читателю вывести изъ этого чертежа.

Примѣчаніе II. Если бы требовалось найти геометрическое мѣсто точекъ плоскости, равноосвѣщенныхъ источниками A и B , то, положивъ, что M (черт. 81) есть одна изъ точекъ искомаго мѣста, мы нашли бы, что

$$\frac{a}{AM^2} = \frac{\beta}{BM^2}, \quad \text{или} \quad \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}.$$

Закключаемъ, что искомое мѣсто есть мѣсто такихъ точекъ, отношеніе разстояній которыхъ отъ А и В имѣетъ данную величину. Изъ геометрии извѣстно, что это есть окружность, описанная на прямой СС' (точки С и С' опредѣляются построеніемъ, указаннымъ въ примѣчаніи I, какъ на диаметръ).

Примѣчаніе III. Если бы требовалось опредѣлить мѣсто точекъ въ пространствѣ, равноотстоящихъ точками А и В, то достаточно было бы обернуть окружность МСС' около диаметра СС': точки полученной шаровой поверхности и были бы требующіяся.

Наконецъ, если бы требовалось найти точки равноотстоящихъ источниками А и В, на некоторой линіи или на поверхности, расположенныхъ вблизи точекъ А и В, то очевидно, что искомыя точки были бы общими точками данной линіи или поверхности съ вышеуказанною сферою. Въ случаѣ поверхности, этихъ точекъ было бы безконечное множество, но могла бы быть и одна только искомая точка, если бы сфера и поверхность были касательны; могло бы и не быть искомыхъ точекъ, если бы поверхность и сфера не имѣли общихъ точекъ.

Задача III.

596. Манометръ со сжатымъ воздухомъ состоитъ изъ дважды согнутой, строю цилиндрической трубки АВОD; вѣтвь EB содержитъ сухой воздухъ; согнутая часть В — ртуть, а вѣтвь OD находится въ сообщеніи съ паровымъ котломъ паровой машины. Когда уровень ртути стоитъ на одной горизонтальной плоскости АО, давление воздуха въ манометрѣ равно давленію атмосферы; когда давленіе въ котлѣ увеличивается, ртуть поднимается въ вѣтви BE и на столько же опускается въ ВО. Зналъ, что $AE=1$, что давленіе атмосферы H , вычислить высоту x уровня А' надъ А, если давленіе въ котлѣ равно n атмосферамъ.

Рѣшеніе. Ртуть въ трубкѣ BE перестанетъ подниматься и остановится въ А', когда упругость воздуха, сжатого въ этой вѣтви, увеличенная колонною А'А" ртути, уравновѣситъ давленіе въ котлѣ. Высота $A'A''=2AA'=2x$.

Новое давленіе y воздуха, сжатого въ А'Е, опредѣляется по закону Мариотта, именно: если температура не измѣняется, то давленіе, производимыя одною и тою же массою газа, обратно пропорциональны объемамъ, ею занимаемымъ. Въ данномъ случаѣ, объемы, послѣдовательно занимаемые воздухомъ въ манометрѣ, суть цилиндры, имѣющіе одинаковое основаніе, а высоты l и $l-x$; слѣд., назвавъ сѣченіе трубки буквою ω , имѣемъ:

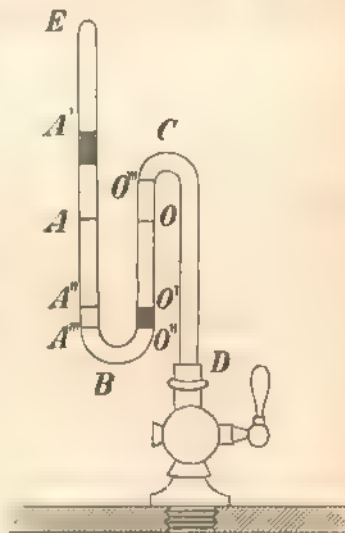
$$\omega l \cdot \frac{\omega l}{\omega (l-x)} = \frac{y}{H}, \text{ откуда } y = H \times \frac{l}{l-x}.$$

Такъ какъ давленіе въ котлѣ равно nH , то ур. задачи будетъ:

$$nH - 2x + H \times \frac{l}{l-x},$$

или, по освобожденіи отъ знаменателя:

$$2x^2 - (2l + nH)x + l(n-1)H = 0 \dots (1).$$



Черт. 62.

Решивъ его, найдемъ:

$$x = \frac{2l + nH \pm \sqrt{(2l + nH)^2 - 8l(n-1)H}}{4},$$

или

$$x = \frac{2l + nH \pm \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}}{4}.$$

Исследование. Чтобы тотъ или другой корень удовлетворялъ задачѣ, онъ долженъ быть действительнымъ, положительнымъ и $< l$. Такъ какъ подъ знакомъ радикала находится существенно-положительное количество, то оба корня всегда действительны. Если $n = 1$, то произведение корней будетъ положительно, а какъ и сумма ихъ положительна, то оба корня будутъ положительны. Но какъ величье должно быть еще $< l$, то нужно убѣдиться, имѣетъ ли уравненіе корень, меньшій l . Подставляя l вмѣсто x въ первую часть уравненія (1), имеемъ

$$2l^2 - 2l^2 - nHl + lH = H \quad \text{или} \quad -nH,$$

т. е. результатъ отрицательный; это значитъ, что l заключенъ между корнями уравненія (1), и слѣдовательно меньшій корень $< l$, а большій $> l$. Значитъ отвѣчаетъ меньшій корень, слѣдовательно

$$x' = \frac{2l + nH - \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}}{4} \dots (2)$$

и есть искомый отвѣтъ.

Примѣчаніе I. Если n неограниченно увеличивать, то при $n = \infty$ корень x' принимаетъ неопредѣленный видъ $\infty - \infty$; чтобы найти истинное значеніе этой неопредѣленности, нужно числ. и знам. умножить на $2l + nH + \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}$; найдемъ

$$x' = \frac{2l(n-1)H}{2l + nH + \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}}.$$

При $n = \infty$ это выраженіе принимаетъ неопредѣленную форму вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытія которой дѣлимъ числ. и знам. на n ; такимъ образомъ получимъ

$$x' = \frac{2l(1 - \frac{1}{n})H}{\frac{2l}{n} + H + \sqrt{H - \frac{2l^2}{n} + \frac{8lH}{n^2}}},$$

а положивъ здѣсь $n = \infty$, найдемъ

$$x' = \frac{2H}{H + H} = \frac{2H}{2H} = l.$$

Это значитъ, что по мѣрѣ того какъ давленіе увеличивается, уровень A' ртутной колонны болѣе и болѣе приближается къ вершинѣ E трубки BE .

Примѣчаніе II. Если давленіе въ котлѣ сдѣлается меньше атмосферы, уровень ртути опустился до A'' ниже точки A въ колѣнѣ EB , и поднимается до O'' въ BO , причѣмъ $AA'' = OO''$. Равновѣсіе наступитъ тогда, когда давленіе y воздуха въ манометрѣ будетъ равно давленію пары + колонна ртути $O''O''$, равная $2AA''$. Если новое неизвѣстное AA'' назовемъ буквою x , y опредѣлится изъ пропорціи

$$\frac{l}{l+x} = \frac{y}{H}, \quad \text{откуда} \quad y = H \cdot \frac{l}{l+x};$$

новое ур—ние задачи будетъ

$$nH = H \cdot \frac{l}{l + \varepsilon} = 2\varepsilon,$$

или

$$2\varepsilon^2 + (2l + nH)\varepsilon + l(n-1)H = 0 \dots (3);$$

оно отличается отъ (1) только переменною x на $-\varepsilon$; слѣдов. корни (3) равны по величинѣ и противоположны по знаку корнямъ (1). Такъ какъ здѣсь $n < 1$, то произведение корней отрицательно, слѣд. одинъ корень ур—нія (3) положительнъ, другой отрицателенъ; новому вопросу отвѣчаетъ положительный корень

$$\varepsilon' = \frac{-(2l + nH) + \sqrt{(2l + nH)^2 + 8nH}}{4}.$$

Сличая x' съ x' , видимъ, что рѣшеніе x' (2) применимо къ обоимъ случаямъ: $n > 1$ и $n < 1$; достаточно только откладывать отрицательныя значенія, которая можетъ получать выраженіе (2), внизъ отъ точки А.

Задача IV.

597. Тяжелое тѣло брошено въ пустотѣ вертикально вверхъ съ начальною скоростью V_0 ; опредѣлить, въ какое время оно достигнетъ высоты h надъ начальною точкою?

Въ равномерно-замедлительномъ движеніи, какое имѣетъ тяжелое тѣло, поднимающееся вверхъ, пройденное пространство l связано съ временемъ t , употребленнымъ на его прохожденіе, формулою

$$l = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \dots (1).$$

Слѣдовательно, если искомое время назовемъ буквою x , то это неизвѣстное должно удовлетворять ур—нію

$$h = V_0 x - \frac{1}{2} g x^2,$$

или

$$g x^2 - 2V_0 x + 2h = 0 \dots (2)$$

Исследованіе. Чтобы x , выведенное изъ этого ур—нія, давало отвѣтъ на вопросъ, нужно, чтобы рѣшеніе было действительно и положительно. Условіе действительности корней ур—нія (2) таково;

$$V_0^2 - 2gh \geq 0, \text{ или } h \leq \frac{V_0^2}{2g}.$$

Итакъ, различаемъ три случая:

Первый случай: $h > \frac{V_0^2}{2g}$.

Корни ур—нія (2) мнимы, слѣд. задача невозможна. Это очевидно a priori. Въ самомъ дѣлѣ, тѣло остановится, когда его уменьшающаяся скорость обратится въ нуль. Но скорость въ концѣ времени t опредѣляется формулою: $V = V_0 - gt$; слѣд. она обратится въ нуль, когда время $t = \frac{V_0}{g}$, пройденное до этого момента пространство будетъ $l = V_0 \cdot \frac{V_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0}{g} \right)^2 = \frac{V_0^2}{2g}$. Это есть maximum высоты, до которой можетъ подняться тѣло при начальной скорости V_0 .

Второй случай: $h = \frac{V_0^2}{2g}$.

Корни уравнения (2) в этом случае — действительные равные, а общая величина их есть $\frac{V_0}{g}$, что согласно с вышеуказанным результатом.

Третий случай: $h < \frac{V_0^2}{2g}$.

В этом случае уравнение (2) имеет корни действительные, неравные и оба положительные (последнее потому что их произведение $\frac{2h}{g}$ и сумма $\frac{2V_0}{g}$ положительны).

Чтобы дать себе отчет в прохождении этих *дважды* положительных корней, заметим, что тело при движении бывает дважды в точке М, оставаясь по вертикали на h от А: один раз летя вверх, другой раз, падая вниз. Оба положительных корня и дадут эти времена. В самом деле, эти корни суть

$$x' = \frac{V_0}{g} - \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}; \quad x = \frac{V_0}{g} + \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Припомним, что сколько времени тело употребляет на поднятие от М до В, столько же и на падение от В до М. Пусть это время — ω ; следовательно, время падения, имеем $BM = \frac{1}{2}gt^{+2}$ или

$$\frac{V_0^2}{2g} - h = \frac{1}{2}g\omega^2, \text{ откуда}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Затем, так, что $\frac{V_0}{g}$ есть время кульминации, найдем, что меньший корень x' , представляет разность между временем кульминации и временем, необходимым для прохождения вверх расстояния BM, следовательно кульминации, в которое тело падает от точки А на высоту h ; больший корень x , представляет сумму времени, необходимого для поднятия на высоту h и время падения от В на высоту h . Следовательно падение вниз от М, следовательно кульминации, в которое тело находится от А на высоте h .

Черт. 83.

Задача V.

598. Опис машина, в которой наблюдатель, стоящий в отверстии колодца, падает из руки камень, во момент, в который услышит звук камня о воду, прошло t секунд. На какой глубине колодец, зная: 1) что звук распространяется равномерно со скоростью v , 2) что сила тяжести постоянна g , пройденная при свободном падении, и временем ω падения выражается формулой $l = \frac{1}{2}g\omega^2$, где g — ускорение тяжести.

Решение. Пусть искомая глубина колодца будет x , данное время t составляется из двух частей:

1) Из времени y , которое камень употребляет на прохождение свободным падением глубины x колодца, причем связь между x и y выражается формулой $x = \frac{1}{2}gy^2$, из которой

$$y = \sqrt{\frac{2x}{g}};$$

2) из времени x , въ которое звукъ проходитъ расстояние x равномернымъ движениемъ со скоростью v , причемъ по закону равномернаго движения $x = vt$, откуда

$$x = vt.$$

Приравнивая $x + y$ данному времени t , имѣемъ ур—ние

$$\frac{x}{v} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = t. \quad (1).$$

Это уравнение—иррациональное; для рѣшенія его, изолируемъ радикаль.

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v}. \quad (2)$$

и возвышаемъ обѣ части въ квадратъ, что дастъ послѣдовательно:

$$\frac{2x}{g} = t^2 - \frac{2x}{v} + \frac{x^2}{v^2}, \text{ или } gx^2 - 2v(v + gt)x + gv^2t^2 = 0. \quad (3).$$

Изслѣдовавъ, Ур—ние (3) не эквивалентно (2)-му, ибо оно есть то же, что ур—ние

$$\frac{2x}{g} = \left(t - \frac{x}{v}\right)^2,$$

но послѣднее есть результатъ возвышенія въ квадратъ какъ даннаго ур—нія

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v},$$

такъ и ур—нія

$$-\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v}$$

Чтобы корень ур—нія (3) удовлетворялъ данному ур—нию, нужно, чтобы онъ обращалъ разность $t - \frac{x}{v}$ въ количество положительное, т.-е. удовлетворялъ бы неравенству

$$t - \frac{x}{v} > 0, \text{ или } x < vt.$$

Итакъ, чтобы корень ур—нія (3) представлялъ отвѣтъ на данную задачу, нужно, чтобы онъ былъ действительнымъ, положительнымъ и менѣе vt .

Чтобы корни ур—нія (3) были действительны, необходимо и достаточно, чтобы было

$$v^2(v + gt)^2 - g^2v^2t^2 \geq 0, \text{ или } v^2(v^2 + 2gvt) \geq 0.$$

И каждое изъ чиселъ g , v и t положительное, слѣд. условие действительности всегда удовлетворено.

Затѣмъ, оба корня положительны, потому что произведение ихъ v^2t^2 и сумма $2v(v + gt)$ — положительны. Остается убѣдиться, будетъ ли хотя одинъ изъ корней

$< vt$. Для это въ триномѣ, составляющій первую часть ур—нія (3), подставимъ vt вмѣсто x ; получимъ: $gv^2t^2 - 2v(v + gt)vt = gv^2t^2 - 2v^2t^2 - 2gvt^2$, или $-2v^2t^2$, результатъ отрицательный, т.-е. противоположенъ знаку коэффициента g при x^2 въ триномѣ (3). Это значитъ, что vt содержится между корнями ур—нія (3), и слѣд. менѣе корень $< vt$, и только онъ одинъ даетъ отвѣтъ на задачу. Итакъ

$$x = \frac{v}{g}(v + gt - \sqrt{v^2 + 2gvt}). \quad (4).$$

Задача VI.

599. Построить прямоугольный треугольник, зная его периметр $2p$ и площадь m^2 .

Рѣшеніе. Обозначимъ искомыя катеты буквами x и y , а гипотенузу z ; найдемъ уравненія

$$x + y + z = 2p \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \dots (2)$$

$$xy = 2m^2 \dots (3).$$

Изъ (1) имѣемъ $x + y = 2p - z$; возвысивъ обѣ части этого уравненія въ квадратъ и замѣнивъ $x^2 + y^2$ равнымъ этой суммѣ количествомъ z^2 [изъ (2)], получаемъ, $z^2 + 2xy = (2p - z)^2$; или, замѣчая, что по (3): $2xy = 4m^2$, находимъ, раскрывъ $(2p - z)^2$:

$$z^2 + 4m^2 = 4p^2 - 4pz + z^2,$$

откуда

$$z = \frac{p^2 - m^2}{p} \dots (4).$$

Подставляя вмѣсто z это значеніе въ ур. (1), имѣемъ:

$$x + y = \frac{p^2 + m^2}{p} \dots (5)$$

Изъ ур—ній (3) и (5) видно, что x и y суть корни квадратнаго уравненія

$$pu^2 - (p^2 + m^2)u + 2pm^2 = 0 \dots (6)$$

откуда:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \left\{ \frac{p^2 + m^2 \pm \sqrt{(p^2 + m^2)^2 - 8p^2m^2}}{2p} \dots (7). \right.$$

Исследование. Чтобы корни, опредѣяемые вышедшими формулами, представляли отвѣтъ на задачу, они должны быть действительны, положительны и, каждый, $< p$.

Формула (4) показываетъ, что z дѣйствительно; оно будетъ положительно, если вѣсть $m < p$; но въ такомъ случаѣ z будетъ и меньше p . Итакъ, должно быть

$$m < p \dots (8).$$

Чтобы x и y были дѣйствительны, необходимо, чтобы было

$$(p^2 + m^2)^2 - 8p^2m^2 > 0, \text{ или } (p^2 + m^2)^2 - (2\sqrt{2} \cdot pm)^2 \geq 0,$$

или

$$(p^2 + m^2 + 2\sqrt{2} \cdot pm)(p^2 + m^2 - 2\sqrt{2} \cdot pm) \geq 0,$$

т.е. оба множителя 1-й части должны имѣть одинаковый знакъ; но какъ первый множитель положителенъ, то и второй долженъ быть > 0 , такимъ образомъ, разложивъ по степенямъ m , имѣемъ неравенство

$$m^2 - 2\sqrt{2} \cdot p \cdot m + p^2 \geq 0.$$

Корни этого триннома суть: $m' = p(\sqrt{2} - 1)$ и $m'' = p(\sqrt{2} + 1)$, и какъ тринномъ долженъ имѣть знакъ перваго члена, то m должно лежать внѣ корней, т.е. должно быть

$$m \leq p(\sqrt{2} - 1) \dots (9) \text{ или } m \geq p(\sqrt{2} + 1) \dots (10).$$

Но неравенство (10), будучи не необходимо, противорѣчитъ необходимому неравенству (8), и потому должно быть отброшено. Тогда останутся два неравенства одинаковаго смысла (8) и (9); но какъ первое изъ нихъ заключается во второмъ, то остается послѣднее, т.е.

$$m \leq p(\sqrt{2} - 1).$$

Разъ оно удовлетворено, x и y будутъ дѣйствительны, но въ такомъ случаѣ они будутъ и положительны, ибо ихъ произведение $2m^2$ и сумма $\frac{p^2 + m^2}{p}$ положительны. Кроме того, x и y будутъ и меньше p . Въ самомъ дѣлѣ,

$$f(p) = p^3 - p^2 - m^2p + 2m^2p = m^2p,$$

слѣдовательно, положительна; это значитъ, что p находится внѣ интервала корней ур—ния (6), и какъ полусумма этихъ корней, равная $\frac{p^2 + m^2}{2p}$, меньше p ибо при условіи $m^2 < p^2$ имѣемъ $\frac{p^2 + m^2}{2p} < \frac{2p^2}{2p}$, т. е. $< p$, то расположение корней x и y и числа p на скалѣ дѣйствительныхъ чиселъ таково:

$$x \dots y \dots p,$$

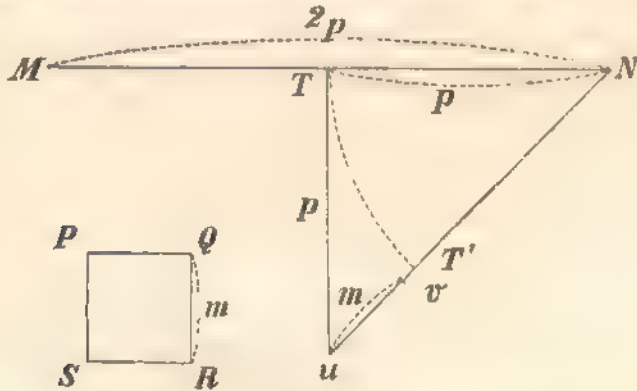
т. е. x и y , каждое, меньше p .

Заключаемъ, что единственное условіе возможности задачи есть

$$m \leq p(\sqrt{2} - 1).$$

Итакъ, числа x , y и z , будучи дѣйствительными, положительными, меньшими p и удовлетворяя ур—нію (2), служатъ сторонами прямоугольнаго треугольника, который и можетъ быть построенъ.

Неравенство (9) показываетъ, что наибольшая величина или максимумъ m есть $p(\sqrt{2} - 1)$; такъ какъ это есть одинъ изъ корней подрадикальнаго тринома, то послѣдній при $m = p(\sqrt{2} - 1)$ обратится въ нуль, x и y сдѣлаются равными, а треугольникъ равнобедреннымъ, такъ что напомнимъ теорему: изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковаго периметра равнобедренный имѣетъ наибольшую площадь (ибо при наиб. значеніи m , и m^2 имѣетъ наиб. значеніе).



Черт. 84.

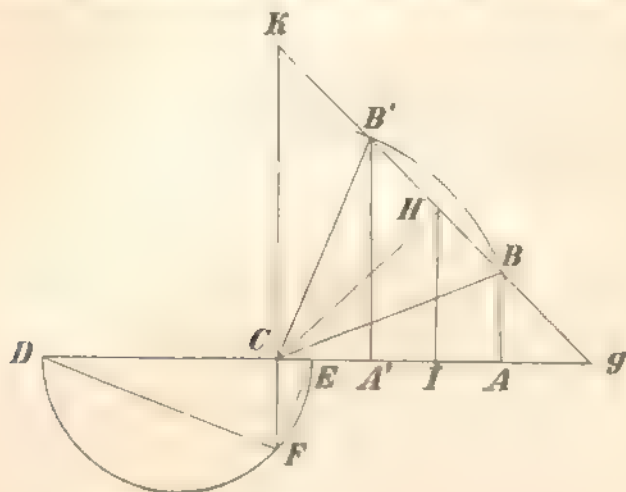
Примечаніе. Если бы мы рѣшили неравенства относительно p , то легко нашли бы подобнымъ же образомъ, что: изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковую площадь, равнобедренный имѣетъ наименьшій периметръ.

Построеніе. Пусть данный периметръ $2p$ равенъ линіи MN, а данный квадратъ стороны m равенъ PQRS. Раздѣливъ линію MN пополамъ, возставимъ въ точкѣ T перпендикуляръ TU—TN= p , и соединимъ U съ N; изъ прямоугольнаго треугольника NTU имѣемъ: NU= $p\sqrt{2}$. Описавъ изъ точки N, какъ изъ центра, дугу радиусомъ $=p$, получимъ: UT= $p(\sqrt{2} - 1)$. Исследование наше показало, что для возможности задачи сторона m квадрата m^2 не должна превышать линіи UT: беремъ для заданнаго квадрата сторону, равную UV < UT'.

Строим z по формуле (4). Для этого, взяв прямую $DG = 2r$ на половинѣ ея DE — ниславимъ и дугъ угъ, назовемъ въ немъ хорду $EF = m$, спускаемъ перпендикуляръ FC на DE , и соединимъ точки D и F . Изъ прямоугольнаго треугольника DEF имеемъ: $DF^2 = DE^2 - EF^2 = r^2 - m^2$, съ другой стороны: $DF^2 = DE^2 - DC^2 = r^2 - DC^2$, следовательно $r^2 - DC^2 = r^2 - m^2$, откуда

$$DC = \frac{r^2 - m^2}{r} = x.$$

Замѣчая, что $CG = DG - DC = 2r - x$, изъ ур- ния (1) видимъ, что $CG = x + y$.



Черт. 85.

Допустивъ, что CAV есть требуемый треугольникъ, имеемъ.

$$CA + AB = x + y = CG = CA + AG,$$

откуда

$$AB = AG,$$

следовательно уголъ G треугольника ABG равенъ 45° при чемъ $(B - C) = x$.

Потому изъ треугольникъ BCG известны стороны CB и CG и уголъ G , такъ что дальше предлагаемо построение можно предложить. Изъ C и беремъ $CK = CG$, соединимъ точки K и B и опустимъ перпендикуляръ CH на KB , который раздѣлитъ прямую KB въ точкѣ H пополамъ. Не трудно удостовѣриться, что въ рассматриваемомъ случаѣ $CD > CH$, поэтому, описавъ изъ C , какъ изъ центра, дугу радиусомъ CD , найдемъ, что она пересѣкаетъ линию KB въ двухъ точкахъ B и B' . Опустивъ изъ этихъ точекъ перпендикуляры BA и BA' на CA , найдемъ два требуемыхъ треугольника ABG и $AB'G$ легко видѣть, что они равны. Въ самомъ дѣлѣ CG равно и CA въ точкѣ I дѣлится пополамъ, поэтому

$$AG = AB = A'G; \text{ а также } CB = CB'.$$

При условіи $m/r(1/2 - 1)$ легко видѣть, что будетъ $CD = CH$, и задача имѣть одно рѣшеніе — равнобедренный треугольникъ CHB . Наконецъ, при $m > r(1/2 - 1)$ будетъ $CD < CH$, и задача невозможна.

Задача VII.

600. Зная высоту h усѣченного конуса, его объемъ V и радиусъ R одного изъ оснований, вычислить радиусъ x другого основания.

Рѣшеніе. Объемъ конуса, усѣченного параллельно основанію, дается формулою $\frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rx + x^2)$, и если данный объемъ V мы представимъ въ видѣ

конуса той же высоты h , какъ и искомый, съ радиусомъ a основанія, т.-е. положимъ $V = \frac{1}{3} \pi h a^2$, то прямо получимъ ур—ніе

$$\frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rx + x^2) = \frac{1}{3} \pi h \cdot a^2, \text{ или } x^2 + Rx + R^2 - a^2 = 0 \dots (1),$$

откуда

$$x = \frac{-R \pm \sqrt{4a^2 - 3R^2}}{2}.$$

Исследование. Если предположить, что искомый усѣченный конусъ состоитъ изъ двухъ конусовъ, сложенныхъ вершинами, т.-е. представляетъ усѣченный конусъ 2-го рода, то нашла бы ур—ніе

$$x^2 - Rx + R^2 - a^2 = 0 \dots (2),$$

отличающееся отъ перваго только переменною x на $-x$: слѣдов. отрицательные корни ур—нія (1) служатъ положительными корнями (2), и потому даютъ рѣшенія 2-го рода.

Зная это, обратимся къ исследованію ур—нія (1).

Условіе дѣйствительности корней, какъ легко видѣть, выражается неравенствомъ $a^2 \geq \frac{3}{4} R^2$.

Знаки корней. Произведение корней, равное $R^2 - a^2$, будетъ > 0 при $a^2 < R^2$, $= 0$ при $a^2 = R^2$ и < 0 при $a^2 > R^2$.

Сумма корней, равная $-R$, всегда отрицательна. Такимъ образомъ, критическія значенія a^2 , въ восходящемъ порядкѣ, суть $0, \frac{3}{4} R^2$ и R^2 , а легко составить слѣдующую таблицу знаковъ,

Значенія a^2	0	$\frac{3}{4} R^2$	R^2
Результатъ	—	+	+
Прозв. корней		+	—
Сумма корней		—	

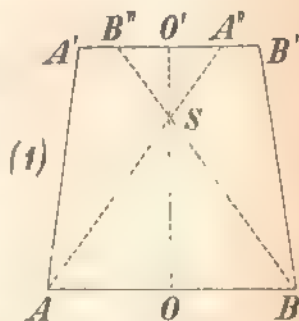
изъ которой тотчасъ выводимъ заключенія:

- 1) $a^2 < \frac{3}{4} R^2$. Результатъ отрицательный, слѣд. корни ур—нія (1) мнимы, и знача неважны.
- 2) $a^2 = \frac{3}{4} R^2$ (minimum a^2). Въ этомъ случаѣ

$$x = -\frac{R}{2},$$

что даетъ усѣченный конусъ 2-го рода, у котораго радиусъ верхняго основанія вдвое меньше радиуса нижняго основанія. Это значитъ, что изъ всѣхъ усѣченныхъ конусовъ 1-го или 2-го рода, которые можно построить на данномъ основаніи и съ данною выотою, наименьшій объемъ принадлежитъ конусу 2-го рода $ABSB''A''$ (черт. 86), котораго вершина находится на $\frac{2}{3}$ высоты отъ нижняго основанія.

- 3) $\frac{3}{4} R^2 < a^2 < R^2$. Произведение корней ур—нія (1) положительно, а сумма



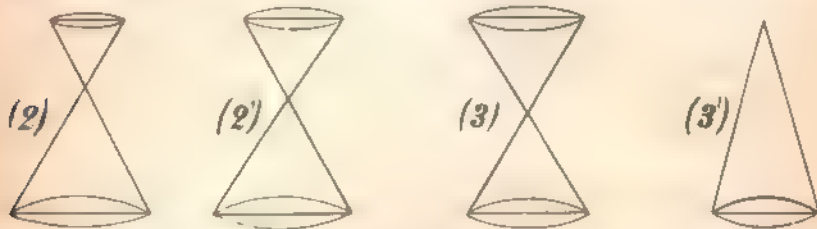
Черт. 86.

их отрицательна ($-R$), слѣдов. оба корня отрицательны и даютъ два рѣшенія 2-го рода (2) и (2'), которыхъ основания расположены по обѣ стороны точки S (1).

4) $a^2 = R^2$. Ур. (1) приводится къ $x^2 + Rx = 0$ и имѣетъ корни:

$$x = 0, \quad x = -R.$$

Второй корень даетъ усѣченный конусъ 2-го рода (3), имѣющій вершину въ срединѣ высоты; первое рѣшеніе даетъ полный конусъ (3'), который не произволу можно разсматривать или какъ усѣченный 1-го рода, или какъ усѣченный конусъ 2-го рода.



Черт. 87.

5) $a^2 > R^2$. Произведение и сумма корней ур-нія (1) отрицательны; слѣдов. одинъ корень положительный, а другой отрицательный, причемъ абсолют. знач. послѣдняго больше перваго; первый даетъ усѣченный конусъ 1-го рода, второй — 2-го рода, какъ на черт. (1), только радиусъ $O'A'$ длиннѣе OB' .

Если, теперь, помножить обѣ части предыдущихъ равенствъ и неравенствъ на $\frac{1}{3}h$, чтобы ввести данный объемъ V , то все изслѣдованіе можно резюмировать такъ:

Резюме изслѣдованія.

$V < \frac{1}{4}\pi R^2 h$. . . x' и x'' миним.: 0 рѣшеній.

$V = \frac{1}{4}\pi R^2 h$. . . $x' = x'' = -\frac{R}{2}$ даетъ : 1 рѣш. 2-го рода.

minimum для V .

$V > \frac{1}{4}\pi R^2 h$ { $V < \frac{1}{3}\pi R^2 h$: $x' < 0, x'' < 0$: 2 рѣшенія 2-го рода.
 $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$: $x' = -R, x'' = 0$: 2 рѣшенія 2-го рода.
 $V > \frac{1}{3}\pi R^2 h$: $x' < 0, x'' > 0$: 1 рѣш. 1-го и 1 рѣш. 2-го рода.

601. Изслѣдованіе измѣненія объема V . Для объема V мы нашли формулу: $V = \frac{1}{3}h(x^2 + Rx + R^2)$, которую можно написать въ видѣ

$$V = \frac{1}{3}h \left[x + \frac{R}{2} + \frac{3}{4}R^2 \right].$$

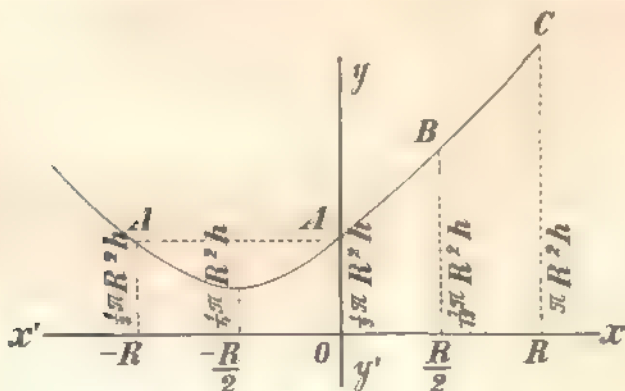
Это есть квадратный триномъ относительно x ; изученіе его измѣненій при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ приведетъ насъ къ вышеизложеннымъ результатамъ, но кратчайшимъ путемъ.

Даемъ x -у сначала значения отъ 0 ю $-\infty$, и вычисляемъ соответствующія значения выражения въ квадратныхъ скобкахъ; помноживъ каждое изъ этихъ значений на $\frac{1}{3}\pi h$, найдемъ измѣненія объема V . То же самое дѣлаемъ, измѣняя x отъ 0 до $+\infty$. Такимъ образомъ получаемъ двѣ таблицы измѣненій V : для положительныхъ и для отрицательныхъ значений x .

x	$0 < \dots < \frac{R}{2} \dots < R \dots < +\infty$
$\frac{V}{\frac{1}{3}\pi h}$	$R^2 \dots < \frac{7}{4}R^2 \dots < 3R^2 \dots < +\infty$
V	$\frac{1}{3}\pi R^2 h \dots < \frac{7}{12}\pi R^2 h \dots < \pi R^2 h \dots < +\infty$
x	$0 \dots > -\frac{R}{2} \dots > -R \dots > -\infty$
$\frac{V}{\frac{1}{3}\pi h}$	$R^2 \dots > \frac{3}{4}R^2 < \dots R^2 \dots < +\infty$
V	$\frac{1}{3}\pi R^2 h \dots > \frac{1}{4}\pi R^2 h < \dots \frac{1}{3}\pi R^2 h \dots < +\infty$

Итакъ, конусъ первого рода неограниченно возрастаетъ отъ $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ до безконечности; конусъ второго рода сперва уменьшается отъ $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ до $\frac{1}{4}\pi R^2 h$, потомъ увеличивается до $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, проходя два раза черезъ всѣ величины между $\frac{1}{4}\pi R^2 h$ и $\frac{1}{3}\pi R^2 h$; а затѣмъ продолжаетъ увеличиваться, проходя разъ черезъ каждое значеніе отъ $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ до $+\infty$.

Представимъ эти измѣненія объема кривою. Для этого наносимъ положительныя



Черт. 84.

значенія x по оси x вправо отъ начала 0, отрицательныя — влѣво отъ 0. Въ конечной точкѣ каждаго значенія x проводимъ перпендикуляръ къ оси x , и откладываемъ на немъ величины функции V . Соединивъ вершины ординатъ, получимъ параболу, изображающую наглядно измѣненія V . Эта кривая показываетъ:

1) Чтобы найти значение V , соответствующее данному значению x , нужно нанести x на ось $x'x$ вправо или влево от точки O , смотря по знаку x -са, и провести ординату кривой, соответствующую взятому значению x .

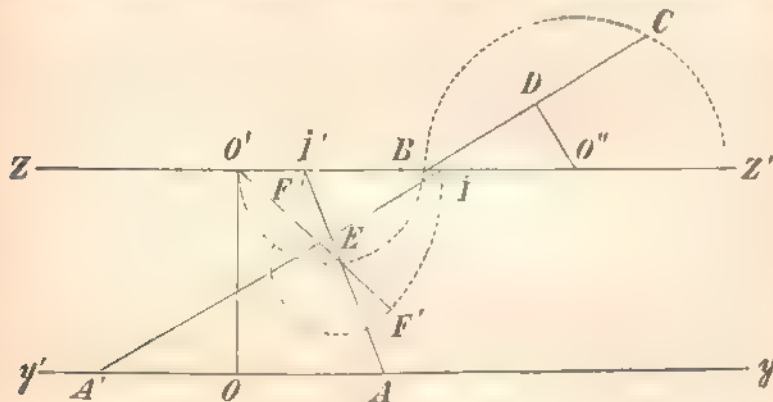
2) Чтобы найти значение x , соответствующее данной величине V , нужно пересечь кривую параллелью оси $x'x$, взятой на расстоянии от $x'x$, равном значению V , и построить абсциссы точек пересечения этой параллели съ кривою.

Такимъ образомъ легко видѣть, что задача не имѣетъ рѣшенія, когда V меньше $\frac{1}{4}\pi R^2h$, ибо кривая не имѣетъ точекъ, которымъ ординаты были бы меньше $\frac{1}{4}\pi R^2h$; что наименьшее значение V есть $\frac{1}{4}\pi R^2h$, и что оно соответствуетъ $x = -\frac{R}{2}$; что V принимаетъ два раза каждое значение между $\frac{1}{4}\pi R^2h$ и $\frac{1}{3}\pi R^2h$ при двухъ различныхъ отрицательныхъ значенияхъ x , одномъ, содержащемся между 0 и $-\frac{R}{2}$, другимъ — между $-\frac{R}{2}$ и $-R$; задача имѣетъ 2 рѣшенія 2-го рода; что, наконецъ, V принимаетъ дважды каждое значение большее $\frac{1}{3}\pi R^2h$, разъ при $x > 0$, другой при $x < -R$: задача имѣетъ 2 рѣшенія — одно 1-го рода, и одно 2-го рода.

Построеніе. Возьмемъ случай: $a > R$, когда задача имѣетъ два рѣшенія — усѣченные конусы 1-го и 2-го рода. Верхнія основанія ихъ имѣютъ радиусы, выражаемые формулами.

$$x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Взявъ линію $OO' = h$, проведемъ къ ней въ точкахъ O и O' перпендикуляры yy' и zz' ; на первомъ отъ точки O отложимъ $OA = OA' = R$, на второмъ отъ точки



Черт. 89.

O линію $O'B = a$, а на продолженіи ея линію $BO' = R$. Изъ точки O' радиусомъ $O'B$ описываемъ полуокругу, въ которой вписываемъ сторону призматическаго треугольника BC , и дѣлимъ ее въ точкѣ D пополамъ; линія $BD = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Описавъ на a полуокружность, наносимъ въ нее хорду $BE = BD$ и соединяемъ точку E съ O : очевидно,

$$OE = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Затѣмъ, описавъ изъ точки E радиусомъ $EF' = EF = \frac{R}{2}$ полуокругъ, получимъ окончательно:

$$OG = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R+3}{2}\right)^2} - \frac{R}{2} = x'; \quad OF' = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R+3}{2}\right)^2} - \frac{R}{2} = x.$$

Нанеся лини $O'F$ и $O'F'$ на лини $O'O''$, получимъ. $O'F = x'$, $O'F' = x$. Остается соединить l съ A' , а l съ A и повернуть чертежъ около оси (OO') : вращеніе дастъ искомыя конусы.

Задача VIII.

602. Изъ данной полуокружности вписать хорду такъ, чтобы сумма ея длины съ разстояніемъ отъ центра равнялась данной лини m .

Рѣшеніе. Пусть будетъ AB требуемая хорда, OC ея разстояніе отъ центра. По условію задачи:

$$AB + OC = m.$$

Примемъ за неизвѣстное $OC = x$; соединивъ A съ O , изъ треугольника ACO получимъ: $AC = \sqrt{R^2 - x^2}$, откуда ур—ніе задачи:

$$2\sqrt{R^2 - x^2} + x = m.$$

Это ур—ніе иррациональное; для рѣшенія его, возводимъ корень въ первой части:

$$2\sqrt{R^2 - x^2} = m - x \dots (1)$$

и возвышаемъ обѣ части въ квадраты; приведемъ члены въ порядокъ, найдемъ уравненіе.

$$5x^2 - 2mx + m^2 - 4R^2 = 0 \dots (2).$$

Исследование. Это ур—ніе не эквивалентно (1)-му, ибо оно получится бы и изъ ур—нія: $-2\sqrt{R^2 - x^2} = m - x \dots (1')$, такъ что ур—нію (2) могутъ удовлетворять корни двухъ уравненій (1) и (1'). Поэтому, корни ур—нія (2) только тогда будутъ удовлетворять ур—нію (1), когда они дадутъ разность $m - x$ положительною, т-е. когда $x < m$. Затѣмъ, необходимо, чтобы x было действительно, положительно и не больше R ; при освобожденіи послѣдняго условія точка C будетъ лежать внѣ окружности и потому не дастъ хорды.

Итакъ, чтобы алгебраическій корень x ур—нія (2) удовлетворялъ предложенной геометрической задачѣ, нужно, чтобы было, x —действительно, $x > 0$, $x < m$, $x < R$.

Но если x удовлетворяетъ первымъ тремъ условіямъ, то оно удовлетворяетъ и ур—нію (1), а слѣд. $2\sqrt{R^2 - x^2} = m - x$, равняяс. сдѣйствител. количеству $m - x$, также будетъ действител., а слѣдов. будетъ и $x < R$. Такимъ образомъ, предшдущія условія сводятся къ слѣдующимъ тремъ

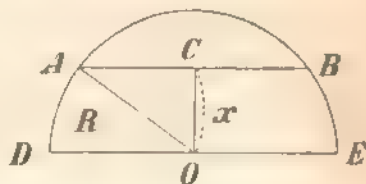
$$x \text{ дѣйств.}, \quad x > 0, \quad x < m.$$

1) Условіе *дѣйствительности* корней ур—нія 2. выражается неравенствомъ:

$$m^2 - 5(m^2 - 4R^2) > 0, \text{ или, по упрощеніи, } m^2 - 5R^2 < 0,$$

или

$$(m + R\sqrt{5})(m - R\sqrt{5}) < 0.$$



Черт. 90.

Но первый множитель > 0 , слѣд. должно быть $m - R\sqrt{5} \leq 0$, или

$$m \leq R\sqrt{5}.$$

Отсюда:

I. Когда $m > R\sqrt{5}$, ур—ние (2) будетъ имѣть корни мнимые: задача невозможна.

II. Когда $m = R\sqrt{5}$, ур—ние (2) имѣетъ корни дѣйствительные равные: ихъ общая величина равна $\frac{m}{5}$, или

$$x' = x'' = \frac{R\sqrt{5}}{5}.$$

Это — величина дѣйствительная, положительная и меншая $m = R\sqrt{5}$, слѣд. представляетъ рѣшеніе данной задачи: ей соответствуетъ особое положеніе точки C. Проведа въ точкѣ D касательную $DF = 2R$, соединяемъ точки F и O: прямая FO будетъ $= R\sqrt{5}$; отбѣлавъ отъ нея пятую часть, OK, отложимъ ее на радиусѣ OC: надемъ точку C и хорда A_1B_1 будетъ требуемая.

Замѣтимъ, что величина $R\sqrt{5}$ есть *максимум данной суммы m*, ибо задача невозможна, когда m больше этой величины, но m можетъ достигъ этой величины, когда точка C займетъ только что указанное положеніе. Итакъ сумма $AB + OC$ достигаетъ *максимума* $= R\sqrt{5}$, когда $x = \frac{R\sqrt{5}}{5}$.

III Обратимся теперь къ случаю $m < R\sqrt{5}$. Въ этомъ случаѣ корни ур—нія (2) дѣйствительные и неравные; рассмотримъ ихъ знаки и величину.

Знаки корней Ур. (2) показываютъ, что произведение корней, будучи $= \frac{m^2 - 4R^2}{5}$, имѣетъ знакъ разности $m^2 - 4R^2$, которую можно представить въ видѣ $(m+2R)(m-2R)$. А какъ $m - 2R$ всегда > 0 , то заключаемъ, что произведение это положительно, когда $m > 2R$, равно 0, когда $m = 2R$, и отрицательно, когда $m < 2R$.

Сумма корней, равная $\frac{2}{5}m$, будетъ всегда положительна.

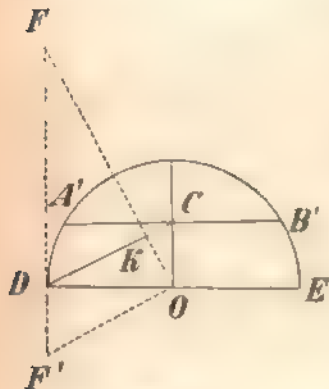
Величина корней. Должно быть $x < m$. Рассмотримъ, какое положеніе m занимаетъ относительно корней. Результатъ подстановки m вмѣсто x въ триномъ (2) даетъ, по упрощеніи,

$$f(m) = 4(m^2 - R^2),$$

и слѣдов. $f(m)$ имѣетъ такой знакъ какъ $m^2 - R^2$, или какъ $(m+R)(m-R)$, а какъ $m+R$ всегда > 0 , то знакъ будетъ такой какъ у $m-R$, слѣдов.

когда $m > R$, то $f(m) > 0$; когда $m = R$, $f(m) = 0$; когда $m < R$, $f(m) < 0$.

Расположимъ теперь найденныя критическія значенія m , т.е. числа $R\sqrt{5}$, $2R$, R и 0 — въ порядкѣ возрастающихъ значеній и помѣстимъ знаки реализанта, произведенія корней, ихъ суммы, а также знаки $f(m)$ и 1-го коэффициента въ нижеслѣдующую таблицу, въ которой можно прямо читать все, что относится до корней въ любомъ интерваллѣ значеній параметра m .



Черт. 91.

Скала значений m	0	R	2R	$R\sqrt{5}$
Реализантъ	+	+	+	—
Произведение корней	—	—	+	
Сумма корней	+	+	+	
$f(m)$	—	+	+	
Ковф. при x^2	+	+	+	

Рассмотрим каждый интервалъ.

1. $m < R$. Корни действительны, ибо реализантъ > 0 ; произведение корней отрицат., слѣдов., знаки корней различны, сумма корней > 0 , слѣдов., больший по абсол. значению корень положительный. Затѣмъ, знакъ $f(m)$ противоположенъ знаку 1-го коэф., слѣдов. m — между корнями, и имѣетъ мѣсто слѣдующее расположение (обозначая меньшій корень x' , больший — x''):

$$x' \dots m \dots x''.$$

А какъ задачѣ удовлетворяетъ только x положительное и меньшее m , то задача не имѣетъ рѣшеній, что очевидно, ибо уже $AC + OC$, по свойству стороны треугольника, больше R, а $AB + OC$ и подобию.

2. $m = R$. Результатъ подстановки числа m вмѣсто x обращается при $m = R$ въ нуль, а это значитъ, что R есть корень ур-нія. Задача имѣетъ 1 рѣшеніе, $x = R$: хорда обращается въ нуль.

3. $R < m < 2R$. Корни дѣйстви., против. по знаку, больший по абс. величинѣ кор. положителенъ; и какъ $f(m)$ имѣетъ знакъ одинаковый съ 1-мъ коэффицентомъ, то m лежитъ внѣ корней. Чтобы предсказать мѣсто m относительно корней, нужно еще сравнить m съ полусуммою корней, которая $= \frac{1}{5}m$; очевидно,

$m > \frac{1}{5}m$, слѣдовательно m больше большаго корня, и расположение этихъ чиселъ таково

$$x' \dots x'' \dots m,$$

слѣд. больший корень, будучи > 0 и $< m$, отвѣчаетъ задачѣ, которая такимъ образомъ имѣетъ на этотъ разъ 1 рѣшеніе.

4. $m = 2R$. Произведение корней мѣняетъ знакъ (— на +), слѣдовательно обращается въ нуль; слѣдовательно, одинъ корень — нуль, другой удовлетворяетъ ур-нію $5x - 4R = 0$, откуда $x = \frac{4}{5}R$, и задача имѣетъ два рѣшенія, изъ коихъ первое даетъ хорду, сливающуюся съ діаметромъ.

5. $2R < m < R\sqrt{5}$. Произведение и сумма корней положительны, слѣд. оба корня положительны; знакъ $f(m)$ одинаковъ со знакомъ 1-го коэффицента, слѣдовательно, m внѣ корней, и какъ m больше полусуммы ($\frac{1}{5}m$) корней, то расположение x' , x'' и m таково

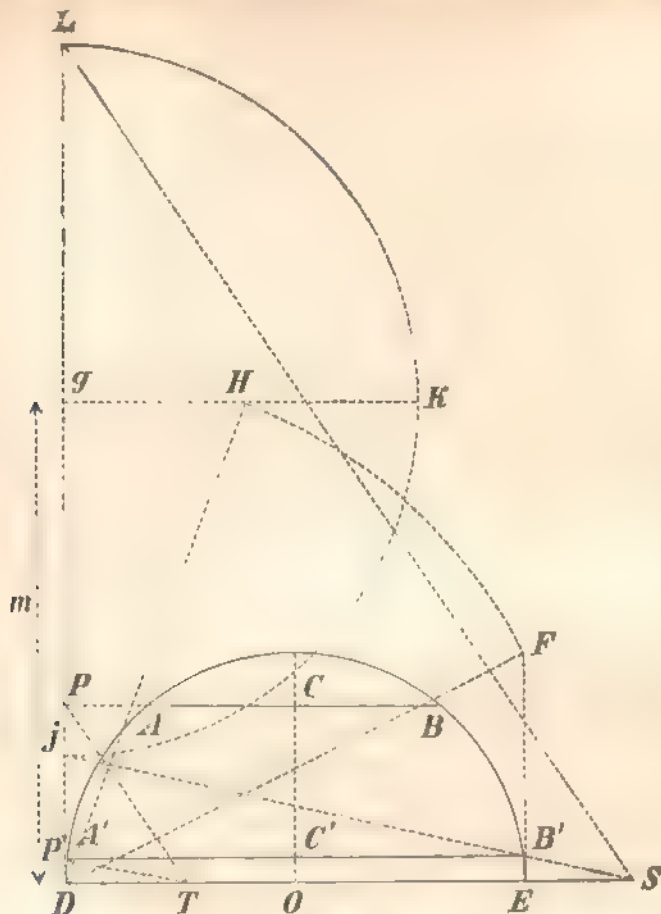
$$x' \dots x'' \dots m,$$

т.е. оба положительныхъ корня $< m$: задача имѣетъ 2 рѣшенія, выражаемая формулою:

$$\frac{m}{5} \pm \frac{2}{5}\sqrt{5R^2 - m^2}$$

Случай $m = R\sqrt{5}$ и $m > R\sqrt{5}$ рассмотрѣны выше (см. I и II).

Построение. Проведя касательную $EF \perp R$ и соединив точки D и F , получим линию $DF = R\sqrt{5}$. Затем на касательной DL откладываем отрезокъ



Черт. 93.

$DG = m$, взявъ его $> 2R$, но $< R\sqrt{5}$ и проводимъ прямую GH параллельно DE . Описавъ изъ точки D дугу радиусомъ DF до пересѣченія съ прямою GH въ точкѣ H , найдемъ:

$$GH = \sqrt{5R^2 - m^2};$$

затѣмъ, беремъ линію $GK = 2GH$:

$$GK = 2\sqrt{5R^2 - m^2},$$

и изъ точки G радиусомъ GK описываемъ полуокружность, которая пересѣчетъ прямую DL въ точкахъ I и L ; очевидно:

$$DI = m - 2\sqrt{5R^2 - m^2},$$

$$DL = m + 2\sqrt{5R^2 - m^2}.$$

Остается отъ каждой изъ этихъ прямыхъ отрѣзать пятую часть. Беремъ

$DT = ES = \frac{R}{2}$, проводимъ SI и SL , и изъ точки T проводимъ: TP параллельно SL и TP' параллельно SI , остается изъ точекъ P и P' провести параллели диаметру DE , которыя и дадутъ требуемыя хорды AB и $A'B'$.

Задача IX.

603. Построить треугольникъ, зная его сторону a , соответствующую ей высоту h и радиусъ R описанной круга.

Рѣшеніе. Пусть неизвѣстныя стороны будутъ x и y . По извѣстнымъ теоремамъ геометріи имѣемъ:

$$xy = 2Rh; \quad \frac{ah}{2} = \sqrt{\frac{(x+y-a)}{2} \cdot \frac{(x+y+a)}{2} \cdot \frac{(a+x-y)}{2} \cdot \frac{(a-(x-y))}{2}}.$$

Возвышая обѣ части 2-го ур. въ квадратъ, найдемъ:

$$4a^2h^2 = [(x+y)^2 - a^2][a^2 - (x-y)^2].$$

Примемъ за вспомогательное неизвѣстное сумму $x+y=s$; x и y будутъ корнями уравненія

$$X^2 - sX + 2Rh = 0 \quad (. . . 1).$$

Для опредѣленія s имѣемъ соотношеніе

$$4a^2h^2 = (s^2 - a^2)[a^2 - (s^2 - 8Rh)],$$

или

$$s^4 - 2(a^2 + 4Rh)s^2 + a^4 + 4a^2h^2 + 8a^2Rh = 0 \quad (. . . 2).$$

Рѣшая это ур—ніе относительно s^2 , найдемъ, что подкореннаго количество $=(4R^2 - a^2) \cdot 4h^2$, оно положительно, если $a < 2R$. Если это условіе выполнено, оба значенія s^2 действительны, они и положительны, ибо произведение и сумма корней ур—нія (2), разсматриваемаго какъ квадратное, положительны; слѣд. s , при условіи $a < 2R$, имѣетъ всегда два положительныхъ значенія, именно:

$$s = \sqrt{a^2 + 4Rh} \pm 2h \sqrt{4R^2 - a^2} = \sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)},$$

полагая $d = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

Рѣшая затѣмъ ур—ніе (1), находимъ:

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2h(-2R \pm d)},$$

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2h(-2R \pm d)},$$

полагая, что $x > y$, что позволительно; въ этихъ формулахъ нужно брать передъ d или верхніе знаки вмѣстѣ, или нижніе вмѣстѣ (въ силу ур—нія $xy = 2Rh$). Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{a^2 + 2h(2R + d)} + \sqrt{a^2 + 2h(-2R + d)} \right\} \\ y_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{a^2 + 2h(2R + d)} - \sqrt{a^2 + 2h(-2R + d)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{a^2 + 2h(2R - d)} + \sqrt{a^2 + 2h(-2R - d)} \right\} \\ y_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{a^2 + 2h(2R - d)} - \sqrt{a^2 + 2h(-2R - d)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Изъ этихъ формулъ выводимъ слѣдующія заключенія.

Въ системѣ (3) рѣшеній первый корень всегда действителенъ; чтобы и второй былъ действителенъ, надо, чтобы было

$$a^2 + 2h(2R + d) > 0, \text{ откуда } h < \frac{a^2}{2(2R + d)}.$$

Система (4) рѣшеній будетъ действительна, если подкоренное количество подъ вторымъ радикаломъ будетъ положительно, т. е. если $a^2 - 2h(2R + d) > 0$, откуда $h < \frac{a^2}{2(2R + d)}$. Въ этомъ предѣлѣ заключается первый. Умноживъ оба члена второй части неравенства на $2R - d$, имѣемъ:

$$h < \frac{a^2(2R - d)}{2(4R^2 - d^2)}, \text{ или } h < \frac{2R - d}{2}, \text{ или } h < R - \frac{d}{2}.$$

Итакъ, задача имѣетъ *два рѣшенія*, если $h < R - \frac{d}{2}$.

Если $a^2 - 2h(2R + d) < 0$, но $a^2 - 2h(2R - d) > 0$, откуда

$$\frac{a^2}{2(2R - d)} > h > \frac{a^2}{2(2R + d)},$$

то система (4) даетъ мнимыя значенія для x и y , а система (3) действительная; заключаемъ, что при условіи

$$R - \frac{d}{2} < h < R + \frac{d}{2}$$

задача имѣетъ *одно рѣшеніе*, выражаемое корнями r_1 и r_2 .

Наконецъ, если $h > R + \frac{d}{2}$, то обѣ системы (3) и (4) мнимы и задача невозможна.

Эти результаты легко обнаружить на чертежѣ (черт. 94). Описавъ кругъ радиусомъ R , проведемъ въ немъ хорду $BC = a$ и къ ней перпендикулярный диаметръ MM' ; имѣемъ:

$$ON = \sqrt{OB^2 - BN^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}},$$

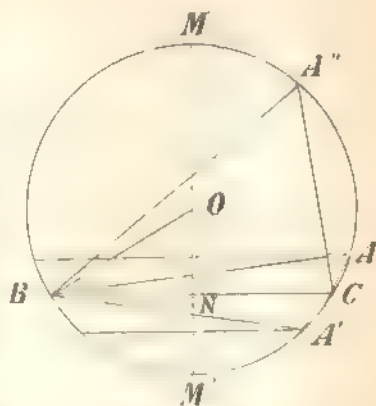
слѣдовательно

$$d = 2ON, \quad \frac{d}{2} = ON.$$

При $h < R - \frac{d}{2}$, т. е. при $h < OM' - ON$, или при $h < NM'$ существуютъ двѣ точки A и A' , расположенныя въ разстояніи h отъ BC , по ту и по другую сторону отъ BC и лежація на данной окружности; слѣд. задача отвѣчаетъ два треугольника: ABC и $A'BC$.

Если $R - \frac{d}{2} < h < R + \frac{d}{2}$, то-есть если $NM' < h < NM$, одинъ треугольникъ $A'BC$ отвѣчаетъ вопросу.

Наконецъ, если $h > NM$, то невозможно вписать въ окружность треугольникъ, высота котораго была бы $= h$, и задача невозможна.



Черт. 94.

Задача X.

604. По данной площади m^2 и периметру $6a$ шестиугольника, составленного тремя равными равнобокими треугольниками, построенными на сторонах равностороннего треугольника ABC , найти на основаниях, найти сторону AC этого правильного треугольника.

Решение. Замечает прежде всего, что шестиугольник может быть двояко вида, смотря по тому, будет ли равное равные треугольники построены на сторонах равностороннего треугольника ABC , или внутри его. В первом случае будем называть шестиугольник фигурой *первого рода*, во втором — *второго рода*.

Пусть (черт. 95) $AC = 2x$; $AB = a$; ур—ние будетъ

$$m^2 = x^2 \sqrt{3} \pm 3x(a^2 - x^2),$$

причемъ знакъ $+$ относится къ шестиугольнику 1-го рода, знакъ $-$ къ фигуре 2-го рода.

Разделивъ обе части на $\sqrt{3}$ и изолировавъ радикалъ имеемъ:

$$B \quad m - x^2 = \pm x \sqrt{3(a^2 - x^2)}.$$

Изследование. Для того, чтобы вторая часть была действительною, необходимо, чтобы существенно положительное количество x содержалось между 0 и a ; затѣмъ, смотря по знаку разности $m - x^2$, различаемъ, какой родъ шестиугольника отвѣчаетъ вопросу.

Возвышая обе части въ квадратъ, получимъ ур—ние, отвѣчающее задачѣ въ самомъ общемъ смыслѣ:

$$(m - x^2)^2 = 3(a^2 - x^2)x^2,$$

или, приводя въ порядокъ:

$$4x^4 - (2m + 3a^2)x^2 + m^2 = 0 \dots (1)$$

откуда

$$x = \frac{1}{4} (\pm \sqrt{6m + 3a^2} \pm \sqrt{-2m + 3a^2}) \dots (2).$$

Различаемъ два случая $m > 0$ и $m = 0$, что возможно, ибо можетъ случиться, что въ шестиугольничкѣ 2-го рода площадь каждой изъ равнбокихъ треугольничковъ будетъ больше трети площади равносторонняго треугольника.

1-й случай $m = 0$ Первое подкоренное количество 0; чтобы второе было не меньше 0, надо, чтобы было $-2m + 3a^2 > 0$, откуда

$$m \leq \frac{3}{2} a^2.$$

Какъ скоро то условіе удовлетворено, значения x , выражаемая формулою (2), действительны; а какъ абсолютныя величины дѣлится на скобкахъ больше второму, то положительныя значения x , которая только и отвѣчаетъ на вопросъ, будутъ:

$$x_1 = \frac{1}{4} (\sqrt{6m + 3a^2} - \sqrt{-2m + 3a^2}),$$

$$x_2 = \frac{1}{4} (\sqrt{6m + 3a^2} + \sqrt{-2m + 3a^2}).$$

1. При $m = \frac{3}{2}a^2$ имеем: $x_1 = x_2 = \frac{a^2}{2}$, и задача имеет одно решение, соответствующий шестиугольник—правильный.

II. При $m < \frac{3}{2}a^2$ вопрос имеет два решения: существуют два шестиугольника, отвечающие вопросу, и чтобы определить их роды, надо знать знаки разностей $m - x_1^2$ и $m - x_2^2$. Подстановка m вместо x^2 в уравнение (1) дает

$$f(m) = 4m^2 - (2m + 3a^2)m + m^2 = 3m(m - a^2).$$

Отсюда видно, что когда:

$$m > a^2, \text{ будет } f(m) > 0;$$

$$m < a^2, \quad \quad \quad f(m) < 0,$$

$$m = a^2, \quad \quad \quad f(m) = 0.$$

1) В случае $m < a^2$, m находится вне интервала корней, и следоват., ни один из корней, x_1^2 и x_2^2 , меньше m , или оба больше m . Чтобы знать, тот или другой случай имеет место, сравним m с полусуммой корней; положив $\frac{2m + 3a^2}{8} = m$, найдем $m = \frac{1}{2}a^2$, что противоречит положению $m < a^2$. Значит m больше полусуммы корней, и оба величины, x_1^2 и x_2^2 , меньше m , т.е. оба разности $m - x_1^2$ и $m - x_2^2$ положительны. Заключаем, что в случае

$$a^2 < m < \frac{3}{2}a^2$$

оба шестиугольника относятся к 1-му роду.

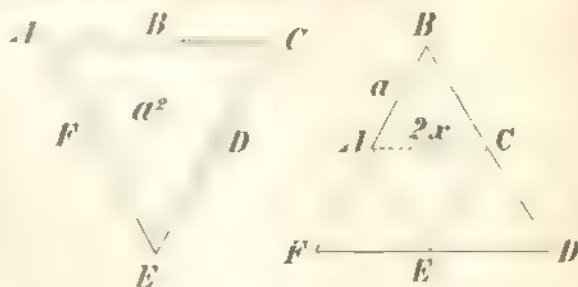
2) Когда $m < a^2$, m находится между корнями:

$$x_1^2 < m < x_2^2,$$

самоатомно, $m - x_1^2 > 0$, и корню x_1 отвечает шестиугольник 1-го рода; $m - x_2^2 < 0$, и корню x_2 отвечает шестиугольник 2-го рода.

3) Наконец, когда $m = a^2$, будет $f(m) = 0$, следоват., один корень $= m = a^2$. Другой корень $= \frac{m^2}{4} : a^2 = \frac{a^2}{4}$; то-есть $x_2 = a$, $x_1 = \frac{a}{2}$. Оба ше-

стиугольника превращаются в правильные треугольники: 1-й совпадает с треугольником ACB , второй сторона которого $a = 2x_1$, дает треугольник BDF , сторона которого вдвое больше стороны треугольника ACB .



Черт. 96.

Итак, во всем интервале II шестиугольник, соответствующий корню x_1 , принадлежит к 1-му роду.

2-й случай: $m = 0$. Чтобы корни были действительны, нужно, чтобы

$$6m + 3a^2 > 0, \quad \text{откуда} \quad m \geq -\frac{a^2}{2}.$$

Величина первого члена скобок в формулѣ (2) будетъ меньше второго члена, и потому положительные корни, отвечающе вопросу, будутъ:

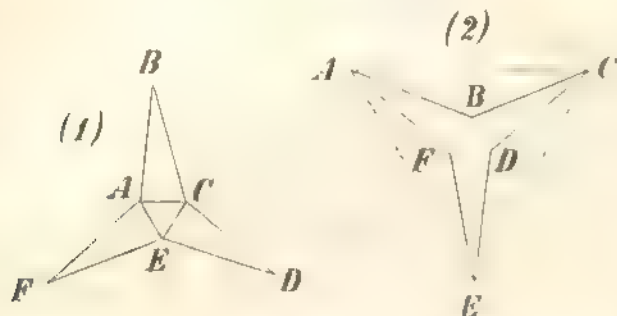
$$x_1 = \frac{1}{4} (-\sqrt{6m+3a^2} + \sqrt{-2m+3a^2}).$$

$$x_2 = \frac{1}{4} (\sqrt{6m+3a^2} + \sqrt{-2m+3a^2}).$$

Оба соответствующе шестигульника относятся ко второму роду.

Въ частномъ случаѣ: $m=0$ имѣемъ

$$x_1=0, \quad x_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Черт. 97.

Если положимъ, что m приближается къ нулю, оставаясь положительнымъ, то въ 1-го рода, соответствующій x_1 , имѣетъ видъ черт. 97 (1), а въ 2 рода, соответствующій x_2 , имѣетъ видъ черт. 97 (2), различіе отъ 1-го только расположениемъ вершинъ относительно правильнаго треугольника ACE.

Резюме изслѣдованія.

$m < \frac{3}{2}a^2$. . . x_1 и x_2 мнимы . . . 0 рѣшеній.

$m = \frac{3}{2}a^2$. . . $x_1 = x_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. . . 1 рѣшеніе (перваго рода).

$a^2 < m < \frac{3}{2}a^2$. $x_1 = 0$, $x_2 > 0$. . . 2 рѣшенія (перваго рода).

$\frac{a^2}{2} < m < a^2$. . . $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. . . 1 рѣш. 1-го рода, 1 рѣш. 2-го р.

$\frac{a^2}{2} < m < 0$. . . $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. . . 2 рѣшеніе (2-го рода).

Задача XI.

605. Шаръ радиуса r лежитъ на плоскости; на той же плоскости поставленъ конусъ, который радиусъ основанія равенъ R , а высота $2r$. На какомъ разстояніи x отъ данной плоскости нужно провести параллельную ей плоскость, чтобы объемы, содержащиеся между обѣими плоскостями, были равновелики?—Изслѣдовать положеніе стѣнушей плоскости относительно центра шара.

Решение. Объем сферического сегмента, имеющего высоту x , выражается формулой $\frac{1}{3}\pi x^2(3r - x)$. Объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований суть R и y , а высота x , выражается формулой $\frac{1}{3}\pi x(R^2 + y^2 + Ry)$. Кроме того, между x и y имеем соотношение $y : R = (2r - x) : 2r$, при помощи которого можно из предыдущей формулы исключить y , найдем

$$\frac{1}{3}\pi R^2 x + \frac{12r^2 - 6rx + x^2}{4r^2}.$$

Уравнение задачи, по сокращении на $\frac{1}{3}$, будет

$$4r^2 x^2 (3r - x) = R^2 x (x^2 - 6rx + 12r^2).$$

Решение $x = 0$ не соответствует задаче, ибо при этом значении x оба объема обращаются в нуль, остается квадратное уравнение

$$(R^2 + 4r^2)x^2 - 6r(R^2 + 2r^2)x + 12R^2 r^2 = 0. \quad (1).$$

Исследование. Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы x было действительно, положительно и $< 2r$. Условие действительности корней выражается неравенством

$$9r^2(R^2 + 2r^2)^2 - 12R^2 r^2(R^2 + 4r^2) \geq 0,$$

которое, по сокращении на положительное количество $3r^2$ и по упрощении дает

$$-R^4 - 4R^2 r^2 + 12r^4 \geq 0. \quad (2).$$

Положив $\frac{R}{r} = m$, находим, что m^2 должно заключаться между корнями уравнения

$$m^4 + 4m^2 - 12 = 0;$$

и как сверх того, $m^2 > 0$, так же как и m , находим, что должно быть

$$R \leq r\sqrt{2}. \quad (3).$$

При соблюдении этого условия, корни уравнения (1) действительны; и они и положительны, так как их произведение и сумма положительны. Чтобы узнать, как расположено количество $2r$ по отношению к корням, подставим в левую часть уравнения (1) $2r$ вместо x . Найдём в результате

$$4r^2(R^2 + 4r^2) - 12r^2(R^2 + 2r^2) + 12R^2 r^2, \text{ или } (R^2 - 2r^2)4r^2.$$

Но в силу неравенства (3) заключаем, что первый множитель этого произведения отрицателен, когда корни неравные; и обращается в нуль при равных корнях.

Этот крайний случай означает, что $2r$ есть величина действительных равных корней при условии $R = r\sqrt{2}$. При действительных же неравных корнях, $2r$ заключается между корнями, с. л., больший корень не соответствует вопросу, меньший дает ответ на вопрос: задача имеет 1 решение:

$$x = r \cdot \frac{3(R^2 + 2r^2) - \sqrt{3(12r^4 - 4R^2 r^2 - R^4)}}{R^2 + 4r^2}. \quad (4).$$

Исследование положенія сѣкущей плоскости относительно центра шара.
 Слѣдующую дѣлю опредѣлимъ такъ, принимаемый первую часть ур—ни (1) при замѣнѣ x количествомъ r . Находимъ

$$r^2(7R^2 - 8r^2);$$

слѣд., пока $7R^2 > 8r^2$, рѣшеніе (4) меньше r , и потому сѣкущая плоскость и тангенсъ лежатъ по одну сторону отъ центра, если $7R^2 = 8r^2 = 0$, то $r = r$ сѣкущая плоскость проходитъ черезъ центръ, наконецъ, когда $7R^2 < 8r^2$, сѣкущая плоскость проходитъ надъ центромъ.

Резюме исследования.

- | | | |
|----|---------------------------------|--|
| 1. | $R^2 > \frac{8}{7}r^2$. | Одно рѣшеніе; плоскость ниже центра. |
| 2. | $R^2 = \frac{8}{7}r^2$. | Одно рѣшеніе; плоскость проходитъ черезъ центръ. |
| 3. | $\frac{8}{7}r^2 > R^2 > 2r^2$. | Одно рѣшеніе; плоскость проходитъ выше центра. |
| 4. | $R^2 = 2r^2$. | Одно рѣшеніе; плоскость касательная. |
| 5. | $R^2 < 2r^2$. | Задача невозможна. |

Задача XII.

606. Зная радиусъ R шара и полную поверхность $2\pi m^2$ описаннаго въ него цилиндра, вычислить радиусъ основанія и высоту цилиндра.

Рѣшеніе. Обозначимъ буквою r радиусъ основанія а $2y$ — высоту цилиндра, ур—нія задачи будутъ

$$x^2 + 2xy = m^2 \dots (1) \quad x^2 + y^2 = R^2 \dots (2)$$

Изъ перваго имѣемъ:

$$y = \frac{m^2 - x^2}{2x} \dots (3)$$

а подставляя эту величину y въ ур—ніе (2), имѣемъ

$$5x^4 - 2(m^2 + 2R^2)x^2 + m^4 = 0 \dots (4)$$

откуда

$$x^2 = \frac{m^2 + 2R^2 \pm \sqrt{(m^2 + 2R^2)^2 - 5m^4}}{5} \dots (5).$$

Взявъ со знакомъ $+$ корни квадратные изъ второй части ур—ния (5), получимъ два значенія для x , а подставивъ ихъ въ формулу (3), найдемъ для каждого изъ нихъ соответствующее значеніе y .

Исследование. Чтобы значенія x и y , выведенныя изъ ур—ний (3) и (5), давали отвѣтъ на вопросъ, необходимый, чтобы они были действительны, то положительны и меньше R .

Чтобы значения x^2 были действительны, должно быть

$$m^2 + 2R^2 \geq 5m^4, \quad \text{или} \quad m^2 + 2R^2 \geq m^2 \sqrt{5},$$

или

$$m^2 < R^2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \dots (6).$$

Если это условие удовлетворено, величины x^2 будут действительны, если будут и положительны, ибо их сумма и произведение положительны. Поэтому каков-либо из значений x удовлетворяет задаче, каково бы ни было значение (3), чтобы оно было меньше m , для того чтобы соответствующее значение y само было положительным. Других условий нет, ибо как бы ни были действительны и положительны значения x и y удовлетворяют уравнению (2), в силу этого уже величины эти меньше R .

Теперь необходимо определить, сколько значений x^2 содержится между 0 и m^2 , а для этого подставим 0 и m^2 вместо x^2 в левую часть уравнения (4), как в квадратных относительно x^2 . Результат подстановки будет положительный результат подстановки m^2 есть $4m^2(m^2 - R^2)$, должно проследить за изменением m^2 от 0 до R^2 , и затем от R^2 до m (минимум m^2 , равного $R^2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$; так, образом, критические значения m^2 суть, 0, R^2 и $R^2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

I. $m^2 < R^2$. В этом случае $4m^2(m^2 - R^2) < 0$; следовательно, и только одно, отличное x^2 содержится между 0 и m^2 другое m^2 имеет вместо одного решение, а значение x , это значение, выражается меньшим корнем

$$x = \sqrt{\frac{m^2 + 2R^2 - \sqrt{m^2 + 2R^2 - 5m^4}}{5}}.$$

II. $m^2 = R^2$. Результат указанной подстановки обращается в нуль, а это значит, что одно из значений x есть m или R , соответствующее значение y равно нулю, квадрат обращается в двукратное сокращение, соответствующий с большим кругом шара. Что касается другого решения, то оно есть $x^2 = \frac{R^2}{5}$, откуда

$$x = \frac{R}{\sqrt{5}}, \quad \text{а} \quad y = \frac{2R}{\sqrt{5}};$$

это — цилиндр, подобный литру (мёрз жидкостей). Это другое значение x получаем, замечая, что произведение двух значений x^2 , в силу уравнения (4), равно $\frac{m^4}{5}$, или, в данном случае, $\frac{R^4}{5}$.

III. $R^2 = m^2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. В этом случае $4m^2(m^2 - R^2) = 0$, и след. или оба значения x^2 содержатся между 0 и m^2 , или оба больше m^2 ; но последнее предположение невозможно, ибо произведение обоих значений x^2 , т. е. $\frac{m^4}{5}$, меньше m^4 . заключаем, что тогда m^2 содержится между R^2 и $R^2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, всегда всегда иметь два решения.

IV. $m^2 < R^2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, т. е. m меньше величины R . Оба значения x^2 в

этомъ предѣльномъ случаѣ равны $\frac{m^2}{5} = 2R^2$, или, замѣняя m^2 ея величиною,

находимъ: $x^2 = R^2 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$, откуда

$$= R \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}, \quad 2y = 2R \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}};$$

полная же поверхность цилиндра $= 2\pi R^2 \cdot \frac{1.5 + 1}{2}$, т.-е. она равновелика боковой поверхности цилиндра, имѣющаго основаніемъ большой кругъ даннаго шара, а высотой сторону правильного звѣзднаго десятиугольника, вписаннаго въ этотъ кругъ.

Въ $m^2 > R^2 \cdot \frac{1.5 + 1}{2}$, для x получаются мнимыя значенія, слѣд., задача невозможна.

Если, теперь, назовемъ полную поверхность цилиндра буквою S и помножимъ на 2π предыдущія неравенства и равенства, можно все изслѣдованіе резюмировать слѣдующимъ образомъ.

Резюме изслѣдованія.

$S < 2\pi R^2$	задача имѣть	1 рѣшеніе.
$S = 2\pi R^2$	" "	2 рѣшенія.
$2\pi R^2 < S < \pi R^2(1.5 + 1)$	" "	2 "
$S = \pi R^2(\sqrt{5} + 1)$	" "	1 рѣшеніе.
$S > \pi R^2(\sqrt{5} + 1)$	" "	0 рѣшеній.

Примечаніе. Если въ ур—ніяхъ (1) и (2) перемѣнимъ y на $-y$, то легко видѣть, что ур—ніе (4) можно истолковать, полагая, что имѣето полной поверхности цилиндра дается разность между суммою его основаній и боковою поверхностью. Можно бы было повторить изслѣдованіе предыдущей задачи, называя рѣшеніями второго рода—рѣшенія, отвѣтующія измѣненной задачѣ.

Задача XIII.

607. Вычислить стороны прямоугольнаго треугольника, зная его периметръ $2p$ и сумму S катетовъ и высоты.

Рѣшеніе. Пусть будутъ x и y искомыя катеты, z гипотенуза, и u соответствующая высота. Ур—нія задачи будутъ:

$$x + y + z = 2p; \quad z \perp u \quad S; \quad x^2 + y^2 = z^2; \quad xy = uz.$$

Изъ перваго имѣемъ: $x^2 + y^2 + 2xy = (2p - z)^2 = 4p^2 - 4pz + z^2$, или, въ силу третьяго и четвертаго ур—ній: $uz = 2p^2 - 2pz$; но $u = S - z$, сл.

$$z(S - z) = 2p^2 - 2pz, \quad \text{или} \quad z^2 - (2p + S)z + 2p^2 = 0. \quad (1)$$

Найдя z , для опредѣленія x и y получимъ ур—нія

$$x - y = 2p - z \quad \text{и} \quad xy = (S - z) \cdot z,$$

откуда видно, что x и y суть корни ур—ния

$$X^2 - (2p - x)X + (S - x)x = 0 \dots (2)$$

Исследование. Чтобы корни ур—ния (1) были действительны, надо чтобы $(2p + S)^2 - 8p^2 \geq 0$, откуда

$$S \geq 2p(\sqrt{2} - 1).$$

Пусть это условие удовлетворено; тогда оба корня ур—ния (1) будут и положительны, ибо их произведение $(2p^2)$ и сумма $(2p + S)$ положительны. Но больший корень должен быть отброшен; въ самомъ дѣлѣ, высота h есть количество существенно положительное, а изъ ур—ния $h = S - x$ видно, что для того, чтобы было $h > 0$, необходимо, чтобы было $x < S$; но больший корень больше полусуммы корней, равной $p + \frac{S}{2}$, а само количество $p + \frac{S}{2}$ больше S , ибо для возможности треугольника, очевидно, необходимо, чтобы было $p < \frac{S}{2}$. Что касается меньшаго корня, то онъ будетъ меньше S , если результатъ подстановки S вмѣсто x въ первую часть ур—ния (1) отрицателенъ, что приводитъ къ неравенству

$$-2Sp + 2p^2 < 0 \text{ или } S > p.$$

Какъ скоро это условие удовлетворено, то будетъ удовлетворено и условие действительности корней, ибо

$$p > 2p(\sqrt{2} - 1), \text{ или } 3 > 2\sqrt{2}, \text{ или } 9 > 8$$

Итакъ, для x получается одно значеніе:

$$x' = \frac{2p + S - 1(2p + S)^2 - 8p^2}{2}.$$

съ условіемъ: $p < S < 2p$.

Условіе действительности корней ур—ния (2) есть

$$(2p - x')^2 - 4(S - x')x' > 0, \text{ или } 5x'^2 - 4x'(p + S) + 4p^2 > 0$$

или, въ силу равенства (1),

$$5x(2p + S) - 10p^2 - 4x(p + S) + 4p^2 > 0, \text{ или } 6px - 2x^2 - 6p^2 > 0,$$

откуда

$$x < \frac{6p^2}{6p + S}.$$

Итакъ, чтобы x и y были действительны, необходимо, чтобы $\frac{6p^2}{6p + S}$ было меньше меньшаго корня ур. (1), для этого же необходимо 1, чтобы результатъ подстановки $\frac{6p^2}{6p + S}$ вмѣсто x въ первую часть ур. (1) былъ < 0 ; и 2) чтобы при этомъ $\frac{6p^2}{6p + S}$ было $<$ полусуммы корней, т.е. чтобы было $\frac{6p^2}{6p + S} < \frac{2p + S}{2}$.

Подстановка даетъ:

$$36p^4 - 6p^2(6p + S)(2p + S) + 2p^2(6p + S)^2 - 36p^4 - 24Sp^3 - 4S^2p^2 - \\ = 4p^2(9p^2 - 6Sp - S^2),$$

этотъ результатъ долженъ быть > 0 . Замѣтимъ, что $\frac{6p^2}{6p + S}$ въ самомъ дѣлѣ

$\sqrt{2p+S}$, заключаемъ, что для действительности x и y должно быть удовлетво-
рено неравенство

$$-S^2 - 6Sp + 9p^2 > 0$$

вместѣ съ условіемъ $p < S < 2p$.

Откуда находимъ, что при $S < 3p + 2 = 1$ корни x и y будутъ действитель-
ны; считая, что $S < p$ и $S > p$, находимъ, что сумма $x + y$ равна $2p - S$,
и произведеіе xy равно $(S - p)^2$, значителы, слѣд., x и y положительны.
Итакъ, условія возможности задачи таковы:

$$p < S < 2p, \quad S \leq 3p(\sqrt{2} - 1).$$

По $3p + 2 = 1 = 2p$, т. е. это неравенство эквивалентно $18 < 27$; слѣдов.,
условія, не необходимые и достаточныя для возможности задачи, приводятся къ

$$p < S \leq 3p(\sqrt{2} - 1),$$

причемъ задача имѣетъ одно рѣшеніе.

Откуда, между прочимъ, заключаемъ, что максимумъ $S = 3p(\sqrt{2} - 1)$; при этомъ
 x и y т. е. всѣхъ прямоугольных треугольниковъ одинаковаго периметра
рѣшбренныхъ имѣетъ наибольшую сумму катетовъ съ соответствующаго
высотой.

Задача XIV.

608. Найти изъ данныхъ по окружъ прямоугольнѣ, зная сумму p его осно-
ванія и высоты.

Рѣшеніе. Пусть будутъ: R — радиусъ описанаго круга, $2x$ — основаніе и y —
высота искомага прямоугольнѣ, имѣемъ непосредственно ур—вія:

$$y = 2x - p, \quad \dots (1) \quad x^2 - y^2 = R^2, \quad \dots (2).$$

Рѣшая первое относительно y , имѣемъ:

$$y = p - 2x, \quad \dots (3)$$

Подставляя это выраженіе y въ ур—віе (2), находимъ

$$5x^2 - 4px + p^2 - R^2 = 0, \quad \dots (4)$$

откуда

$$x = \frac{2p \pm \sqrt{5R^2 - p^2}}{5}, \quad \dots (5).$$

Затѣмъ y вычисляется по формулѣ (3).

Исследование. Въ этой задачѣ будемъ разсматривать и отрицательныя
значенія x и y . Когда x и y будутъ положительны, будемъ называть рѣшеніе —
рѣшеніемъ первого рода; но будетъ второе рѣшеніе, если при $x = 0$ будетъ $y = 0$,
т. е. когда дана будетъ разность между высотой и основаніемъ; наконецъ, рѣше-
ніемъ третяго рода называемъ то, когда $x = 0$, а $y = 0$, т. е. когда дана раз-
ность между основаніемъ и высотой.

Условіе действительности x выражается неравенствомъ

$$p < R\sqrt{5}.$$

Затѣмъ, изъ ур—вія (4) видимъ, что оба выраженія x будутъ положительны,
или одно положительны, а другое отрицательны, смотря по тому, будетъ ли p

больше, или меньше R . С другой стороны, из формулы (3) заключаем, что положительному x будет соответствовать положительный y , когда $x < \frac{p}{2}$, и отрицательный y , когда $x > \frac{p}{2}$. В таком случае, нужно знать результат подстановки $\frac{p}{2}$ вместо x в первую часть уравнения (4). Этот результат $\frac{p^2 - 4R^2}{4}$;

след. надо различать три случая: $p < 2R$, $p = 2R$, $p > 2R$ (последний случай возможен, ибо $2R$ меньше $R\sqrt{5}$).

Итак, количества, подлежащая рассмотрению, в порядке возрастания величин, таковы: R , $2R$, $R\sqrt{5}$; мы должны иметь p от 0 до R , от R до $2R$, и наконец от $2R$ до $R\sqrt{5}$.

I. $p < R$. Произведение корней уравнения (4) отрицательно, след. одно значение x положительное, другое отрицательное. Отрицательное значение x соответствует положительное значение y ; след. всегда имеем решение 2-го рода. Положительное значение x больше $\frac{p}{2}$, в самом деле, p будучи меньше R , меньше и $2R$, след. количество $\frac{p^2 - 4R^2}{4}$ отрицательно. Отсюда следует, что $\frac{p}{2}$ заключается

между корнями уравнения (4) и потому положительный корень должен быть $> \frac{p}{2}$. Таким образом, положительному x соответствует, из уравнения (3), отрицательное значение y . След. имеем решение 1-го рода. Итак, при $p < R$ имеем всего два решения: одно 2-го рода, другое 1-го рода.

II. $p = R$. В этом случае

$$x = 0, y = R, \quad x = \frac{4}{5}R, y = \frac{3}{5}R$$

Первое решение можем рассматривать, как решение 1-го или 2-го рода, второе — решение 1-го рода. Этот случай относится к первому, но что можно отнести и к следующему.

III. $R < p < 2R$. Оба корня уравнения (4) положительны, но как $\frac{p^2 - 4R^2}{4}$ отрицательно, один из корней меньше, другой больше $\frac{p}{2}$. Первому соответствует положительное значение y , второму — отрицательное. Итак, одно решение относится к 1-му роду, другое к 3-му.

IV. $p = 2R$. Оба значения x положительны, но количество $\frac{p^2 - 4R^2}{4}$ обращается в нуль, след. одно значение x равно $\frac{p}{2}$ или R , а соответствующее значение y равно нулю. Другое значение x , $\frac{3}{10}p$ или $\frac{3}{5}R$ найдем, вычитая $\frac{p}{2}$ из суммы корней $\frac{4}{5}p$, а для соответствующаго значения y находим $\frac{4}{5}R$. Итак, имеем два решения, из которых первое (считая 1-го рода, между тем как первое можно отнести, по произволу, и к 1-му или к 3-му роду).

V. $2R < p < R\sqrt{5}$. В этом случае оба значения x положительны, и оба меньше $\frac{p}{2}$. В самом деле сумма корней, равная $\frac{4}{5}p$ меньше p след. оба корня не могут быть больше $\frac{p}{2}$, и как количество $\frac{p^2 - 4R^2}{4}$ положительно, они necessarily меньше $\frac{p}{2}$. В таком случае положительным значениям x соответствуют и положительные y -ы, имеем два решения 1-го рода.

VI. $p = R\sqrt{5}$. Имеем двойное решение 1-го рода.

Нельзя брать $p > R\sqrt{5}$, ибо тогда оба значения x даются мнимыми и задача невозможна.

Резюме исследования.

Изменения p .	Число решений:		
	1-го рода;	2-го рода;	3-го рода.
$p < R$	0	1	1
$p = R$	0	1	1
$R < p < 2R$	1	0	1
$p = 2R$	1	0	1
$2R < p < R\sqrt{5}$	2	0	0
$p = R\sqrt{5}$	1	0	0
$p > R\sqrt{5}$	0	0	0

Задача XV.

609. Вычислить стороны прямоугольного треугольника, зная его периметр $2p$, если известно, что сумма объемов образованных треугольником при обращении его поочередно около каждого катета, равновесна полушару радиуса R .

Решение: Пусть будут x и y — катеты, z — гипотенуза; непосредственно имеем 3 ур-ния:

$$x + y + z = 2p; \quad xy(x + y) = 2R^3; \quad x^2 + y^2 = z^2$$

Легко исключить или отвлечь ур-ний x и y ; для этого выражаем из 1-го и 2-го $x + y$ и xy через z ; имеем

$$x + y = 2p - z, \quad xy = \frac{2R^3}{2p - z}.$$

Отсюда имеем:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (2p - z)^2 - \frac{4R^3}{2p - z}.$$

Вставляя это выражение $x^2 + y^2$ в третье ур-ние системы, находим

$$z^2 = (2p - z)^2 - \frac{4R^3}{2p - z},$$

или

$$pz^2 - 3p^2z + 2p^3 - R^3 = 0 \dots (1).$$

Итак, для определения z имеем ур-ние (1), квадратное относительно z . Определив z , можем вычислить x и y , в самом деле, зная, что сумма $x + y = 2p - z$, а произведение $xy = \frac{2R^3}{2p - z}$, найдем эти неизвестные из ур-ния

$$X^2 - (2p - z)X + \frac{2R^3}{2p - z} = 0 \dots (2).$$

Исследование. Чтобы система определенных таким образом величин x , y и z отвечала задаче, необходимо и достаточно, чтобы эти величины были действительны и положительны.

Чтобы корни уравнения (2) были действительны, необходимо, чтобы

$$(2p - z)^2 \geq \frac{8R^2}{(2p - z)^2};$$

а чтобы они были положительны, необходимо, чтобы было

$$2p - z > 0, \text{ или } z < 2p.$$

Пусть это последнее условие удовлетворено; въ такомъ случаѣ, умноживъ обѣ части предыдущаго неравенства на положительное количество $2p - z$, имѣемъ, $(2p - z)^3 \geq 8R^2$, или, извлекая изъ обѣихъ частей кубическій корень, имѣемъ $2p - z \geq 2R$, или $z \leq 2(p - R)$, и какъ z должно быть положительнымъ, необходимо, чтобы

$$0 < z \leq 2(p - R),$$

а это предполагаетъ, чтобы было $p > R$. Какъ скоро z меньше или равно $2(p - R)$, оно и надвинуто будетъ меньше $2p$, и условие $z < 2p$ будетъ удовлетворено. Итакъ, число рѣшеній задачи равно числу корней уравненія (1), удовлетворяющихъ условіямъ

$$0 < z \leq 2(p - R).$$

Не трудно убѣдиться, что корни уравненія (1) всегда действительны, вѣ какъ предполагается $R < p$, то они и положительны. Отчетъ изслѣдовать, сколько этихъ корней заключаются между 0 и $2(p - R)$. Для этого нужно знать величины первой части уравненія (1) при $z = 0$ и $z = 2(p - R)$. При $z = 0$, она дается $2p^3 - R^3$ — величиною положительною. Подстановка $2(p - R)$ вмѣсто z даетъ

$$-R(R^2 - 4pR + 2p^2), \text{ или } -R\{R - p(2 - \sqrt{2})\}[R - p(2 + \sqrt{2})].$$

Но мы видѣли, что R должно быть $< p$, слѣд., 3-й множитель < 0 , 1-й также < 0 , слѣд. все зависитъ отъ знака $R - p(2 - \sqrt{2})$.

Итакъ, нужно рассмотреть три случая:

$$0 < R < p(2 - \sqrt{2}), \quad p(2 - \sqrt{2}) < R < p, \quad R > p.$$

I. Пусть $0 < R < p(2 - \sqrt{2})$. Въ такомъ случаѣ результатъ подстановки въ z выраженія $2(p - R)$ отрицателенъ, а потому одинъ изъ корней уравненія (1) заключается между 0 и $2(p - R)$, другой корень больше $2(p - R)$. Первый корень даетъ искомое рѣшеніе, второй не соответствуетъ вопросу: задача имѣетъ ли рѣшеніе. Это рѣшеніе мы получимъ, взявъ для z меншии корень уравненія (1), а для x и y корни уравненія (2), когда въ немъ y замѣнимъ меншиимъ корнемъ уравненія (1).

II. Когда $p(2 - \sqrt{2}) < R < p$, то при $z = 2(p - R)$ триномъ положителенъ, и слѣд. или оба корня уравненія (1) заключаются между 0 и $2(p - R)$, или оба больше $2(p - R)$. Чтобы оба корня содержались между 0 и $2(p - R)$, нужно, чтобы ихъ полусумма $\frac{3}{2}p$ была $< 2(p - R)$, т.-е. чтобы $3p < 4(p - R)$, или

$R < \frac{p}{4}$, условіе, несогласное съ положеніемъ $R > p(2 - \sqrt{2})$. Итакъ, въ данномъ случаѣ оба корня уравненія (1) больше $2(p - R)$, и ни тотъ, ни другой не даютъ рѣшенія.

III. Если $R > p$, то уже видѣли, что въ такомъ случаѣ задача невозможна.

Резюме изслѣдованія.

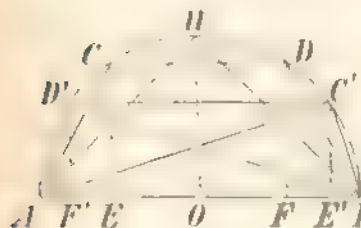
1. $R < p(2 - \sqrt{2})$: Задача имѣетъ 1 рѣш.
[x — меньшему корню ур—нія (1)].
2. $R = p(2 - \sqrt{2})$: Задача имѣетъ 1 рѣш.
[$x = 2(p - R)$, треугольникъ равнобедренный].
3. $R > p(2 - \sqrt{2})$: Задача невозможна.

Задача XVI.

610. Въ данномъ полуокружьи диаметра $AB = 2R$ описать дугу CD , перпендикулярно AB , такъ чтобы $AC^2 + DB^2 = m^2$, въ т. данная линія.

Рѣшеніе. Приложимъ къ величине AC^2 x , выразимъ CD въ зависимости отъ R и x . По $CD = 2R - 2AE$ и $AC^2 = 2R \times AE$, слѣд. $CD = 2R - \frac{x^2}{R}$. Ур—ніе будетъ

$$2x^2 - \left(2R - \frac{x^2}{R}\right)^2 = m^2. \quad (1)$$



Черт. 98.

Это ур—ніе, выведенное для одного случая, приложимо ко всѣмъ случаямъ. И самомъ дѣлѣ, пусть хорда CD приняла положеніе $C'D'$, въ которомъ точки C' и D' лежатъ въ другихъ четвертяхъ; обозначая, какъ и прежде, прямую AC' буквою x , будемъ имѣть: $C'D' = 2AE' = 2R$; а какъ $AE' \times 2R = AC'^2$, то $C'D' = \frac{x^2}{R} - 2R$; ур—ніе будетъ въ этомъ случаѣ

$$2x^2 + \left(\frac{x^2}{R} - 2R\right)^2 = m^2;$$

оно тождественно съ (1). Даемъ ему видъ

$$x^4 - 2Rx^2 + R^2(4R^2 - m^2) = 0. \quad (2).$$

Исслѣдованіе. Для изслѣдованія и рѣшенія этого биквадратнаго ур—ненія подставимъ

$$x^2 = y. \quad (3),$$

такъ что ур—ніе будетъ

$$y^2 - 2Ry + R^2(4R^2 - m^2) = 0. \quad (4).$$

Для того, чтобы корни ур—нія (2) служили отвѣтомъ на предложенную задачу, необходимо и достаточно, чтобы было

$$x \text{ дѣлится, } x > 0, \quad x < 2R. \quad (5).$$

Но для получения корней ур—нія (2) нужно рѣшить (4) и найденные корни внести поочередно въ (3); слѣдств. увидимъ, что x будетъ дѣлится, если y будетъ дѣлится и положительно, потому нужно изслѣдовать, съ этой точки рѣши ур—нія (4).

Условие действительности корней ур. въ y . — Оно будетъ $R^2 - R^2(4R^2 - m^2) > 0$ или $m^2 > 3R^2$.

Знаки корней. Произведение корней $= R^2(4R^2 - m^2)$; оно > 0 , когда $m^2 < 4R^2$; равно 0 при $m^2 = 4R^2$, и < 0 когда $m^2 > 4R^2$.

Сумма корней $= 2R^2$ и слѣд. всегда положительна.

Величина корней. — x должно быть $< 2R$, слѣд. y должно быть $< 4R^2$. Поставляя $4R^2$ вмѣсто y въ триномъ (4), имѣемъ

$$f(4R^2) = 16R^4 - 2R^2 \cdot 4R^2 + R^2(4R^2 - m^2) = R^2(12R^2 - m^2).$$

Отсюда видно, что если $m^2 < 12R^2$, будетъ $f(4R^2) > 0$; при $m^2 = 12R^2$, $f(4R^2) = 0$; при $m^2 > 12R^2$ будетъ $f(4R^2) < 0$.

Такимъ образомъ, критическія значенія m^2 будутъ:

$$3R^2, 4R^2, 12R^2 \text{ и } +\infty,$$

и легко составить нижеслѣдующую таблицу знаковъ.

Скала значений m^2 .	0	$3R^2$	$4R^2$	$12R^2$	\sim
Знакъ реализанта	—	0	+	+	+
Произведение корней	—	—	—	—	—
Сумма корней	—	—	+	+	+
$f(4R^2)$	+	+	+	—	—
1-й коэффициентъ.	—	—	—	—	—

изъ которой заключаемъ:

1. $m^2 < 3R^2$. Корни ур—ния (4) мнимые, слѣд. мнимы и корни (2). Задача невозможна.

2. $m^2 = 3R^2$. Это значеніе есть minimum (m^2); реализантъ $= 0$, корни ур (4) действительные равные, ихъ общія величина $= R^2$; слѣд. ур—ние (2) имѣетъ два корня равныхъ $= R$, и два корня равныхъ $= R$. Пять изъ нихъ удовлетворяетъ $x = +R$, какъ выше, и меншее $2R$ значеніе x —са. Искомая фигура — *правильный полушестиугольникъ*.

Слѣдуетъ замѣтить, что сумма трехъ квадратовъ, равная въ данномъ случаѣ $3R^2$, представляетъ minimum, ибо m^2 вообще больше $3R^2$, но дѣлается $= 3R^2$ при $x = R$. Слѣд. сумма квадратовъ трехъ реализованныхъ корней имѣетъ minimum $= 3R^2$, когда фигура, или образъ ея, есть *правильный полушестиугольникъ*.

3. $3R^2 < m^2 < 4R^2$. Действительные корни ур. (4) въ этомъ случаѣ положительны, ибо ихъ сумма и произведение > 0 ; слѣд. всѣ 4 корня ур—ния (2) действительны, и потому оно имѣетъ 2 положительныхъ корня (дольше, чѣмъ $f(4R^2)$, очевидно, съ знакомъ 1-го коэффициента, слѣд. $4R^2$ — вѣд. корней y ; а какъ полагая корни $= R^2$, то расположе чіе чіе таково

$$y' = \dots = 4R^2,$$

след. каждая из двух положительных корней уравнения (2) меньше $2R$, и задача имеет два решения

$$x = \sqrt{R^2 \pm R\sqrt{m^2 - 3R^2}}.$$

4. $m^2 = 4R^2$. При переходе через $4R^2$, произведение корней уравнения (4) принимает знак, след. при $m^2 = 4R^2$ оно обращается в нуль: поэтому одно значение y равно нулю, а другое сумма корней, т. е. $2R$; значит, два корня уравнения (2) равны нулю, а два равны $+R \pm 2$, т. е. задача имеет 2 решения

$$x = 0, \quad x' = +R \pm 2;$$

первое дает диаметр $2R$, второе — полупериметр вписанного квадрата $АНВ$

5. $4R^2 < m^2 < 12R^2$. Произведение действительных корней (4) отрицательно, след. одно решение y меньше, другое больше 0. Первое дает два мнимых значения x , второе — два действительных. Так как сумма корней = 0, то отсюда положительный корень имеет большую абсолютную величину. Нужно сравнить это с $4R^2$, $f(4R^2)$ имеет знак 1 то к коэффициенту, след. $4R^2$ — вых корней (y). Подсумма корней $= R^2$, расположение чисел таково

$$y \dots y' \dots 4R^2,$$

следовательно $y' < 4R^2$, и потому $(\frac{1}{2})$ -й корень уравнения (2) дает ответ на задачу, которая т. о. имеет одно решение

$$x = \sqrt{R^2 + R\sqrt{m^2 - 3R^2}}.$$

6. $m^2 = 12R^2$. В этом случае таблица показывает, что $f(4R^2) = 0$, след. положительный корень уравнения (4) равен $4R^2$, а след.

$$x = 2R.$$

Это — предельный случай задачи, контур, квадраты сторон которого дают в сумме $12R^2$, есть $АВАН$.

7. При $m^2 > 12R^2$, произведение корней отрицательно, а сумма положительна, след. один корень уравнения (4) < 0 , другой > 0 , и абсолютная величина положительного корня больше; $f(4R^2)$ отрицательна, т. е. имеет знак, противоположный 1-му коэффициенту, след. $4R^2$ находится между корнями, и расположение чисел таково:

$$y' \dots 4R^2 \dots y,$$

значит $y > 4R^2$, а потому $x > 2R$, и задача невозможна. Итак: *максимум* суммы трех квадратов $= 12R^2$.

Резюме исследования.

$m^2 < 3R^2$:	корни мнимые	0 решений
$m^2 = 3R^2$:	правильный $\frac{1}{2}$ шестиугольник, мин. (m^2)	1 решение
$m^2 > 3R^2$	$\left\{ \begin{array}{l} m^2 < 4R^2 \\ m^2 = 4R^2: \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \quad x' = R \pm 2. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \dots 2 \text{ решения} \\ \dots \dots \dots 2 \text{ решения} \end{array} \right.$
	$\left\{ \begin{array}{l} m^2 < 12R^2: \\ m^2 > 4R^2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ мним.; } 0 \quad x' = 2R. \\ m^2 = 12R^2: x' \text{ миним.; } x'' = 2R. \\ m^2 > 12R^2: x' \text{ миним.; } x'' > 2R. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \dots 1 \text{ решение} \\ \dots \dots \dots 1 \text{ решение} \\ \dots \dots \dots 0 \text{ решений} \end{array} \right.$

611 Исследование суммы трех квадратов.— Для суммы m^2 трех квадратов мы имеем (2) выражение:

$$m^2 = \frac{1}{R^2} [x^4 - 2R^2x^2 + 4R^4],$$

представляющее биквадратный трином, который исследовать мы будем при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$; след. мы можем проследить его изменение при изменении x от 0 до $2R$, как требует геометрический вопрос, и этим путем найдем в более сжатой форме результаты предыдущего исследования. Для этого представим m^2 в вид:

$$m^2 = \frac{1}{R^2} [x^2 - R^2]^2 + 3R^2.$$

Отсюда прямо видно, что когда x возрастает от 0 до R , $x^2 - R^2$ уменьшается от R^2 до 0, а след. m^2 уменьшается от $4R^2$ до $3R^2$; при дальнейшем возрастании x от R до $2R$, $x^2 - R^2$ возрастает от 0 до R^2 , и след. m^2 увеличивается от $3R^2$ до $4R^2$; иначе говоря, m^2 проходит через минимум $3R^2$, когда $x = R$.

Эти результаты резюмированы в следующей таблице:

x	0	...	R	...	$R\sqrt{2}$...	$2R$
m^2	$4R^2$...	$3R^2$...	$4R^2$...	$4R^2$

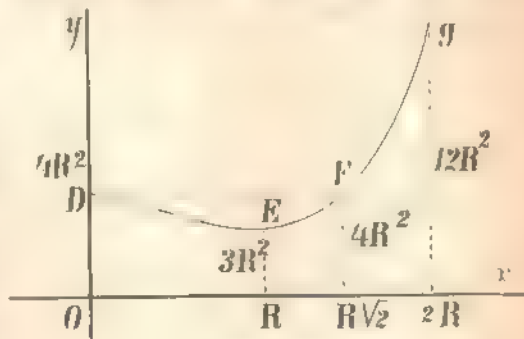
Величина m^2 изменяется, уменьшаясь от $4R^2$ до $3R^2$, затем увеличивается до $4R^2$, след. она принимает два равных значения, заключающихся между $3R^2$ и $4R^2$, раз: при x , содержащемся между 0 и R , другой раз при x , лежащем между R и $R\sqrt{2}$; и один раз великое значение, заключающееся между $4R^2$ и $12R^2$. Это значит, что задача не имеет решения, когда данное m^2 меньше $3R^2$, или больше $12R^2$, что она имеет 1 решение, когда m^2 содержится между $12R^2$ и $4R^2$, и имеет 2 решения, когда m^2 заключается между $4R^2$ и $3R^2$. Это результаты предыдущего исследования, но представленные в сжатой форме.

Изобразим графически изменения m^2 , представив величины x прямыми, откладываемыми на ось Ox от точки O , а величины m^2 нанесен на перпендикуляр параллельные Oy . Таким образом получим кривую DEFG, изображающую изменения m^2 .

На ней видно, что:

1) Для определения величины m^2 , соответствующей данному значению x , достаточно нанести x на ось Ox от точки O , и взять ординату кривой, соответствующую полученной точке.

2) Чтобы найти величину x , соответствующую данной величине m^2 , достаточно пересечь кривую параллелью к Ox , отстоящую от Ox на m^2 , и взять абсциссы точек пересечения кривой с параллелью.

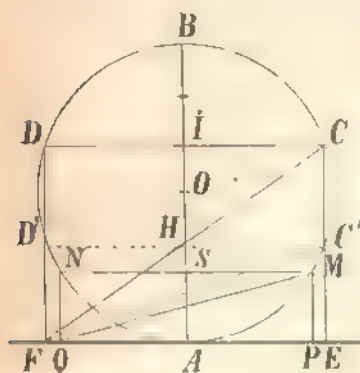


Черт. 99.

Таким образом легко видеть, что задача не имеет решений, когда m^2 меньше $3R^2$, или больше $12R^2$, что получается две точки решения, след. т. две решения, когда m^2 содержится между $3R^2$ и $4R^2$ и одна точка решения, или только одно решение, когда m^2 содержится между $4R^2$ и $12R^2$.

Задача XVII.

612. Дана окружность O и к ней касательная в точке A . Провести хорду MN параллельно этой касательной так, чтобы прямоугольник $MN'Q$ имел диагональ MQ данной длины m .



Черт. 100.

Решение. Примем за неизвестное расстояние $AS = x$ искомой хорды от касательной, и замѣтимъ, что это неизвестное можетъ имѣть только величину положительную, не большую $2R$.

Изъ прямоугольнаго треугольника MQP находимъ: $MQ^2 = MP^2 + PQ^2$.

Но

$$PQ^2 = 4MS^2 = 4 \times SA \times SB = 4x(2R - x);$$

подстановка даетъ

$$x^2 + 4x(2R - x) = m^2.$$

Это уравнение совершенно общео, ибо выражение для PQ^2 остается одинаковымъ, каково бы ни было положение хорды MN . Итакъ, ур—ніе задачи будетъ

$$3x^2 - 8Rx + m^2 = 0. \dots (1)$$

Исследование. Чтобы корень этого ур—нія давалъ рѣшеніе геометрическаго вопроса, необходимо и достаточно, чтобы онъ былъ действителенъ, положительнъ и не больше $2R$.

Условіе действительности корней ур—нія (1) выражается неравенствомъ

$$16R^2 - 3m^2 \geq 0, \text{ или } m^2 - \frac{16R^2}{3} \leq 0. \dots (2).$$

Корни этого неполнаго квадратнаго тринома суть: $\pm \frac{4R\sqrt{3}}{3}$, слѣд., чтобы удовлетворить неравенству (2), необходимо и достаточно дать m значение внутри интервала

$$\text{между } -\frac{4R\sqrt{3}}{3} \text{ и } +\frac{4R\sqrt{3}}{3};$$

но какъ въ данномъ вопросѣ m положительно, то необходимо и достаточно, чтобы было $m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$.

Знаки корней. Произведение и сумма корней ур. (1) положительны, слѣд. корни всегда положительны.

Величина корней. Нужно опредѣлить, какъ расположены корни относительно $2R$, а для этого въ первую часть ур. (1) подставить $2R$ вмѣсто x ; найдемъ

$$f(2R) = 3 \cdot (2R)^2 - 8R \cdot 2R + m^2 = m^2 - 4R^2 = (m + 2R)(m - 2R),$$

отсюда видно, что $f(2R) > 0$, если $m > 2R$, и $f(2R) < 0$, если $m < 2R$.

Такимъ образомъ, критическія значенія m суть

$$0, 2R, \frac{4R\sqrt{3}}{3} \text{ и } +\infty,$$

и въ изслѣдованіи легко ориентироваться при помощи слѣдующей таблицы знаковъ:

Скала значений m	0	$2R$	$\frac{4R}{3}$	$+\infty$
Знакъ реализ.	+	+	+	+
Проникновеніе корней	+	+	-	-
Сумма корней	+	+	-	-
$f(2R)$	+	+	-	-
1-й коэффци.	+	+	-	-

Изслѣдуемъ каждый интервалъ.

1) $m = 2R$. Оба корня действительны и положительны; $f(2R)$ имѣетъ знакъ, противоположный 1-му коэффиценту, слѣд. $2R$ лежитъ между корнями

$$0 \dots x' \dots 2R \dots x''$$

Только меньшій корень x' меньше $2R$; слѣд. задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

$$x' = \frac{4R - \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3}$$

2) $m = 2R$. Такъ какъ при этомъ значеніи m первая часть уравненія обращается въ нуль, то $2R$ есть корень уравненія, другой корень котораго $\frac{8R}{3} - 2R = \frac{2}{3}R$. Первый корень даетъ прямоугольникъ, сливающийся съ диаметромъ AB ; второй отвѣчаетъ хордѣ, расположенной на $\frac{1}{3}R$ ниже центра.

3) $2R < m < \frac{4R}{3}$. Оба корня действительны и положительны; знакъ $f(2R)$ одинаковъ съ 1-мъ коэффицентомъ, сл. $2R$ лежитъ вне корней, полусумма которыхъ $= \frac{4}{3}R$; такъ какъ $2R < \frac{4}{3}R$, слѣд. $2R$ больше большаго корня, и потому

$$0 \dots x' \dots x'' \dots 2R,$$

оба корня допустимы, и задача имѣетъ 2 рѣшенія:

$$x' = \frac{4R - \sqrt{16R^2 - m^2}}{3}, \quad x'' = \frac{4R + \sqrt{16R^2 - m^2}}{3},$$

дающія двѣ точки, равноотстоящія отъ точки I , опредѣляемой отрезкомъ $AI = \frac{4}{3}R$.

4) $m > \frac{4R}{3}$, уравненіе имѣетъ два равныхъ корня: $x' = x'' = \frac{4}{3}R - AI$, а задача—1 рѣшеніе. При этомъ, длина диагонали достигаетъ максимумъ $\frac{4}{3}$ стороны правильного вписаннаго въ данный кругъ треугольника.

5) $m = \frac{4R+3}{3}$. Реальная отрицательна, сл. корни ур. для миним. в задаче невозможны.

Примечание В случае $2R < m = \frac{4R+3}{3}$ можно искать, какимъ образом параллели къ касательной расположены относительно центра. Для этого надо составить $f(R)$; найдемъ:

$$f(R) = m^2 - 5R^2,$$

количество положительное, когда $m > R\sqrt{5}$; равное нулю при $m = R\sqrt{5}$, и отрицательное для $m < R\sqrt{5}$. Замечая, что въ рассматриваемомъ случае m содержится между $2R$ и $\frac{4R+3}{3}$, имеем критическими значениями m

$$2R, R\sqrt{5}, \frac{4R\sqrt{3}}{3}.$$

а) $2R < m < R\sqrt{5}$, $f(R)$ отрицательна, сл. R находится между корнями, и потому рассматриваемыя параллели расположены по обѣ стороны центра.

б) $m = R\sqrt{5}$; $f(R) = 0$, т. е. R совпадаетъ корнемъ, и сл. одна параллель проходить черезъ центръ. Другой корень $\frac{4R+3}{3}$, сл. другая параллель проходитъ надъ центромъ, въ расстоянии отъ него равномъ $\frac{2}{3}R$.

в) Если $R\sqrt{5} < m = \frac{4R+3}{3}$, то $f(R) > 0$, и слѣд. R находится вне корня; и какъ R меньше ихъ полусуммы $\frac{4}{3}R$, то порядокъ величинъ таковъ:

$$0 \dots R \dots x' \dots x'' \dots 2R,$$

т. е. обѣ параллели проходятъ надъ центромъ, между 0 и R .

Р е з ю м е.

1. $m < 2R$: 1 рѣшеніе—меньшій корень, $x' = \frac{1R + 16R^2 - 3m^2}{3}$.
2. $m = 2R$: 2 рѣшенія: $x' = \frac{2}{3}R$, $x'' = 2R$.
3. $2R < m < \frac{4R+3}{3}$: 2 рѣшенія.
4. (max.) $m = \frac{4R+3}{3}$: 2 сливающиеся рѣшенія, $x' = x'' = \frac{1}{3}R$.
5. $m = \frac{4R+3}{3}$: корни мнимые, задача невозможна.

613. Прямое изслѣдованіе длины діагонали.—Ур. (1) часть

$$m^2 = -3x^2 + 8Rx \dots (3).$$

Вторая часть есть квадратный триномъ, измѣненія котораго мы имеемъ, умноживъ. Намъ нужно прослѣдить его измѣненія, когда x увеличивается отъ 0 до

$2R$ и затым пять от полученных величинъ арифметич. квадратный корни. Для изложеннаго удобнѣе m^2 написать въ видѣ:

$$m^2 = 3 \left[x^2 - \frac{8}{3} R x \right], \text{ или } m^2 = 3 \left[x - \frac{4}{3} R \right]^2 - \frac{16}{9} R^2.$$

Отсюда видно, что когда x возрастаетъ отъ нуля до $\frac{4}{3}R$, количество m^2 возрастаетъ отъ нуля до $\frac{16}{9}R^2$; затымъ, когда x увеличивается отъ $\frac{4}{3}R$ до $2R$, m^2 уменьшается до $4R^2$. Итакъ, имѣемъ таблицу измѣненій:

x	0	...	$\frac{2}{3}R$...	$\frac{4}{3}R$...	$2R$
m^2	0	...	$4R^2$...	$\frac{16}{9}R^2$...	$4R^2$
m	0	...	$2R$...	$\frac{4R\sqrt{3}}{3}$...	$2R$

Отсюда непосредственно видно, что когда хорда MN перемѣщается отъ A къ B , длина диагонали MQ возрастаетъ до того момента, когда MN проходитъ черезъ I , для котораго $AI = \frac{4}{3}R$. Затымъ длина диагонали уменьшается до $2R$, когда хорда движется къ B .

Для яснѣе принимать одинъ разъ всякую длину, содержащуюся между 0 и $2R$, когда точка S перемѣщается отъ A къ B ; напротивъ, она принимаетъ два разъ всякую величину, содержащуюся между $2R$ и $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$ — одинъ разъ, когда точка S перемѣщается отъ B къ I , и другой разъ, когда точка S приближается отъ B къ A ; эти два изложенія хорды симметричны относительно AI , ибо триномъ m^2 брать равныя величины при $x = \frac{4}{3}R \pm y$. Такимъ образомъ, находимъ всѣ результаты прежняго изслѣданія.

Чтобы графически представить измѣненія m при измѣненіи x отъ 0 до $2R$, откладываемъ x на оси Ox , а соответствующія значенія m на оси Oy . Напр., взявъ

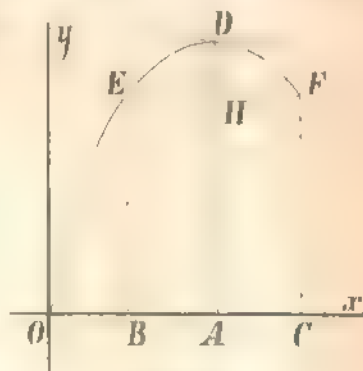
$$OA = \frac{4}{3}R \text{ и } AB = AC = \frac{2}{3}R,$$

наносимъ на ординатѣ точки A

$$AD = \frac{4R\sqrt{3}}{3},$$

на ординатахъ точекъ B и C :

$$BE = CF = 2R.$$



Черт. 101.

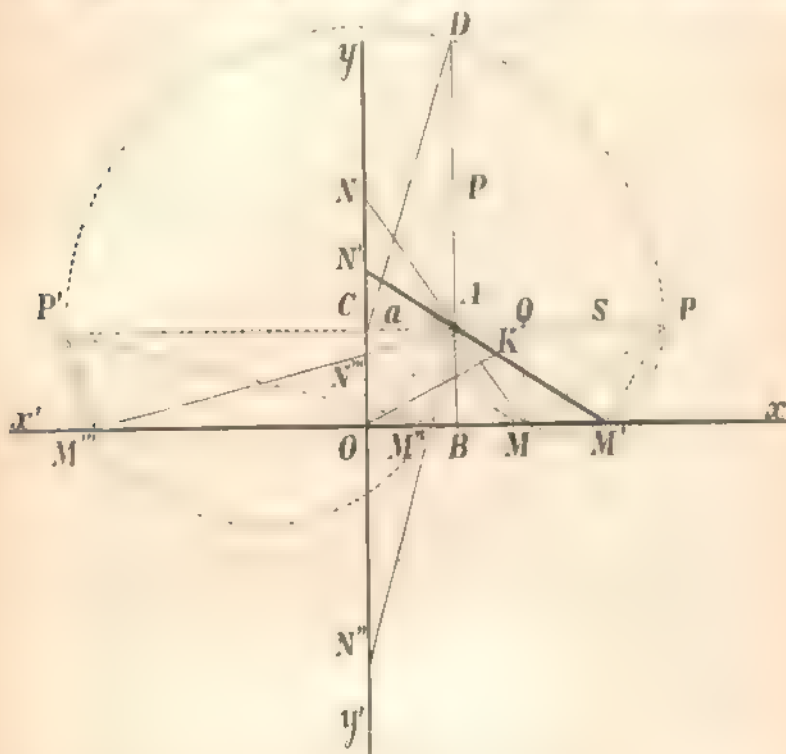
Такимъ образомъ получимъ дугу $ODEF$ эллипса, ординаты которой и представляютъ измѣненія величины m , соответствующія измѣненіямъ x отъ 0 до $2R$.

Задача XVIII.

614. Задача Паппуса. Дана точка A на биссектрисѣ прямого угла составленнаго двумя лучами ax' и ay' , провести черезъ эту точку прямую такую, чтобы отрезокъ ея на отломѣхъ былъ четырехъ угловъ имѣющъ одинаковую длину p .

Приводимъ эту задачу какъ instructивный образецъ, выясняющій значеніе выбора неизвѣстныхъ. Первое выдѣръ действительныхъ является числомъ существенной важности — это число, дающее возможность перейти изъ менѣе сложности. Иной выдѣръ можетъ повести къ ur -ию биквадратному, или къ квадратному, наконецъ къ полному ur -ію четвертой степени. Какъ справиться съ неизвѣстнымъ приходить къ ur -ію сложному, нужно и пытаться взять неизвѣстнаго другую величину, чтобы убедиться, не приведетъ ли новый выборъ неизвѣстнаго къ менѣе сложному ur -ію.

615. Первый способъ.—Легко видѣть, что если задача имѣетъ рѣшеніе MN въ углѣ XOY , то будетъ имѣть и другое $M'N'$ симметричное съ первымъ относительно къ OX . Затѣмъ, задача всегда имѣетъ рѣшеніе въ каждомъ изъ угловъ YOX' и XOY' ; въ самомъ дѣлѣ, проводя прямую черезъ точки A и O и поворачивая ее



Черт. 102.

около точки A , въ углѣ YOX' , имѣмъ въ XOY' видѣть, что она отрѣзокъ въ каждомъ изъ этихъ угловъ будетъ измѣняться отъ 0 до ∞ .

Итакъ, при всякой величинѣ длины задача необходимо имѣетъ 2 рѣшенія — по одному въ каждомъ изъ угловъ YOX' и XOY' , каковыхъ имѣемъ рѣшеній, въ некоторыхъ случаяхъ, могутъ прибавиться еще два, слѣд. задача можетъ имѣть 4 рѣшенія.

Слѣд., если за неизвѣстное примемъ такую величину, которой значенія, относясь къ четыремъ рѣшеніямъ, суть корни одного и того же ur -ія, то получимъ ur четвертой степени, рѣшеніе котораго въ общемъ видѣ обыкновенно въ рамки начальной алгебры не вводити.

Напр., примемъ за неизвѣстное — разстояніе отъ точки O до одной изъ точекъ M, M', M'', M' . пусть $OM = x$ (Обозначимъ длину равныхъ перпендику-

дланы AB и AM будемъ a ; треугол. MON даетъ: $x^2 + ON^2 = p^2$, но изъ подобия треугольниковъ MON и MBA имеемъ: $ON : a = x : (x - a)$; отсюда ур—ние:

$$x^2 + \frac{a^2 x^2}{(x - a)^2} = p^2 \dots (1)$$

Освободивъ его отъ знаменателя и развернувъ, убѣдимся, что оно четвертой степени, полное и не возвратное. Въ немъ содержатся все четыре рѣшенія.

Во-первыхъ, очевидно, что для сѣкущей MM' получимъ то же самое ур. (1), принявъ $OM = x$. Для сѣкущей $AM''N'$, принявъ $OM' = x$, изъ треугольниковъ $OM''N''$ и $AM''B$ имеемъ $x^2 + ON''^2 = p^2$ и $ON'' : a = x : -(a - x)$, откуда $ON'' = ax : (a - x)$; внося эту величину въ предыдущее ур., получимъ опять ур. (1). Наконецъ, для сѣкущей $AN'''M'''$, положивъ $OM''' = -x$, имеемъ: $x^2 + ON'''^2 = p^2$ и $ON''' : a = -x : (x - a)$ или $ON''' = -ax : (x - a)$, слѣд. снова получаемъ ур. (1). Итакъ, въ ур—нии (1) содержатся все 4 рѣшенія задачи.

Хотя это ур—ние и есть полное ур—ние 4-ой степени, не возвратное, но его можно бы было легко рѣшить, такъ какъ можно бы было показать, что между его корнями существуетъ особое соотношение, именно, что ихъ квадраты образуютъ арифметическую пропорцію, что даетъ возможность привести вопросъ къ рѣшенію биквадратнаго ур—нія. Но какъ вычисления были бы длинны и утомительны, то этого метода рекомендовать нельзя.

616. Второй способъ. Взявъ за неизвѣстное BM (черт. 102), найдемъ ур—ние

$$(x + a)^2 + \frac{a^2(x + a)^2}{x^2} = p^2 \dots (2),$$

которое выводится изъ (1) замѣною x количествомъ $x + a$; это ур. имѣетъ четыре корня, $BM, BM, -BM, -BM'$, ибо ур. (1) — общее.

Хотя здѣсь мы опять получили полное биквадратное ур., тѣмъ не менѣе, мы легко можемъ рѣшить его слѣдующимъ искусственнымъ приемомъ. Ур. (2) можно написать въ видѣ

$$x^2 + 2ax + a^2 + a^2 + \frac{2a^3}{x} + \frac{a^4}{x^2} = p^2, \text{ или } \left(x^2 + 2a^2 + \frac{a^4}{x^2}\right) + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = p^2,$$

или

$$\left(x + \frac{a^2}{x}\right)^2 + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = p^2;$$

отсюда видно, что оно приводится къ рѣшенію двухъ ур—ній

$$x + \frac{a^2}{x} = y \text{ и } y^2 + 2ay - p^2 = 0,$$

или

$$\begin{cases} x^2 - yx + a^2 = 0 \\ y^2 + 2ay - p^2 = 0 \end{cases} \dots (3)$$

Итакъ, этотъ искусственный приемъ даетъ относительно простое рѣшеніе задачи.

Посмотримъ, каково геометрическое значеніе вспомогательнаго неизвѣстнаго y . Проведемъ перпендикуляръ MQ на линію AS , параллельную OX , и возставимъ къ MX перпендикуляръ MP , замѣчая, что PQ есть третья пропорциональная къ MQ и $AQ = x$; слѣд.

$$AP = AQ + QP = x + \frac{a^2}{x} = y.$$

Итакъ, вспомогательное неизвѣстное, соответствующее рѣшенію MAN , есть

AP' ; точно также, для вспомогат. неизвестнаго y , соответствующаго рѣшенію $N'M'$, получили бы $(-AP')$, возставивъ перпендикуляръ $M'P'$ къ AM' .

Ур—ніе въ y системы (3) есть квадратное, слѣд. необходимо, чтобы величины y , относящіяся къ четыремъ возможнымъ рѣшеніямъ задачи, были попарно равны; и въ самомъ дѣлѣ, проведя MP , получимъ равныя треугольники AMP и $AM'P$, ибо, $AM' = AM$ по原理у симметрии относительно OA , а также, треугольники ACN и MPQ равны, какъ имѣющие стороны перпендикулярныя и по равной сходственной сторонѣ ($AC = MQ$), слѣд. $MP = AM'$; уголъ $AP'M = PAM$ ибо изъ дополненія равны; треугольники равны, имѣя по равному углу между порознь равными сторонами.

Отсюда слѣдуетъ, что перпендикуляры, возставленные въ M и M' къ прямымъ MX , $M'N$ проходятъ черезъ одну и ту же точку P' линіи AS , и что то же самое относится къ перпендикулярамъ, возставленнымъ въ M' и M'' къ $M'N$ и $M''N''$. Этимъ подтверждается вышеприведенное вычисленіе.

Для рѣшенія задачи достаточно знать точки P и P' , ибо окружности, описанныя на диаметрахъ AP и AP' , пересѣкаясь съ прямою XX' , дадутъ искомыя точки M , M' , M'' , M''' .

Эти точки дадо бы намъ рѣшеніе системы (3).

Итакъ, AP и AP' суть абсолютныя величины корней ур—нія

$$y^2 + 2ay - p^2 = 0 \dots (4)$$

Исследованіе. Корни этого ур—нія, какъ видно а priori, дѣйствительныя, неравные, по знаку противоположныя.

1. Чтобы положительный корень y' , который долженъ быть нанесенъ въ направлении AS , давалъ рѣшеніе задачи, необходимо, чтобы окружность диаметра AP встрѣчала прямую XX' . Но ея радиусъ $= \frac{y}{2}$, а разстояніе центра отъ XX' равно a ; слѣд. необходимо, чтобы было $y' \geq 2a$; а чтобы это имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы триномъ (4), при подстановкѣ $2a$ вмѣсто y , принималъ отрицательное значеніе, т. е. чтобы было

$$4a^2 + 4a^2 - p^2 < 0, \text{ или } p^2 - 8a^2 > 0.$$

Корни тринома $p^2 - 8a^2$ суть $\pm 2a\sqrt{2}$, а какъ p существенно положительно, то неравенство удовлетворяется при

$$p > 2a\sqrt{2}.$$

Первый случай: $p < 2a\sqrt{2}$.

Въ углѣ XOY нѣтъ рѣшенія.

Второй случай: $p = 2a\sqrt{2}$. Положительный корень AP (4) равнъ въ этомъ случаѣ $2a$, сл. окружность диаметра AP касается OX , точки M и M' сливаются, имѣя одно рѣшеніе въ углѣ XOY , и это рѣшеніе — перпендикуляръ къ OX . Въ этомъ слѣдѣ, положеніе стрѣлки MX въ углѣ XOY на прямой, проходящей черезъ A , имѣетъ *три* величины. Этотъ результатъ легко объяснить геометрически. Пусть $MAN = \alpha$ и пусть $M'N$ каждаго съ каждою осью по, что $AN' = AN$ и $AM = AM'$; а какъ $AM = AN$, то $AM = AN'$, слѣдов. средняя линія $M'N$ ниже A , напр., въ K . Соединивъ O съ K , имѣемъ $OK = \frac{MN}{2}$, по $OA = \frac{MN}{2}$, и очевидно $OA = OK$, сл. $2OA$ или $MN = 2OK$ или $M'N$.

Третій случай. $p > 2a\sqrt{2}$. Окружность пересѣкаетъ линію OX въ двухъ точкахъ, и задача имѣетъ въ углѣ XOY два рѣшенія.

II. Во-вторыхъ, чтобы отрицательный корень y'' , наносимый въ направленіи AP , давалъ рѣшеніе, необходимо и достаточно, чтобы окружность диаметра $(-y')$ встрѣчала XX' , т. е. чтобы было $-\frac{y''}{2} \geq a$, или $y' \leq -2a$; отсюда слѣдуетъ,

что необходимо и достаточно, чтобы $(-2a)$ содержалось между корнями ур. (4), т. е. чтобы и соответствующее количество $(-2a)$ вместо y в трином (4) дало отрицательный результат: $a^2 - 4a^2 - p^2 < 0$, что всегда удовлетворяется. Следовательно всегда иметь одно решение в угле $\angle XOY$, и одно в угле $\angle XOY'$, что согласно с выводами предварительного изучения задачи.

Резюме.

$p < 2a\sqrt{2}$. . . 2 решения ($XOY, X'OY$).

$p = 2a\sqrt{2}$. . . 3 решения.

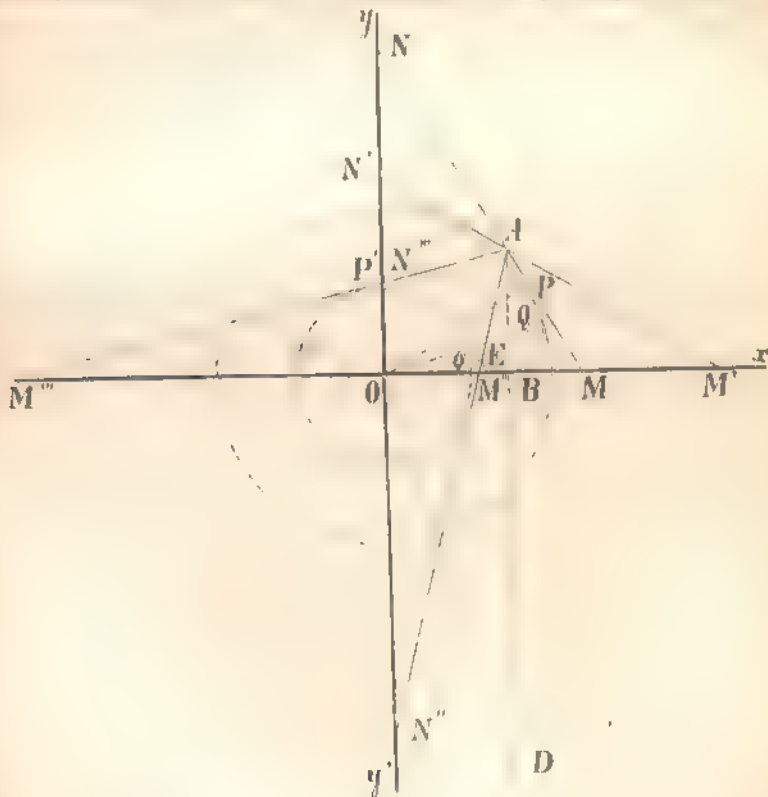
$p > 2a\sqrt{2}$. . . 4 решения.

Построение.—Сделаем построение для случая четырех решений. Ур. (4) дает:

$$y' = 1 \pm \frac{a^2 - p^2}{a^2 + p^2} \cdot a,$$

$$-y'' = 1 \pm \frac{a^2 - p^2}{a^2 + p^2} \cdot a.$$

На параллели к OY (черт. 102) наносим $AI = p$, откуда $CI = 1 \pm a^2 + p^2$.



Черт. 103.

Описав из C как из центра радиусом CI полуокружность, находим на CP точки P и P'' , которые и дают

$$AP = y', \quad AP'' = y''.$$

Описав на AP и AP' полуокружности, получаем искомыми точки M , M' , M'' и M''' , которыми определяются искомые дуги MAN , $M'AN$, $AM'N$ и $AM''M'''$. Проверка — циркулем.

617. Третий способ. — Так как решения задачи попарно симметричны относительно OA , то заключаем, что точка O находится в равном расстоянии от двух симметричных решений. Слѣд. если за неизвестное принять расстояние r точки O от этих двух решений, то ур. на r будет не выше второй степени.

Итак, пусть будет $OP = r$ (черт. 103) радиус окружности центра O , касательной къ решениямъ въ углахъ XOY , обоимъ начинающимся в O вспомогательная неизвестная OM и ON , получимъ три ур—ния:

$$x^2 + y^2 = p^2; \quad \frac{y}{x} = \frac{a}{x-a}; \quad pr = xy \dots (1).$$

Остается исключить изъ этихъ ур—ний x и y , чтобы получить ур. съ главнымъ неизвестнымъ r . Для этого второе ур. напишемъ въ видѣ: $xy = a(x+y)$, возведемъ оба его члена въ квадратъ $(xy)^2 = a^2(x^2 + y^2 + 2xy)$ и замѣнивъ xy и $x^2 + y^2$ ихъ величинами изъ двухъ другихъ уравнений, получимъ:

$$p^2 r^2 = a^2(p^2 + 2pr), \text{ или } pr^2 - 2a^2 r - pa^2 = 0 \dots (2)$$

Чтобы убѣдиться въ общности этого ур—ния, обозначимъ буквою r радиусъ OP' окружности центра O , касательной къ решениямъ въ углахъ XOY' и $X'OY$. Обозначивъ буквами x и y количества OM'' , ON'' , найдемъ 3 ур—ния.

$$x^2 + y^2 = p^2, \quad \frac{y}{x} = \frac{a}{x+a}, \quad pr = xy.$$

Второе напишемъ въ видѣ $xy = a(x-y)$, и преобразованиями, подобными вышеприведеннымъ, приведемъ къ ур—вию

$$pr^2 + 2a^2 r - pa^2 = 0 \dots (8).$$

Это ур. отличается отъ (2) переменою r на $(-r)$, слѣд. абсолютная величина отрицательнаго корня ур—ния (2) представляетъ радиусъ, дающій решения въ углахъ XOY' и $X'OY$.

Исследование. — Итакъ, рассмотримъ, при какомъ условіи корни ур—ния (2) дадутъ искомыя рѣшенія.

Необходимо и достаточно, чтобы эти корни были действительны, а ихъ абсолютная величина не превышала $OA = a$; 2; ибо необходимо, чтобы изъ точки A можно было провести касательную къ окружности, имѣющей радиусомъ абсолютную величину того или другого корня. Но ур. (2) имѣетъ корни действительные, неравные и противоположные по знаку; слѣд. что касается положительнаго корня, то если онъ не больше a 2, то и часть искомого рѣшенія; значить, если замѣнить r количествомъ a 2 въ триномъ (2), результатъ замѣны не долженъ быть отрицательнымъ, т.е. должно быть

$$2pa^2 - 2a^2\sqrt{2} - pa^2 \geq 0, \text{ или } p \geq 2a\sqrt{2}.$$

Отсюда: 1) если $p < 2a\sqrt{2}$, задача не имѣетъ рѣшеній въ углахъ XOY . 2) Если $p = 2a\sqrt{2}$, точка A будетъ находится на окружности центра O и радиуса, равнаго полному корню, слѣд. будетъ только одна касательная; это рѣшеніе, перпендикуляръ къ OA , есть положеніе прямой MN , при которомъ отрезокъ въ углахъ XOY есть *минимумъ*. 3) Наконецъ, если $p > 2a\sqrt{2}$, точка A будетъ находится внѣ окружности, существуютъ двѣ различныя касательныя, выходящія изъ этой точки, и слѣд. два рѣшенія въ углахъ XOY .

Чтобы отрицательному корню r соответствовали рѣшенія задачи, необходимо и достаточно, чтобы абсолютная величина $(-r')$ не превышала a 2, т.е.

$$r' \leq -a \sqrt{2}.$$

ными словами, необходимо и достаточно, чтобы триномъ (2) не былъ отрицательнымъ при данныхъ r и количествѣ $-a$; 2, что даетъ

$$2pa^2 + 2a^3 \sqrt{2} - pa^2 > 0, \text{ или } pa^2 + 2a^3 \sqrt{2} > 0.$$

Но p и a положительны, слѣд. это неравенство всегда вѣрно, т. е. всегда есть по одному рѣшенію въ каждомъ изъ угловъ $\angle OY'$ и $\angle OY$.

Построеніе. Уравненіе даетъ

$$r = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - p^2 a^2}}{p} = \frac{a^2}{p} \pm \sqrt{\frac{a^4}{p^2} - a^2};$$

слѣд. нужно построить радіусы:

$$r' = \sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2} = \frac{a^2}{p}; \quad -r'' = \sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2} = \frac{a^2}{p}.$$

Наносимъ на продолженіи AB (черт. 103) длину $BD = p$, проводимъ OD , и въ точкѣ O возставляемъ перпендикуляръ OE къ OD ; очевидно, что

$$EB = \frac{a^2}{p},$$

ибо $OB = a$. Слѣд. $OE = \sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2}$; а потому, нисходя $EQ = EQ' = EB$, имѣемъ: $r' = OQ$ и $-r'' = OQ'$. Остается провести изъ точки A касательныя къ окружностямъ центра O , проходящимъ черезъ точки Q и Q' .

618. Четвертый способъ.— Можно принять за вспомогательное неизвѣстное сумму $OM + ON$, къ этому выбору приводитъ замѣчаніе, что для двухъ положеній сѣкущей MX и $M'N'$ величина этого неизвѣстнаго одинакова, ибо треугольники OMN , $OM'N'$ равны. Слѣд. для четырехъ положеній сѣкущей получимъ только два корня; и мы должны придти къ ур—нію второй степени.

Итакъ, пусть

$$OM + ON = x \dots (1), \text{ затѣмъ: } OM^2 + ON^2 = p^2 \dots (2)$$

Кромѣ того:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{a}{ON - a}, \text{ откуда } \frac{OM + ON}{OM} = \frac{ON}{a},$$

а потому

$$OM \times ON = (OM + ON) \cdot a, \text{ или } OM \cdot ON = ax \dots (3)$$

Удвоивъ обѣ части (3) и прибавъ ко (2), найдемъ въ первой части x^2 , а ур—ніе будетъ: $x^2 = p^2 + 2ax$, или

$$x^2 - 2ax - p^2 = 0 \dots (4)$$

Такое же ур—ніе получили бы, взявъ за неизвѣстное $OM' + ON'$.

Легко видѣть, что это ур—ніе пригодно и для двухъ другихъ положеній сѣкущей, только x тогда будетъ выражать разности $ON'' - OM$ и $OM' - ON''$.

Какъ скоро x будетъ найдено, останется найти разности отрезковъ $OM - ON$; для этого удвоившемъ (3) и результатъ вычитаемъ изъ (2); получимъ

$$OM - ON = \sqrt{p^2 - 2ax}; \text{ откуда } p^2 > 2ax.$$

Следовательно

$$x^2 = p^2 - 2a(OM - ON), \text{ откуда } OM + ON = \frac{p^2 - x^2}{2a}.$$

Зная же, что $OM - ON = x$, имеемъ

$$OM = \frac{p^2 - x^2}{4a} + \frac{x}{2}, \quad ON = \frac{p^2 - x^2}{4a} - \frac{x}{2}.$$

Внося эти величины въ ур. (2), получимъ

$$(p^2 + 2ax - x^2)^2 + (p^2 - 2ax - x^2)^2 - 16a^2p^2,$$

или, раскрывъ скобки и приведя въ порядок:

$$x^4 + 2(2a^2 - p^2)x^2 + p^2(p^2 - 8a^2) = 0.$$

Чтобы корни (x²) этого ур-ния были действительны, необходимо, чтобы было $(2a^2 - p^2)^2 - p^2(p^2 - 8a^2) \geq 0$, или $4a^4 - 4a^2p^2 + p^4 - p^4 + 8a^2p^2 \geq 0$, или $4a^4 + 4a^2p^2 > 0$, что всегда удовлетворено.

Чтобы оба они были положительны, необходимо, чтобы произведение и сумма ихъ были положительны. Произведение будетъ положительно при $p^2 > 8a^2$, или при

$$p > 2a\sqrt{2}.$$

Но при этомъ условии будетъ $p > 2a$, следовательно $2a^2 - p^2$ будетъ < 0 , и потому сумма корней будетъ > 0 и оба корня положительны. Итакъ, единственное условие возможности задачи будетъ $p > 2a\sqrt{2}$, т. е. чтобы длина нити была не меньше удвоенной длины АО.

Рѣшивъ уравнение, найдемъ:

$$x = \pm \sqrt{p^2 - 2a^2 \pm 2p\sqrt{a^4 + p^2}};$$

выраженіе это легко построить; а имѣя x, потрудясь уже найти OM и ON.

620. Шестой способъ — Если изъ вспомогательное произведемъ при этомъ произведемъ отрезковъ OM + ON, то какъ для двухъ положеній стержня произведемъ имѣть одну и ту же величину, для четырехъ, ея положеній получимъ двѣ величины для произведений; и потому, ур. съ неизвестнымъ x, равнымъ произведению отрезковъ, должно быть квадратнымъ.

Положивъ $OM \times ON = x$, имеемъ еще два ур-нія:

$$OM^2 + ON^2 = p^2 \text{ и } OM - ON = a(OM + ON), \text{ или } x = a(OM - ON).$$

Возвысивъ последнее ур. въ квадратъ, имеемъ

$$x^2 = a^2(p^2 + 2x), \text{ откуда } x^2 - 2a^2x - a^2p^2 = 0.$$

Какъ скоро x найдено, MO и NO получимъ изъ биквадратнаго ур-нія

$$x^4 - p^2x^2 + x^2 = 0.$$

Корни этого ур-нія будутъ действительны при условии $p^4 - 4x^2 > 0$, или $(p^2 + 2x)(p^2 - 2x) > 0$; отсюда видно, что при $x > 0$, необходимо, чтобы было $x < \frac{p^2}{2}$. Имѣняя x количествомъ $\frac{p^2}{2}$ въ ур. въ x, должны имѣть $\frac{p^4}{4} - a^2p^2 - a^2p^2 > 0$, или $p^2 > 8a^2$, откуда $p > 2a\sqrt{2}$ условие известное. $x < 0$ должно давать $x > -\frac{p^2}{2}$, т. е. $-\frac{p^2}{2}$ должно быть въ корняхъ ур-нія въ x, и потому должно

быть $\frac{p^2}{4} + a^2p^2 - a^2p^2 > 0$, что всегда иметь место. Итак, единственное условие есть

$$p > 2a + 2.$$

Какъ скоро оно удовлетворено, оба значения x^2 будутъ положительны, а потому все четыре значения X действительны.

Впрочемъ, какъ скоро найдемъ x , то вмѣстѣ рѣшенія биквадратнаго уравненія, дающаго отрезки OM и ON , стоитъ только замѣтить, что въ треугольникѣ OMN известна гипотенуза p и площадь, равная $\frac{OM \cdot ON}{2}$ или $\frac{x}{2}$.

621. Седьмой способъ — Если за неизвѣстное принять отношение $\frac{OM}{ON}$ отрезковъ, то очевидно должно и служить возвратное уравненіе четвертой степени; ибо для положенія $M'N'$ (черт. 102) следующей второй корень есть $\frac{OM}{ON}$ или $\frac{ON}{OM}$, т. е. онъ обратенъ первому корню, то же самое имѣть мѣсто и для двухъ другихъ корней. Для составленія уравненія стоитъ только исключить OM и ON изъ трехъ уравненій

$$\frac{OM}{ON} = x, \dots (1) \quad OM^2 + ON^2 = p^2, \dots (2)$$

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OM}{a}, \text{ или } ax = OM - a,$$

откуда

$$OM = a(x + 1), \dots (3).$$

Изъ перваго уравненія имѣемъ

$$\frac{OM^2}{ON^2} = \frac{x^2}{1};$$

откуда

$$\frac{OM^2 \cdot ON^2}{OM^2} = \frac{x^2 \cdot 1}{x^2},$$

или

$$\frac{p^2}{OM^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2},$$

или

$$a^2(x + 1)^2 = \frac{x^2 + 1}{x^2},$$

или

$$p^2x^2 - a^2(x^2 + 1)(x - 1)^2 = 0,$$

или

$$a^2x^4 + 2a^2x^3 + (2a^2 - p^2)x^2 + 2a^2x + a^2 = 0.$$

Положивъ $x + \frac{1}{x} = y$, откуда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, и раздѣливъ все уравненіе на x^2 , находимъ

$$a^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2a^2x + \frac{1}{x} + 2a^2 - p^2 \right) = 0, \text{ или } a^2y^2 + 2a^2y - p^2 = 0$$

и

$$x^2 - xy + 1 = 0.$$

Изъ уравненія въ y найдемъ два значенія для y : y' и $-y''$, которые попеременно вносимъ въ послѣднее уравненіе. Но чтобы для x получались величины действительныя нужно, чтобы абсолютная величина y была больше 2; и слѣд. замѣна y числами 2 и -2 должна давать отрицательные результаты; т. е.

$$4a^2 - 4a^2 - p^2 < 0, \text{ или } p > 2a + 2$$

и

$$4a^2 - 4a^2 - p^2 < 0, \text{ или } -p^2 < 0,$$

что приводится къ одному условию: $p \geq 2a \pm 2$, уже известному.

Когда это условие не выполнено, когда p содержится между $2a \pm 2$ и 0, годится только отрицательное значение y , которому отыщутся два отрицательных значения x , сходящаяся проложится въ углах $x'Oy'$ и $x''Oy''$.

622. Восьмой способ—тригонометрический.

Пусть (см. черт. 102) уголъ $OMN = x$. Имеемъ

$$AM = \frac{a}{\sin x}, \quad AN = \frac{a}{\cos x},$$

сдѣловательно

$$\frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x} = p,$$

откуда

$$2a (\sin x + \cos x) = p \cdot \sin 2x,$$

а по возвышеніи въ квадратъ и по приведеніи въ порядокъ,

$$p^2 \sin^2 2x - 4a^2 \sin 2x - 4a^4 = 0,$$

откуда

$$\sin 2x = \frac{2a^4 + \sqrt{4a^4 + 4a^2 p^2}}{p^2} = \frac{2a}{p^2} (a + \sqrt{a^2 + p^2}).$$

Послѣдованіе значений $\sin 2x$, очевидно, действительны, но они не должны быть больше 1, откуда условие

$$2a^2 + \sqrt{4a^4 + 4a^2 p^2} \leq p^2,$$

или

$$4a^2 p^2 \leq p^4,$$

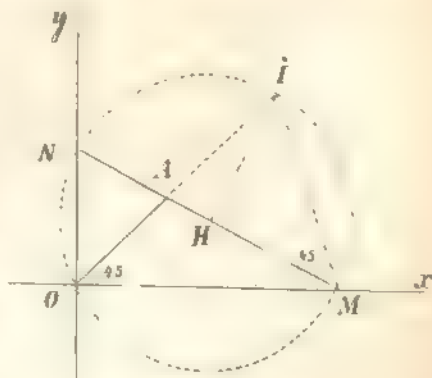
или

$$p \geq 2 \pm 2 \cdot a.$$

623. Въ заключеніе укажемъ рѣшеніе вопроса чисто геометрическое.

I. Ищемъ рѣшеніе въ углахъ $x'Oy'$ (черт. 103), и пусть прямая MN —гребенная, такъ что $MN = p$. Вообразимъ, что на MN , какъ на діаметръ, описана окружность, которая, сдѣловательно, пройдетъ чрезъ точку O ; пусть эта окружность пересѣкаетъ продолженіе прямой OA въ точкѣ I , которая будетъ лежать въ срединѣ полуокружности MIN . Очевидно, все сводится къ нахожденію точки I ; въ самомъ дѣлѣ, разъ эта точка найдена, то, описавъ радиусомъ $\frac{p}{2}$ окружность, проходящую чрезъ точки O и I , мы будемъ имѣть и точки M и N .

По точку I найти легко. Въ сѣмомъ дѣлѣ, разность между линиями IO и IA известна, ибо она равна OA . Легко видѣть, что и произведеніе $IO \times IA$ также известно. Действительно, треугольники OIM и AIM , имѣя общій уголъ I и углы при O и M въ 45° каждыи, подобны, откуда пропорція $OI : IM = IM : IA$, или



Черт. 105.

$OI = IA = \frac{p^2}{2}$, а какъ точка I находится въ серединѣ дуги MN , то IM есть сторона вписаннаго квадрата, и потому $IM = \frac{p^2}{2}$, такъ что

$$OI \times IA = \frac{p^2}{2}.$$

Зная разность $IO - IA = a\sqrt{2}$ и произведение $IO \times IA = \frac{p^2}{2}$, легко построить IO и IA (см. § 472).

Исследованіе. Когда точки I падаютъ, остается описать чрезъ точки O и I окружность радиусомъ $\frac{1}{2}p$; но чтобы это было возможно, необходимо, чтобы разстояние OI было не больше p . А какъ OI и $(-IA)$ суть корни уравненія

$$t^2 - a\sqrt{2} \cdot t - \frac{p^2}{2} = 0,$$

то, чтобы положительный корни были не больше p , необходимо и достаточно, чтобы результатъ положенія числа p нѣкого t въ первую часть не былъ отрицательнымъ, т. е. чтобы было

$$p^2 - pa\sqrt{2} - \frac{p^2}{2} > 0, \text{ или } p > 2a\sqrt{2}.$$

Заключаемъ, что:

1) если $p < 2a\sqrt{2}$, задача невозможна;

2) если $p = 2a\sqrt{2}$, вопросу отвѣчаетъ одна окружность, діаметромъ которой

служатъ OI и слѣд., рѣшеніе въ углѣ xOy одно: перпендикуляръ къ OI въ точкѣ A (случай minimum'a);

3) если $p > 2a\sqrt{2}$, вопросу отвѣчаютъ двѣ окружности, симметричныя относительно OA : задача имѣетъ 2 рѣшенія въ углѣ xOy .

И. Будемъ искать рѣшеніе въ углѣ xOy' . Пусть это искомое рѣшеніе будетъ прямая AMN (черт. 106). Вообразивъ опять окружность, описанную на MN какъ на діаметрѣ, найдемъ точку I ея встрѣчи съ продолженіемъ OA . Имѣемъ: $IA - IO = a\sqrt{2}$; затѣмъ, подобныя треугольники ION и IMA даютъ:

$$IO \times IA - IM^2 = \frac{p^2}{2},$$

и вопросъ приводится къ построенію двухъ прямыхъ по ихъ разности и произведенію (§ 472).

Исследованіе.—Пусть точка

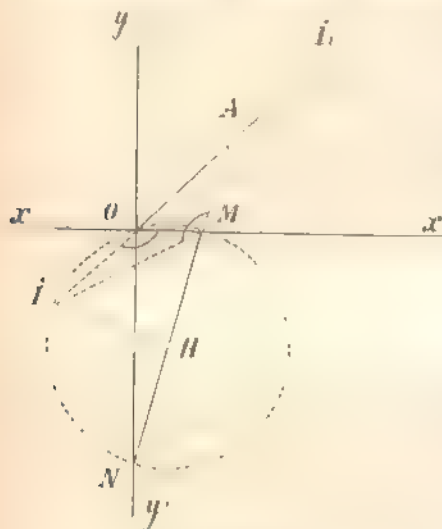
I построена; остается радиусомъ $\frac{1}{2}p$

описать чрезъ точки O и I окружность. Чтобы это было возможно, должно быть

$$OI < p.$$

Пр IA и $(-IO)$ суть корни уравненія

$$t^2 - a\sqrt{2} \cdot t - \frac{p^2}{2} = 0,$$



Черт. 106.

и чтобы Ю (трид. кор. и съ обратнымъ знакомъ) было не больше p , необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки $(-p)$ вмѣсто t въ первую часть не былъ отрицательнымъ, т.-е. чтобы было

$$p^2 + pa\sqrt{2} - \frac{p^2}{2} \geq 0, \text{ или } p^2 + 2pa\sqrt{2} \geq 0.$$

Такъ какъ это неравенство всегда удовлетворено, то всегда можно радиусомъ $\frac{1}{2}p$ описать двѣ разнныя окружности чрезъ точки O и I ; эти окружности и дадутъ рѣшенія въ углахъ xOy' и $x'Oy$.

Можно, сближая обѣ части сноска, найти все 4 рѣшенія однимъ построениемъ. Построимъ, напр., точку I (смерг Юа) въ углу xOy' , получимъ точку I_1 , отъ принадлежащую къ двумъ другимъ рѣшеніямъ, напечис $OI_1 = AI$.

Задача XIX.

624. Въ окружности радиуса R беремъ секторъ, который цюль $= 45^\circ$; трибестемъ въ этомъ секторѣ помѣстить прямоугольный $MNPQ$ (двѣ вершины, т. е. прямо находясь, бы на одномъ радиусѣ, а изъ двухъ остальныхъ одна на дугѣ радиуса, а другая на дугѣ секторѣ) такъ, чтобы диагональ MP имѣла одну омику m .

Примемъ за неслѣдственное длину $OP = x$, треугольникъ MOP дасть:

$$m^2 = R^2 + x^2 - 2x \cdot OQ.$$

Но изъ треугольника OQM , замѣчая, что $MQ = OP$, имѣемъ: $OQ = \sqrt{R^2 - x^2}$. Отсюда

$$m^2 = R^2 + x^2 - 2x\sqrt{R^2 - x^2} \dots (1).$$

Это ур—іе останется въ томъ же видѣ, пока точка M будетъ находиться на дугѣ AC , ибо уголъ QOM будетъ острый.

Если точка M будетъ находиться на дугѣ CA' , причемъ прямоугольникъ будетъ, напримѣръ, $M'N'P'Q'$, найдемъ, опять полагая $OP' = x$, ур—іе

$$m^2 = R^2 + x^2 + 2x\sqrt{R^2 - x^2} \dots (2)$$

отличное отъ (1).

Затѣмъ, бесполезно брать точки на полуокружности $A'C'A$, потому что, очевидно, найдемъ рѣшенія симметричныя, относительно O , рѣшеніямъ уже полученнымъ.

Итакъ, задача рѣшается двумя квадратными уравненіями

$$\pm 2x\sqrt{R^2 - x^2} = x^2 + R^2 - m^2 \dots (3),$$

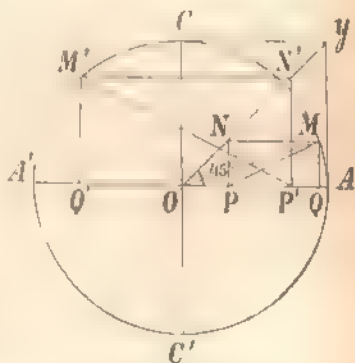
гдѣ $x > 0$, или дѣлимъ ур—іе:

$$4x^2(R^2 - x^2) = (x^2 + R^2 - m^2)^2 \dots (3).$$

или

$$5x^4 - 2m^2x^2 + R^2x^2 + (m^2 - R^2)^2 = 0 \dots (4).$$

изъ числа корней котораго надо брать только положительные и наносить ихъ въ направленіи OA .



Черт. 107

Некоторой точкѣ Р, для которой ОР есть корень ур. (4), соответствуют двѣ точки окружности, лежащая на одной и той же параллели къ АА', если только РN = x не больше R; изъ этихъ двухъ точекъ вопросу отвѣчаетъ та, для которой

$$x^2 + R^2 - m^2 > 0, \text{ или } x^2 > m^2 - R^2,$$

если она находится на дугѣ АС; или та, для которой

$$x^2 + R^2 - m^2 < 0, \text{ или } x^2 < m^2 - R^2,$$

если она находится на дугѣ А'С.

ИЗСЛЕДОВАНИЕ. Чтобы корни уравненія (4) отвѣчали на задачу, необходимо и достаточно: 1) чтобы они были действительны; 2) положительны, 3) меньше R.

Кромѣ того, я приговариваю, что какъ скоро корни будутъ действительны, они будутъ попарно равны и противоположны по знаку, слѣд. будутъ двѣ положительныя корни, и очевидно, что они будутъ меньше R, ибо, удовлетворяя ур—нію (3), дѣлаетъ разность $4x^2 - R^2 - x^2$ положительною. Итакъ, остается единственное условіе—условіе действительности.

Такъ какъ ур—ніе (4) биквадратное, то для действительности его корней необходимо, чтобы сдѣланыя x^2 были действительны и положительны, но очевидно, что, какъ скоро они действительны, то и положительны, следовательно, необходимо и достаточно, чтобы было

$$(m^2 + R^2)^2 - 5(m^2 - R^2)^2 \geq 0,$$

или

$$[m^2 + R^2 - (m^2 - R^2) \sqrt{5}] [m^2 - R^2 + (m^2 - R^2) \sqrt{5}] \geq 0,$$

или

$$[(1.5 - 1)m^2 - (1.5 - 1)R^2] [(1.5 - 1)m^2 - (1.5 + 1)R^2] \leq 0$$

Раздѣляя первый множитель на $1.5 - 1$, а второй на $1.5 - 1$ и замѣчая, что

$$\frac{1.5 + 1}{1.5 - 1} = \left(\frac{1.5 + 1}{2} \right)^2 \text{ и } \frac{1.5 - 1}{1.5 + 1} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2,$$

даемъ неравенству видъ:

$$\left\{ m^2 - \left[\frac{R}{2} (1.5 - 1) \right]^2 \right\} \left\{ m^2 - \left[\frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1) \right]^2 \right\} \leq 0,$$

или, по разложеніи на множители первой степени:

$$\left[m + \frac{R}{2} (1.5 - 1) \right] \left[m - \frac{R}{2} (1.5 - 1) \right] \left[m - \frac{R}{2} (1.5 + 1) \right] \left[m - \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1) \right] \leq 0.$$

По первымъ и третимъ множителямъ положительно, слѣд. должно быть

$$\left[m - \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1) \right] \left[m - \frac{R}{2} (1.5 + 1) \right] \leq 0,$$

откуда видно, что m должно удовлетворить условіямъ:

$$\frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1) \leq m < \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1) \dots (5).$$

При этихъ условіяхъ все 4 корня ур—нія (4) будутъ действительны: слѣд. задача будетъ имѣть два рѣшенія въ левую окружность А'А, и два симметричныя имъ рѣшенія въ другой полуокружности.

Остается показать положение прямоугольников, отвечающих задачѣ.

Чтобы оба положительных значения x давали прямоугольники съ вершиною M на дугѣ AC' , необходимо и достаточно, чтобы для каждаго изъ этихъ значений было $x^2 > m - R^2$; а для этого необходимо и достаточно:

1) Чтобы трижды, составляя первую часть (4), былъ и положительный при замѣнѣ въ немъ x^2 разностью $(m^2 - R^2)$;

2) Чтобы полусумма корней не была меньше $(m^2 - R^2)$.

Первое изъ этихъ условий даетъ:

$$1) m^2 - R^2 - 2(m^2 - R^2)(m^2 - R^2) - m^2 - R^2 > 0,$$

или

$$(m^2 - R^2)(m^2 - 2R^2) > 0 \dots (6).$$

Второе условіе даетъ

$$\frac{m^2 - R^2}{2} > m^2 - R^2, \text{ или } m^2 < \frac{3R^2}{2} \dots (7)$$

Отсюда, такъ какъ $\frac{3R^2}{2}$ содержится между R^2 и $2R^2$, слѣдуетъ, что 1) если $m^2 < R^2$ или $m < R$ оба рѣшенія лежатъ на дугѣ AC' ; 2) если $R < m < R\sqrt{2}$, одно рѣшеніе находится на AC , другое на AC' ; 3) если $m > R\sqrt{2}$, оба рѣшенія на дугѣ AC .

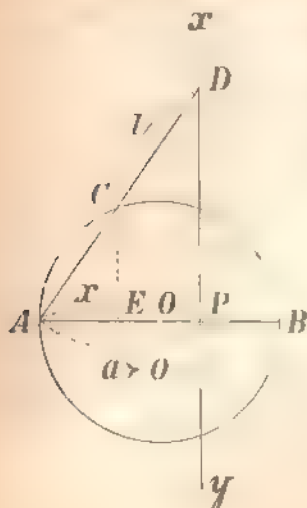
Итакъ, максимум m , равный $\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (т. е. сторона правильного вписаннаго двенадцатиугольника), принадлежитъ прямоугольнику, котораго вершина M лежитъ на дугѣ AC , между тѣмъ какъ минимум m , равный $\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (сторону вышукта двенадцатиугольника), принадлежитъ прямоугольнику, котораго вершина M находится на дугѣ AC' .

Резюме изслѣдованія.

$m = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$, корни мнимые	0 рѣшеній.
$m = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) < x' = x'' = \frac{R}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \frac{2R}{m} < 2$, минимум (m)	1 рѣш. на дугѣ AC' .
$m = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$	$\left\{ \begin{array}{l} m < R \dots \dots \dots \end{array} \right. \frac{2}{5}$ 2 рѣш. на дугѣ AC .
	$\left\{ \begin{array}{l} m = R \quad x' = 0, \quad x'' = R \end{array} \right. \frac{2}{5}$ 2 рѣш. на дугѣ AC .
	$\left\{ \begin{array}{l} m < R\sqrt{2} \dots \dots \dots \\ m = R \left\{ \begin{array}{l} m < R\sqrt{2} \dots \dots \dots \\ m > R\sqrt{2} \dots \dots \dots \end{array} \right. \end{array} \right. \frac{2}{5}$ 1 рѣш. на AC , 1 р. на AC' .
$m = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$	$\left\{ \begin{array}{l} m < R\sqrt{2} \dots \dots \dots \\ m = R\sqrt{2} \dots \dots \dots \\ m > R\sqrt{2} \dots \dots \dots \end{array} \right. \frac{2}{5}$ 1 рѣш. на дугѣ AC .
$m = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) < x' = x'' = \frac{R}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \frac{2R}{m} < 2$, $\max(m)$. 1 рѣш. на дугѣ AC .	
$m = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ корни мнимые	0 рѣшеній.

Задача XX.

625. Дана окружность и один из диаметров, АВ. Къ нему проводимъ перпендикуляръ ху въ разстоянн АР = а отъ точки А. Проведемъ третью прямую А съкруженъ такъ, чтобы ея отрезокъ (1) между прямою ху и второю точкою пересѣченія съ окружностью равнялся данной прямой l.



Черт. 108.

Составление ур—нія. Пусть прямая ху находится вправо отъ А, въ разстоянн АР = а отъ точки А; въ этомъ случаѣ $a > 0$. Отрѣзокъ l всегда положителенъ. Изоме рѣкція е АЕ = с. Изъ прямоугольнй треугольн. АСЕ даетъ

$$AC^2 = x^2 - x(2R - x) \quad (1).$$

Подобные треугольннкн АСЕ и АРР даютъ

$$\frac{a}{x} = \frac{AC}{AC}, \text{ откуда } AC = \frac{lx}{a - x} \quad (2).$$

Внося въ ур—нне (1) и сокращая на x, найдемъ

$$2Rx^2 - (R^2 + 4aR)x + 2a^2R = 0 \quad (3).$$

Для второго чертежа ур. (1) остается безъ измѣненія; ур. (2) беретъ видъ

$$\frac{AP}{x} = \frac{l - AC}{AC}.$$

Вторая часть положительна; чтобы и первая была положительна, нужно вмѣсто АР положить уже не а, а (—а), т.е. какъ теперь $a > 0$, и получится пят. ур. № 3. Итакъ, въ обоихъ случаяхъ имѣемъ одно и то же ур., въ которомъ нужно принимать $a > 0$ когда отрѣзокъ АР находится вправо отъ А, и $a < 0$, когда онъ располагается отъ этой точки влево.

Исследование. Чтобы корень ур—нія (3) сдѣлалъ свѣдѣть на задачу, онъ долженъ быть действительнымъ, положительнымъ и $< 2R$.

Условіе действительности x. Реализантъ долженъ быть ≥ 0 , т.е.

$$(R^2 + 4aR)^2 - 4 \cdot 2R \cdot 2a^2R \geq 0,$$

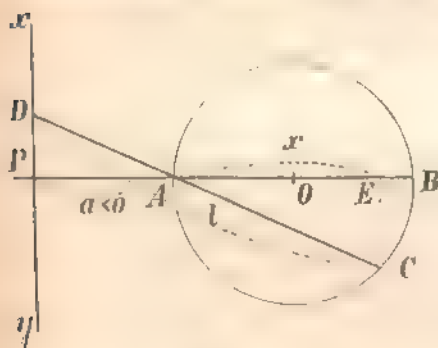
$$\text{или } R^2 + 8aR \geq 0.$$

Когда $a > 0$, это условіе всегда удовлетворено. Когда жъ $a < 0$, то знакъ $R^2 + 8aR$ зависитъ отъ величины R по сравненію съ $-8aR$; если $R \geq -8aR$, корни действительны; если $R < -8aR$ — корни мнимы.

Знаки корней. Корни должны быть положительны. Для сужденія объ ихъ знакахъ, нужно звать знакъ ихъ произведенія и ихъ суммы. Произведеніе корней a^2 , слѣд. всегда положительно, и потому действительные корни имѣютъ одинаковые знаки

$$\text{сумма корней} = \frac{R^2 + 4aR}{2R}, \text{ слѣд. знакъ ея зависитъ отъ знака числителя;}$$

очевидно, что при $a > 0$, сумма корней всегда положительна, при $a < 0$, очевидно, всегда будетъ $-8aR < -4aR$, а какъ действительность корней требовать.



Черт. 109.

чтобы было $R^2 > -4aR$, то и попрежнему будет $R^2 > -4aR$, или $R^2 + 4aR > 0$, следовательно сумма корней опять > 0 .

Ветви корней. Положительные корни должны быть $< 2R$ чтобы знать положение их относительно $2R$, надлежит знать знак $f(2R)$.

$$f(2R) = 2R [(2R - a)^2 - R^2],$$

след. выветь знак разности

$$(2R - a)^2 - R^2,$$

так что

$$f(2R) > 0, \text{ когда } (2R - a)^2 > R^2;$$

$$f(2R) < 0, \text{ когда } (2R - a)^2 < R^2.$$

Критические значения R^2 суть, следовательно, 0 , $-4aR$, $(2R - a)^2$, $-\infty$. Их нужно расположить в выходящем порядке, рассматривая два случая: $a > 0$, $a < 0$. По второму случаю $-4aR$ случаи отрицательным, не входят в число значений положительного количества R^2 , и остаются только значения 0 , $(2R - a)^2$, $+\infty$.

Составляем таблицу знаков.

Случай $a > 0$.

Скала значений R^2	0	$(2R - a)^2$	$+\infty$
Различать			+
Произведение корней			+
Сумма корней	+		+
$f(2R)$			-
1-й коэффци.	+		+

Рассматриваем каждый интервал.

1. Когда R^2 находится между 0 и $(2R - a)^2$, произведение и сумма действительных корней положительны, следовательно оба корня положительны. Далее $f(2R)$ выветь знак 1-го коэффициента, следовательно $2R$ находится вне корней, и значит либо оба корня меньше $2R$, либо оба больше $2R$. Чтобы суметь об этом, нужно сравнить $2R$ с полусуммою корней, которая $= \frac{R^2 + 4aR}{4R}$. В рассматриваемом интервале $R^2 < 4R^2 - 4aR + a^2$, следовательно, если $a < 2R$ то будет и попрежнему

$R^2 < 4R^2 - 4aR + 4R^2$, или $R^2 < 4R^2 - 4aR$ или $R^2 - 4aR < 4R^2$, откуда

$$\frac{R^2 + 4aR}{4R} < 2R.$$

Если же $a > 2R$, то и попрежнему

$$\frac{R^2}{4R} + a > 2R, \text{ или } \frac{R^2 + 4aR}{4R} > 2R.$$

Таким образом, если $a < 2R$, полусумма корней меньше $2R$, следовательно и оба корня $< 2R$: задача имеет два решения.

Если же $a > 2R$, то полусумма корней больше $2R$, и оба корня больше $2R$ *задача не имеет решений*.

2) $P = (2R - a)^2$. Имеем $f(2R) = 0$, след. один из корней равен $2R$, этот корень дает точку В. Произведение корней $= a^2$, след. другой корень $= \frac{a^2}{2R}$; этот корень должен быть $< 2R$, откуда $a^2 < 4R^2$, и $a < 2R$. Для построения сфущей, отвечающей этому корню, очевидно, достаточно из точки А радиусом a нанести хорду АС и продолжить ее до данной прямой.

3) $P > (2R - a)^2$. Оба корня опять положительны, но как знак $f(2R)$ из этого случая противостоит леву члену первого члена, то $2R$ заключается между корнями; и расположение чисел таково

$$0 \dots x \dots 2R \dots x'' \dots$$

Заключаем, что больши корень x'' , будучи больше $2R$, есть корень действительный, меньши же корень, будучи $< 2R$, дает ответ на задачу, который таким образом имать 1 решение, изображаемое корнем.

$$x = \frac{P + 4aR - 1 \sqrt{P^2 - 8aR}}{4R}.$$

Случай $a < 0$.

В этом случае, как выше указано, корни могут быть или действительные, или мнимые; первое имать место при $P \geq -8aR$, второе при $P < -8aR$. При этом $(2R - a)^2 = -8aR$, ибо это неравенство эквивалентно с $(2R + a)^2 \geq 0$, следовательно P из последнем корнякь будет, следовательно $0, -8aR, (2R - a)^2, +\infty$.

Таблица знаков будет такова:

Скала значений P	0	$-8aR$	$(2R - a)^2$	$+\infty$
Реализант	—	+	+	+
Произведение корней		+	+	+
Сумма корней			+	+
$f(2R)$			—	—
1-й коэффиц.		+	+	+

Изследуем каждый интервал.

1) $P < -8aR$ корни мнимые, и задача невозможна.

2) $P = -8aR$ корни действительные равные, общия величина их

$$= \frac{P + 4aR}{4R} = \frac{-4aR}{4R} = -a;$$

чтобы можно было допустить такой корень, должно быть

$$-a < 2R, \text{ или } a > -2R.$$

3) $-8aR < P < (2R - a)^2$. Корни действительны, произведение и сумма их положительны; след. оба корня положительны. $f(2R)$ имать знак одинаковый

от 1-го члена, слѣд. $2R$ находится вне корней. Оба корня тогда будутъ меньше $2R$, когда полусумма ихъ будетъ меньше $2R$. Такимъ образомъ, нужно изслѣдовать, когда удовлетворится неравенство

$$\frac{R^2 + 4aR}{4R} < 2R,$$

или ему эквивалентное

$$R < 4R \cdot 2R - 4R \cdot a, \text{ или } R < 4R(2R - a).$$

Когда $a > -2R$ то будетъ $2R - a < 4R$, или, умноживъ обѣ части на положительное количество $4R - a$, найдемъ $(2R - a)^2 < 4R(2R - a)$. Но такъ какъ R^2 меньше $(2R - a)^2$, слѣд. и подавно будетъ $< 4R(2R - a)$. Въ этомъ случаѣ полусумма корней положительна и меньше $2R$, слѣд. оба корня меньше $2R$, и *имеютъ 2 рѣшенія*.

Когда $a = -2R$, то $2a < -2R + a$ или $2a < -(2R - a)$, сл. $8aR < 4R(2R - a)$, или $-8aR > 4R(2R - a)$. Но, по условію, R^2 больше $-8aR$, то и подавно больше $4R(2R - a)$. Это значитъ, что полусумма корней больше $2R$, слѣд. и кажды изъ корней больше $2R$, и *задачи не имѣетъ рѣшеній*.

4) $R^2 < -4R - a^2$. Въ этомъ случаѣ $1/2R < 0$, одинъ изъ корней $= 2R$; другой корень $= \frac{a^2}{2R}$. Чтобы онъ удовлетворялъ задатку, должно быть $\frac{a^2}{2R} < 2R$, или $a^2 - 4R^2 < 0$, или $(a + 2R)(a - 2R) < 0$; такъ какъ второй множитель отрицателенъ, то первый долженъ быть положительенъ: $a + 2R > 0$, или $a > -2R$.

5) $R^2 > (2R - a)^2$. Оба действительные корни, произведение и сумма которыхъ > 0 , положительны. Значитъ $1/2R$ притягиваетъ знакъ 1-го члена, слѣд. $2R$ заключается между корнями:

$$0 \dots \dots \dots 2R \dots \dots \dots x''.$$

Заключаемъ, что задатку удовлетворяетъ только меньшій корень x' *задача имѣетъ 1 рѣшеніе*.

Р е з ю м е.

I. $a > 0$.

Корни всегда действительны.

$$R < (2R - a)^2 \begin{cases} a < 2R \dots \dots 2 \text{ рѣшенія: } x = \frac{R^2 + 4aR \pm \sqrt{R^2 + 8aR}}{4R} \\ a > 2R \dots \dots 0 \text{ рѣшеній.} \end{cases}$$

$$R = (2R - a)^2 \dots \dots \dots 2 \text{ рѣшенія: } x' = \frac{a^2}{2R} \text{ и } x'' = 2R.$$

$$R > (2R - a)^2 \dots \dots \dots 1 \text{ рѣшеніе: } x' = \frac{R^2 + 4aR - \sqrt{R^2 + 8aR}}{4R}.$$

II. $a < 0$.

1) $a > -2R$.

$$R < -8aR \dots \dots \text{корни мнимые.}$$

$$R = -8aR \dots \dots \text{корни равные: } x' = x'' = a.$$

$$-8aR < R < (2R - a)^2 \dots \dots \dots 2 \text{ рѣшенія.}$$

$$R = (2R - a)^2 \dots \dots \dots 2 \text{ рѣшенія: } x' = \frac{a^2}{2R}, x'' = 2R.$$

$$R > (2R - a)^2 \dots \dots \dots 1 \text{ рѣшеніе.}$$

2) $a < -2R$.

$$R < -8aR \dots \dots \text{корни мнимые.}$$

$$-8aR < R < (2R - a)^2 \dots \dots 0 \text{ рѣшеній.}$$

$$R = (2R - a)^2 \dots \dots 1 \text{ рѣшеніе: } x = 2R.$$

$$R > (2R - a)^2 \dots \dots 1 \text{ рѣшеніе.}$$

Задача XXI.

626. В каком расстоянии от центра данной шара провести стyczną плоскость, чтобы боковая поверхность конуса SMN, описанного около шара по стycznej, сложившаяся с той же поверхностью внешней поверхности сегмента MBN, равнялась одной поверхности (т. е. число положительное).

Решение. Примем за неизвестное расстояние плоскости MN от центра шара, и поставь $OI = x$, а радиус шара назовем R .

По условию имеем уравнение

$$2SN \cdot NI + m \cdot 2R \cdot BI = \pi k^2,$$

если данную поверхность представить в виде круга радиуса k . Нужно вычислить SN, NI и BI в функции R и x . Прямо имеем

$$BI = BO + OI = R + x.$$

Затем, $NI = R^2 - x^2$. Из подобия треугольников SNi и NOi получим

$$SN : NI = NO : OI, \text{ откуда } SN = \frac{R}{x} (R^2 - x^2).$$

Подставив в уравнение и приведя в порядок, имеем:

$$f(x) = (2m - 1)Rx^3 - (k^2 - 2mR^2)x + R^3 = 0.$$

Исследование. Чтобы значение x выводилось из этого уравнения, достаточно решить задачу, необходимо и достаточно, чтобы не было деления на 0, положительно и не больше R . В самом деле, применяя к задаче уравнение предполагаем, чтобы x было отрицательно, иначе, значение SN было бы отрицательное, да и будет само очевидно, как можно исследовать отрицательное значение x . Возьмем эту задачу как пример, на котором и будем, как ведется исследование по плану Жирокса. По этому плану, исследование разбивается на две части: ищет, при каких условиях задача имеет одно решение, при каких — два решения. Отсюда сами собою истекают условия, когда она невозможна.

Случай одного решения. Чтобы задача имела одно, и только одно, решение, для значения x между 0 и R , необходимо и достаточно, чтобы результаты подстановки в $f(x)$ вместо $x = 0$ и $x = R$ имели противоположные знаки, т. е. чтобы $f(0) \cdot f(R) < 0$ (см. § 481, сл. 1). Но $f(0) = R^3$, $f(R) = R(4R^2m - k^2)$, некое условие будет, поэтому

$$m < \frac{k^2}{4R^2}.$$

Случай двух решений. Чтобы задача имела два решения, необходимо и достаточно:

1) Чтобы корни были действительными, т. е. чтобы

$$(k^2 - 2mR^2)^2 - 4(2m - 1)R^4 \geq 0;$$

принимая это неравенство относительно m , найдем, что ему можно удовлетворить, взяв либо

$$m \leq \frac{k^2 - 2R^2 - 2kR}{2R^2} \quad \dots (1),$$

либо

$$m \geq \frac{k^2 - 2R^2 - 2kR}{2R^2} \quad \dots (2)$$

2) Чтобы корни были положительны, т.е. чтобы их произведение и их сумма были положительны. Условие положительности 1-го изведения дает

$$m > \frac{1}{2} \dots (3),$$

и принимая во расчет это условие, найдем, что сумма корней будет положительна, если

$$m < \frac{k^2}{2R^2} \dots (4).$$

3) Чтобы корни были меньше R, т.е. чтобы было неравенство

$$(2m - 1) \cdot f(R) > 0, \text{ откуда } m > \frac{k^2}{4R^2} \dots (5)$$

и

$$x = x_1 < 2R, \text{ откуда } m < \frac{k^2 - 2R^2}{6R^2} \dots (6)$$

Нужно теперь сравнить между собою найденные пределы.

Неравенство (4) противоречит 2-му, и если взять $k = R$ то (3) и (4) также будут противоречить одно другому. Но как в (3) и (4) неравенства — оба необходимые, то нужно предположить $k > R$; но в таком случае, если написать (1) в виде

$$m = \frac{k^2 - 2(k - R)R}{2R^2},$$

тогда заметить, что оно удовлетворяет себе. Таким образом найдем следующие пределы для m , выражаемые равенствами:

Совместны ли с ними найденные пределы? Эти пределы m суть

$$\frac{1}{2} < \frac{k^2}{4R^2} \text{ и } \frac{k^2 - 2R^2}{6R^2}.$$

нужно составить разности

$$\begin{aligned} \frac{k^2 - 2kR + 2R^2}{2R^2} - \frac{1}{2} &= \frac{(k - R)^2}{2R^2}, \\ \frac{k^2 - 2kR + 2R^2}{2R^2} - \frac{k^2}{4R^2} &= \frac{(k - 2R)^2}{4R^2}, \\ \frac{k^2 - 2kR + 2R^2}{2R^2} - \frac{k^2 - 2R^2}{6R^2} &= \frac{2(k - R)(k - 2R)}{6R^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, чтобы искомая совместность имела место, необходимо взять $k > 2R$. Но в таком случае будет

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{4R^2} - \frac{1}{2} &= \frac{k^2 - 2R^2}{4R^2} > 0, \\ \frac{k^2}{4R^2} - \frac{k^2 - 2R^2}{6R^2} &= \frac{k^2 - 4R^2}{12R^2} > 0, \end{aligned}$$

т.е. из нижних пределов наивысшим будет $\frac{k^2}{4R^2}$.

Закключаем, что задача будет иметь 2 решения, если будут одновременно выполнены условия

$$k > 2R,$$

$$\frac{k^2}{4R^2} < m < \frac{k^2 - 2kR + 2R^2}{2R^2} \text{ или } \frac{k^2 - 4R^2}{4R^2}.$$

Использование отрицательных значений x — Для всякого отрицательного x , большего $(-R)$ значения BI и MI будут положительны и положительны, тогда как величина SN является действительной и отрицательной; это значение соответствует, следовательно, отношению

$$\pi \cdot (-SN) \cdot NI + m \cdot 2\pi R \cdot BI = \pi k^2,$$

или

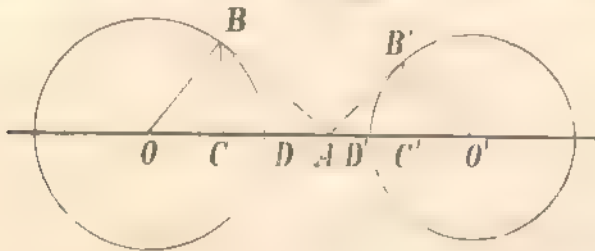
$$-\pi \cdot SN \cdot NI + m \cdot 2\pi R \cdot BI = \pi k^2.$$

Следовательно, отрицательное значение x дает такое положение плоскости сечения MN , при котором поверхность сегмента MBN есть боковой поверхности куска SMA составляет поверхность, равную данному k^2 .

Задача XXII.

627. Даны два шара, касающиеся один другого в центре O и O' ; на линии центров, между двумя шарами, найти такую точку A , чтобы два конуса, образуемые обертками сферической точки, и касательные к ним шарами, имели бы внутри себя две сегменты, сумма поверхностей которых имела бы данную величину.

Решение. Пусть будут r, r' и d — радиусы шаров и расстояние центров, x и x' — расстояния AO и AO' . Зная, что в поверхности сферического сегмента



Черт. 111.

равно $2\pi r$ окружности большого круга на высоту сегмента, вычтем из в. сегмента $BCD = 2\pi \cdot CD$, но $CD = r - OC$, по известу же катета имеем: $r^2 - OC^2 = x^2$, откуда

$$OC = \frac{r^2}{x} \text{ и } 2\pi r \cdot CD = 2\pi \left(r^2 - \frac{r^4}{x^2} \right).$$

Сумма поверхностей обоих сегментов выразится формулой

$$2\pi \left[r^2 + r'^2 - \frac{r^4}{x^2} - \frac{r'^4}{x'^2} \right].$$

За данное можно принять $2\pi \left(\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{x'} \right)$; изобразив его формулою $2\pi m^2$, и заменив x' равною величиною $d - x$, получим уравнение

$$\frac{r^4}{x} + \frac{r'^4}{d-x} = m^2, \text{ или } m^2 x^2 - (r^3 - r'^3 + dm^2)x + dr^3 = 0. \dots (1)$$

откуда

$$x = \frac{r^3 - r'^3 + dm^2 \pm \sqrt{(r^3 - r'^3 + dm^2)^2 - 4dm^2 r^3}}{2m^2}.$$

Исследование. Количество x будетъ действительно, если

$$m^2 = \frac{(r\sqrt{r} - r\sqrt{r'})^2}{d} \dots (2), \text{ или } m^2 > \frac{(r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'})^2}{d} \dots (3),$$

а по ур-нию 1) заключаемъ, что оба корня будутъ и положительны

Но чтобы величина x представляла рѣшеніе даннаго вопроса нужно еще, чтобы она была $< r$, но $< d - r$. Результаты подстановки количествъ r и $d - r'$ вмѣсто x въ первую часть ур-нія (1) суть:

$$r[d^2 + r^3 - r^3 - m^2(d - r)] \text{ и } r[dr^2 + r^3 - r^3 - m^2(d - r)],$$

поэтому главными значеніями m^2 будутъ количества

$$\frac{dr^2 + r^3 - r^3}{d - r} \text{ и } \frac{dr^2 + r^3 - r^3}{d - r'}.$$

Сперва толо нужно сравнить съ r^2 и $(d - r)^2$ произведеіе корней $\frac{dr^2}{m^2}$, что дастъ еще два главныя значенія m^2 , именно dr и $\frac{dr^3}{(d - r')^2}$.

Положимъ

$$\frac{(r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})^2}{d} = a, \quad \frac{r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'})^2}{d} = b, \quad \frac{dr^2 + r^3 - r^3}{d - r} = f, \\ \frac{dr^2 + r^3 - r^3}{d - r'} = g, \quad \frac{dr^3}{(d - r')^2} = c, \quad dr = h.$$

Во-первыхъ, замѣчаемъ, что неравенство (2) должно отбросить, и слѣдъ взять неравенство (3). Въ самомъ дѣлѣ, разности $f - a$ и $c - a$ положительны, ибо

$$f - a = \frac{(dr^2 + r^3 - r^3 - r\sqrt{r})^2}{d(d - r)}, \quad c - a = \frac{r'(d\sqrt{r} - r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})^2}{d(d - r)}.$$

Значитъ, если бы количество m^2 было меньше a , то тѣмъ болѣе оно было бы меньше c и f , и слѣдъ произведеіе корней имѣло бы болѣе $(d - r)^2$, что въ то же время какъ рѣшало бы подстановку равнои $d - r$ на мѣсто x въ первую часть ур-нія (1) было бы положительнъ. Оба вѣличія x были бы болѣе $d - r$ и слѣдъ должны бы были отброшены.

Распредѣлимъ теперь въ выходящемъ порядкѣ главныя значенія m^2 , т.-е. b, f, c, g, h . Для этого вычислимъ свѣдѣнія разности: $h - g, g - f, f - b$. находимъ:

$$h - g = \frac{r(d - r)^2 - r^3}{d(d - r')}, \quad f - b = \frac{dr - r^3 - r\sqrt{r}r'}{d(d - r')}, \\ g - f = \frac{(r + r')d^2 - (2r^2 - 2r^3 + 3rr')d - (r - r')^2 - r^2 - rr')}{(d - r)(d - r')};$$

первыя двѣ разности очевидно положительны; и положительна и третья. Въ самомъ дѣлѣ, приравнявая нулю ея числителя и рѣшая получаемое ур-ніе относительно d , находимъ корни: $r + r'$ и $r - r' = \frac{rr'}{r - r'}$. Но какъ шары лежать одинъ вѣ другаго, то d болѣе большаго изъ корней $r - r'$, и слѣдъ числитель дроби, а потому и $g - f$ положительны. Итакъ, доказано, что $b < f < g < h$.

Вычисляя затѣмъ разности $f - c, b - c$, получаемъ

$$f - c = \frac{r[r(d - r)^2 - r^3]}{(d - r)^2}, \quad b - c = \frac{r(d\sqrt{r} - r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})^2}{(d - r)\sqrt{d}},$$

откуда видно, что оба разности будут положительны, или же оба отрицательны, смотря по тому, будет ли d больше или меньше $r + r'$ $\sqrt{\frac{r}{r'}}$. Затем, три количества b , c и f составят одно, если d будет $= r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$. Отсюда заключаем, что когда $d > r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$, количество c будет $< b$, в противномъ случаѣ будетъ $c > f$. Далее исследование покажетъ, что когда $d < r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$, то достаточно знать, что $c > f$, не фиксируя его мѣста относительно количествъ g и h . Изъ сказаннаго видно, что слѣдуетъ различать 3 случая, смотря по тому, будетъ ли d больше, равно, или меньше суммы $r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$.

Распредѣлив критическія значенія m^2 въ восходящемъ порядкѣ, составимъ таблицу законовъ. Такимъ образомъ, найдемъ:

1 случай: $d > r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$.

Значенія m^2	0	$a \dots c \dots b$	f	$g \dots h \dots$
Реализантъ.		—		
Произведение корней.	+		+	+
Сумма корней.				
$f(r)$.	—			—
$f(d - r)$.				—
1-й коэффициентъ.				

Выше было выяснено, что количеству m^2 нельзя дать значеній ни меньшихъ a , ибо въ этомъ интервалѣ, хотя корни и действительны, но они оба больше $d - r'$, ни между a и b , ибо въ этомъ интервалѣ корни уравненія мнимы. Итакъ, рассматриваемъ случаи:

1) $m^2 = b = \frac{r(r + r' + r)^2}{d}$. Подставивъ въ уравненіе это значеніе m^2 , найдемъ $x = \frac{dr}{r + r' + r}$. Это значеніе x допустимо, если оно будетъ больше r , но меньше $d - r'$.

Положивъ $\frac{dr}{r + r' + r} > r$, имѣемъ отсюда $d > r - r' \sqrt{\frac{r}{r'}}$, и легко проверить, что $r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}} > r - r' \sqrt{\frac{r}{r'}}$, следовательно, найденный корень $> r$.

Положивъ $\frac{dr}{r + r' + r} < d - r'$, имѣемъ $d > r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$, что и дано.

Заключаемъ, что въ данномъ случаѣ задача возможна и имѣетъ 1 рѣшеніе.

2) $b < m^2 < f$, или $(r' + r + r')^2 < m^2 < \frac{dr^2 + r^2 - r^2}{d - r'}$. Сумма и произведение корней положительны, дѣлѣ, оба корня положительны. Значитъ, по знаку $f(r)$ и $f(d - r)$ заключаемъ, что r и $d - r$ лежатъ внѣ корней.

Сравненіе r и $d - r'$ съ полусуммой корней въ данномъ случаѣ неудобно. Чтобы узнать, будутъ ли оба корня больше r , замѣчаемъ, что если $d > r$ и $d' > r$, то должно быть $d' > r^2$, т. е. можно сравнить съ r^2 произведение корней $\frac{dr^2}{m^2}$. Положивъ $\frac{dr^2}{m^2} > r^2$, имѣемъ $m^2 < dr$, что вѣрно, такъ какъ $dr - b$ лежитъ въ томъ интервалѣ. Итакъ, оба корня больше r . Чтобы, зная, прѣдвѣдѣ, будутъ ли оба корня меньше $d - r'$, мы тремъ, будетъ ли ихъ произведение $< d - r'^2$. Положивъ $\frac{dr^2}{m^2} < (d - r')^2$ имѣемъ отсюда $m^2 > \frac{dr^2}{(d - r')^2}$, или $m^2 > c$, что въ рассматриваемомъ интервалѣ имѣетъ мѣсто.

Заключаемъ, что въ данномъ случаѣ задача имѣетъ 2 рѣшенія.

3) $m^2 = f$. Въ этомъ случаѣ $f(d - r) = 0$, следовательно, одинъ корень $= d - r'$. Другой корень $= \frac{dr^2}{m^2 - d - r'^2}$, а какъ для данного интервала m^2 больше $\frac{dr^2}{(d - r')^2}$, то другой корень меньше $d - r$. Значитъ, опять имѣетъ два рѣшенія.

4) $f < m^2 < g$, или $\frac{dr^2 + r^2 - r^2}{d - r'} < m^2 < \frac{dr^2 + r'^2 - r^2}{d - r}$. Оба корня положительны, и какъ $f(d - r') < 0$, то $d - r$ лежитъ между корнями, следовательно, меньше $d - r'$, другой корень $d - r$. Вспомогательное отбрасываемъ, чтобы первый удовлетворяло, онъ долженъ быть еще $> r$. Но, исходя изъ рассматриваемого интервала, m^2 меньше b , и при этомъ условіи оба корня больше r . Задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

5) $m^2 = g$. Для этого значенія m^2 имѣемъ $f(r) = 0$, следовательно, одинъ изъ корней $= r$. А какъ $f(d - r) < 0$, то $d - r$ заключенъ между корнями, изъ которыхъ одинъ меньше $d - r'$, другой больше $d - r$. Неполны не даютъ рѣшенія, и первый отвѣчаетъ на задачу, которая такимъ образомъ имѣетъ 1 рѣшеніе: $x = r$.

6) $m^2 > g$. Оба корня положительны, $f(r)$ и $f(d - r)$ отрицательны, слѣд., r и $d - r$ находятся между корнями, такъ что меньшій корень меньше r , а большій корень больше $d - r$, ни тотъ, ни другой не отвѣчаютъ задачѣ, которая въ рассматриваемомъ случаѣ невозможна.

Резюме.

$$d - r - r' \left\{ \begin{array}{l} r \\ r' \end{array} \right.$$

$m^2 < b$. . . Задача невозможна.

$m^2 = b$. . . 1 рѣшеніе: $x = \frac{dr + r}{r + r'}$

$b < m^2 < f$. . . 2 рѣшенія.

$m^2 = f$. . . 2 рѣшенія.

$f < m^2 < g$. . . 1 рѣшеніе: меньшій корень.

$m^2 = g$. . . 1 рѣшеніе: $x = r$.

$m^2 > g$. . . Задача невозможна.

II случай: $d = r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$.

Въ этомъ случаѣ $c = b = f$, и $f < g = h$. Интервалла отъ b до f не существуетъ; изслѣдованіе и дѣлать два послѣдніе интервала предыдущей таблицы.

1) $m^2 < f$. Такъ какъ $f = b$, а m^2 не можетъ быть $< b$, то задача невозможна.

2) $m^2 = f$. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, одинъ корень $= d - r'$. Произведение корней $= \frac{dr^3}{m^2}$; но $m^2 = f = c = \frac{dr^3}{(d - r')^2}$; слѣдовательно, другой корень,

$$\frac{dr^3 d - r'^2}{dr^3 d - r'} = d - r. \text{ Задача имѣетъ два рѣшенія сливающихся: } x = d - r'.$$

3) $f < m^2 \leq g$. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

4) $m^2 > g$. Задача невозможна.

Итакъ, въ случаѣ $d = r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$, задача или невозможна, или имѣетъ 1 рѣшеніе.

III случай: $d < r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$.

Кривослѣдныя точки m^2 идутъ, возрастая, въ порядкѣ b, f, g, h . Но теперь уже $c < f$. Подъ условіемъ таблицы I то случивъ, переключимъ c направо отъ f .

1) $m^2 = b$. Выше мы видѣли, что въ этомъ случаѣ, чтобы задача была возможна, должно быть $d = r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$. Слѣдов., въ рассматриваемомъ случаѣ она при $m^2 = b$ невозможна.

2) $b < m^2 < f$. Одинъ корень положительный. Какъ въ пунктѣ 4-мъ случая I, чтобы оба корня были $> r$, должно быть $m^2 < dr$, что и имѣетъ мѣсто. Чтобы оба корня были $< d - r$, должно быть $m^2 < c$, что въ рассматриваемомъ интервалѣ не имѣетъ мѣста, и о т к л о н я $> d - r$, задача невозможна.

3) $m^2 = f$. При этомъ $f(d - r') = 0$, одинъ корень $= d - r$. Другой корень $\frac{dr^3}{m^2 d - r'}$; а какъ теперь $m^2 = \frac{dr^3}{(d - r')^2}$, то другой корень $> d - r'$, и задача имѣетъ 1 рѣшеніе: $x = d - r'$.

4) $f < m^2 < g$. Въ этомъ случаѣ $d = r$ нѣтъ между корнями, т.е. одинъ корень больше $d - r$ и долженъ быть отрицательн., другой, менѣе $d - r$, корень долженъ быть больше r , то, нѣтъ въ рассматриваемомъ интервалѣ, m^2 меньше dr , а при этомъ условіи оба корня $< r$ задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

5) $m^2 = g$. Такъ какъ $f(r) = 0$, то одинъ корень $= r$. Такъ какъ $d = r$ лежитъ между корнями, то другой корень больше $d - r'$ и не отвѣчаетъ задачѣ, которая, такимъ образомъ, имѣетъ 1 рѣшеніе.

6) $m^2 > g$. Задача невозможна по той же причинѣ какъ и въ I случаѣ.

Резюме.

$$d < r' + r \sqrt{\frac{r}{r'}}$$

$m^2 = b$. . .	Задача невозможна.
$b < m^2 < f$. . .	Задача невозможна.
$m^2 = f$. . .	1 рѣшеніе: $x = d - r$.
$f < m^2 < g$. . .	1 рѣшеніе: меньшій корень.
$m^2 = g$. . .	1 рѣшеніе: $x = r$.
$m^2 > g$. . .	Задача невозможна.

Сумма поверхностей сегментов увеличивается съ увеличением m^2 , и уменьшается съ уменьшением m^2 столько, видно, что эта сумма имѣетъ максимумъ, соответствующій $m^2 = b$ въ первомъ случаѣ, и $m^2 = l$ — въ третьемъ.

Задача XXIII.

628. Въ данный шаръ радиуса r вписать усѣченный конусъ ABCD, имѣющій данныя: высоту h и объемъ $\frac{1}{3}\pi a^2 h$.

Рѣшеніе. Пусть будутъ x, y, z радиусы FB, AE, и поперечн. и образующая AB. Выразая, что объемъ тѣла $= \frac{1}{3}\pi a^2 h$, имѣемъ ур.

$$x^2 + xy + y^2 = a^2 \dots (1).$$

Проведа радиусъ OA, прямая OI, AH, соотвѣственно перпендикуляры AB и FB и параллельн. къ BF, такъ треугольники AOI и AHB имѣемъ:

$$OI = \frac{1}{2}(4r^2 - z^2) \dots (2),$$

$$(a - y)^2 = z^2 - h^2 \dots (3),$$

и изъ подобія треугольниковъ OI и AHB получаемъ

$$(a - y)^2 = \frac{h^2(4r^2 - z^2)}{z^2} \dots (4).$$

Помноживъ ур. (1) на 4 и вычитъ (3), имѣемъ

$$3(a - y)^2 = 4a^2 - z^2 + h^2.$$

Цѣлывивъ величины $a + y$ изъ этого ур. и изъ (1), и получимъ

$$z^4 - 4(a^2 + h^2)z^2 + 12h^2r^2 = 0 \dots (5).$$

Откуда

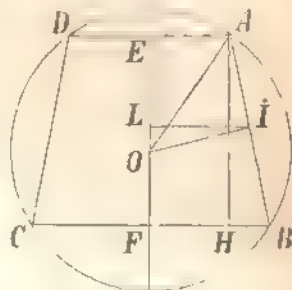
$$z = \sqrt{2(a^2 + h^2) \pm \sqrt{a^4 - h^2r^2 - 3h^2r^2}} \dots (6)$$

Исслѣдованіе.

629. Анализъ. Все дѣло, очевидно, въ численности z . Но недостаточное, что въ величинахъ: была действительная и положительная; нулю еще, что бы она была не меньше h и не больше $2r$. Можно раземъ принять усѣченное конусъ своего рода, къ которому, какъ легко убѣдитъ съ помощью параллельнаго и перпендикулярнаго, и след. ур. (5). Изначенъ z имѣетъ усѣченный конусъ 1-го или 2-го рода, смотри потому, меньше ли оно или больше $\sqrt{2rh}$. Въ самомъ дѣлѣ, въ трипеди ABCD произведение AB \times AC стороны на и пополамъ равно $2rh$, а такъ изъ двухъ линій AB и AC меньшая есть первая или сторона, смотри потому, 1-го или 2-го рода усѣчен. конусъ, то сторона z меньше $\sqrt{2rh}$ въ первомъ случаѣ, и больше — во второмъ. Если $z = \sqrt{2rh}$, усѣчен. конусъ дѣлается полнымъ.

Зная это, находимъ, во-первыхъ, для действительности z условіе

$$a^2 \geq h(r\sqrt{3} - h) \dots (7).$$



Черт. 112.

(Можно замѣтить, что когда h равно или больше $r\sqrt{3}$, условие само собою удовлетворяется.)

Какъ скоро неравенство (7) существуетъ, то, въ силу ур. (5), оба значенія z^2 действительны и положительны.

Затѣмъ, для сравненія значений z^2 съ h^2 , $4r^2$ и $2rh$, подставляемъ поочередно эти три количества въ первую часть ур-ния (5), рассматривая ее какъ триномъ квадратный относительно z^2 . Находимъ следующие результаты подстановокъ:

$$h^2(12r^2 - 4a^2 - 3h^2) \text{ для } h^2 \dots (8)$$

$$4r^2(4r^2 - 4a^2 - h^2) \text{ „ } 4r^2 \dots (9)$$

$$8rh(2rh - r^2 - a^2) \text{ „ } 2rh \dots (10).$$

Приравнявъ нулю каждую изъ этихъ трехъ полиномовъ и рѣшая относительно a^2 , получаемъ изъ ур-ния слѣдующія главные значенія для a^2 :

$$\frac{3}{4}(4r^2 - h^2) = e, \quad \frac{4r^2 - h^2}{4} = d, \quad h(2r - h) = c.$$

Въ первую часть неравенства (7) слѣдуетъ также рассматривать какъ главное значеніе a^2 ; полагаемъ

$$h(r\sqrt{3} - h) = b.$$

Такъ какъ произведение кривої, по ур. (5), не зависитъ отъ a^2 , то, ссылаясь это произведеніе съ количествами h^2 , $16r^4$ и $4r^2h^2$, новыхъ главныхъ значеній не получимъ.

Теперь слѣдуетъ узнать, въ какомъ порядкѣ идутъ въ рядѣ количества b , c , d , e . Во-первыхъ, очевидно, что $b > c$, и что $d < e$. Выяснимъ затѣмъ разности $d - b$, $e - c$, $d - e$.

Имѣемъ:

$$d - b = \frac{(h\sqrt{3} - 2r)^2}{4}; \quad e - c = \frac{(2r - h)(6r - h)}{4}; \quad d - e = \frac{2r - 3h}{4}(2r - h).$$

Два первыхъ разности всегда положительны; третья же—положительна, равна нулю, или отрицательна, съ пот. будетъ ли $h < \frac{2r}{3}$, или $> \frac{2r}{3}$. Итакъ, видно, что смотря по тому, будетъ ли h меньше или больше $\frac{2r}{3}$, главные значенія a^2 распределяются такъ: b, c, d, e ; b, d, c, e .

Когда $h = \frac{2r}{3}$, c и d будутъ равны.

Замѣтимъ еще, что произведеніе обоихъ значеній z^2 , т. е. $12h^2a^2$ всегда больше h^4 и $4h^2r^2$, слѣд. никогда не можетъ случиться, чтобы два значенія z были оба меньше h или $\sqrt{2}rh$. Но какъ произведеніе значеній z^2 меньше или больше $16r^4$, смотря по тому, будетъ ли h меньше или больше количества $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$, это послѣднее количество слѣдуетъ также рассматривать какъ главное значеніе количества h .

680. Синтезъ. Изъ предыдущаго анализа видно, что изслѣдованіе распадается на такіе три главные случая:

$$h < \frac{2r}{3}; \quad \frac{2r}{3} < h < \frac{2r\sqrt{3}}{3}; \quad h > \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Первый случай: $h \leq \frac{2r}{3}$.

Измѣненія a^2

Число рѣшеній

	1-го рода.	2-го рода.
$a^2 < b$	0	0
$a^2 = b$	0	1
$b < a^2 < c$	0	2
$c < a^2 \leq d$	1	1
$d < a^2 \leq e$	1	0
$a^2 > e$	0	0

Рѣшеніями 1-го рода назывътъ усѣченный конусъ 1-го рода, рѣшеніями 2-го рода усѣчен. конусъ 2-го рода. Главныя величины взяты въ прицѣль: d и e , a^2 измѣняется съ b до e , проходя черезъ промежуточные значенія c и d .

1. $a^2 < b$. Обѣ величины z мнимы: задача невозможна.

2. $a^2 = b$. Для z получаемъ формулу $z = \sqrt{2rh/3}$. Эта величина больше h , и $\sqrt{2rh}$, но меньше $2r$, ибо $h < \frac{2r}{3}$, и потому меньше $\frac{2r}{3}$. Слѣдов., имѣетъ усѣч. конусъ 2-го рода.

3. $b < a^2 < c$. Количества a^2 меньше c , d , e (слѣд. величины (8), (9) и (10) положительны, и какъ h меньше $\frac{2r}{3}$, и потому z меньше $2r$ и больше h и $\sqrt{2rh}$. Задача имѣетъ два рѣшенія 2-го рода.

Когда $a^2 = c$, одна изъ величинъ z равна $\sqrt{2rh}$, и ей соответствуетъ цѣлый конусъ; вторая величина остается меньше $2r$, но больше h и $\sqrt{2rh}$, и даетъ усѣч. кон. 2-го рода. Такъ какъ полный конусъ мы не рассматривать совершенно какъ усѣч. кон. 1-го или 2-го рода, то можно сказать, что и въ этомъ случаѣ задача имѣетъ два рѣшенія 2-го рода.

4. $c < a^2 < d$. Такъ какъ a^2 становится больше c , полиномъ (10) отрицателенъ, и одна изъ величинъ z меньше $\sqrt{2rh}$, между тѣмъ какъ другая больше. Но обѣ эти величины остаются, какъ и прежде, больше h , но меньше $2r$. Имѣемъ одно рѣшеніе 1-го и одно рѣшеніе 2-го рода.

Когда $a^2 = d$, одна изъ величинъ z становится равною $2r$, другая меньше $2r$, но они всегда больше h , и одна больше $\sqrt{2rh}$, другая — меньше. Слѣд. имѣемъ усѣч. кон. 1-го рода и усѣч. кон. 2-го рода, только этотъ послѣдній имѣетъ образующую $= 2r$.

5. $d < a^2 < e$. Такъ какъ $a^2 > d$, и полиномъ (9) отрицателенъ, и одна изъ величинъ z меньше $2r$, другая — больше. Значеніе z , больше $2r$, отбрасываемъ, и какъ меньшее значеніе z меньше $\sqrt{2rh}$, а другое больше, имѣемъ только одно рѣшеніе: усѣч. конусъ 1-го рода.

Когда $a^2 = e$, получаемъ цилиндръ высоты h .

6. $a^2 > e$. Задача невозможна. Въ самомъ дѣлѣ когда a^2 превосходитъ e , одно изъ значеній z меньше, а другое больше нежели h и $2r$. Поэтому первое должно быть отброшено какъ меньшее h , а другое — какъ большее $2r$.

Когда $h = \frac{2}{3}r$, заключения остаются тѣ же, какъ и при $h < \frac{2}{3}r$. Только оба предѣла c и d дѣлаются равными, и потому интервала между c и d въ таблицѣ изслѣдованія не будетъ.

Затѣмъ, безъ новыхъ объясненій, слѣдуютъ таблицы для двухъ послѣднихъ случаевъ: содержащіяся въ нихъ детали изслѣдованія найдемъ, слѣдуя пути, указанному въ первомъ случаѣ.

Второй случай: $\frac{2r}{3} < h < \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Изменения a^2

Число рѣшеній.

	1-го рода.	2-го рода.
$a^2 < b$	0	0
$a^2 = b$	0	1
$b < a^2 < d$	0	2
$d < a^2 < c$	0	1
$c < a^2 < e$	1	0
$a^2 = e$	0	0

Третій случай: $h > \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Изменения a^2

Число рѣшеній

	1-го рода.	2-го рода.
$a^2 < d$	0	0
$a^2 = d$	0	1
$d < a^2 < c$	0	1
$c < a^2 \leq e$	1	0
$a^2 > e$	0	0

Сдѣлаемъ только слѣдующія замѣчания:

Когда $h = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$, d равно b , и во второй таблицѣ нужно только опустить интервалъ отъ d до b .

Что касается третьей таблицы, то нижний предѣлъ a^2 равенъ d вмѣсто b . Но это значить, что какъ h больше $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ когда a^2 меньше d , то оба значенія x становятся больше $2r$.

Примѣчаніе. Такъ какъ максимум a^2 во всехъ случаяхъ равенъ e , то замѣчаемъ, что въ всѣхъ конусахъ данной высоты, вписанные въ шаръ, всегда меньше цилиндра той же высоты. Но минимумъ a^2 различенъ, смотря по тому, меньше ли h или больше нежели $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Онъ равенъ b въ первомъ случаѣ, и d во второмъ. Когда $h = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$, d равно b , и оба минимума сливаются въ одинъ.

Задача XXIV.

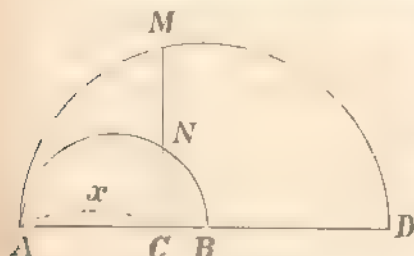
631. На прямой даны три точки A, B, D , такая, что $AB + BD = 2a$. На отрезкѣ AB найти такую точку C , чтобы перпендикуляръ, возстановленный изъ нея къ прямой AD , пересѣкалъ окружности, описанныя на AB и AD какъ на диаметрахъ, въ такой точкѣ M и N , чтобы $CN + CM = l$, гдѣ l дѣйствительное

Рѣшеніе. Принявъ за неизвѣстное отрезокъ $AC = x$, имѣемъ уравненіе

$$\sqrt{x(2a-x)} + 1 \sqrt{x(4a-x)} = l \quad (1)$$

Разсматривая l какъ \sqrt{P} , мы можемъ приложить къ рѣшенію и изслѣдованію § 546. Положивъ

$$x(2a-x) = P, \quad x(4a-x) = Q, \quad P = R,$$



Черт. 113.

Применяя метод § 491, найдем, что:

Если $\Delta > 0$, т. е. $P^2 - 4a^2 > 0$, то корни резольвента и тринома $2x^3 - 6ax^2 - P^2$ не отделяют друг друга.

Если $\Delta < 0$, т. е. $P^2 - 4a^2 < 0$, то корни одного тринома отделяют корни другого.

Наконец, при $\Delta = 0$, или $P^2 - 4a^2 = 0$, оба тринома имеют общий корень.

Рассмотрим сначала этот последний случай. Когда $P^2 = 4a^2$, корни резольвента суть $x_1 = \frac{2}{3}a$, $x_2 = 2a$. Корни тринома (6) суть: $\xi_1 = a$, $\xi_2 = 2a$. В этом случае данная задача имеет два решения

$$x_1 = \frac{2}{3}a, \quad x_2 = 2a,$$

и легко непосредственно проверить, что оба они удовлетворяют задаче в прямом смысле задания.

Пусть $P^2 - 4a^2 > 0$. Так как $(ab' - ba) < 0$ (см. параграф § 491), и потому расположение корней таково:

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2$$

т. е. меньший корень x_1 резольвента находится в интервала корней тринома (6), следовательно, получает от этого тринома положительный знак, и потому удовлетворяет на задачу в прямом смысле задания. Больший корень x_2 резольвента, находясь между корнями тринома (6), получает от него отрицательный знак и потому не отвечает уравнению $P - Q - R = 0$.

Когда $P^2 - 4a^2 < 0$, так легко убедиться, будет $aP > 0$, и следовательно числа x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 располагаются в порядке

$$x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2$$

корни резольвента, находясь вне корней тринома (6), делают его положительным, и оба корня резольвента отвечают задаче.

II. Уравнение $\sqrt{P} - \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0$.

Ищется такая точка C, чтобы было $CM - CN = L$.

Корни резольвента должны удовлетворять условию $P - Q - R < 0$, или $x(2a - x) - x(4a - x) + P < 0$, или $x > \frac{P}{2a}$.

Подставляя $\frac{P}{2a}$ вместо x в (2), найдем

$$f\left(\frac{P}{2a}\right) = \frac{P}{a^2}(P - 4a^2).$$

Когда $P < 4a^2$, этот результат отрицателен, следоват. будет

$$x_1 < \frac{P}{2a} < x_2$$

и следоват., больший корень уравнения (2) отвечает видоизменной задаче.

Когда $P > 4a^2$, результат подстановки положителен, и $\frac{P}{2a}$ — вне корней. Положив

$$\frac{P}{2a} > \frac{3a^2}{2(a^2 + P)},$$

найдем $a^2 + P > 3a^2$, что верно, следоват. оба корня уравнения (2) меньше $\frac{P}{2a}$: видоизм. задача при условии $P > 4a^2$ невозможна.

III. Уравнение $-\sqrt{P} + \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0$.

Ищется такая точка C, чтобы было $CN - CM = l$.

Условие $-P + Q + R = 0$ дает $2ax + b < 0$, что при $x > 0$ невозможно — задача невозможна, — и это видно a priori.

Резюме.

Когда $l < 2a$, меньший корень уравнения (2) дает ответ на предложенную задачу, а больший корень служит ответом на первое видоизменение задачи.

Когда $l > 2a$, оба корня уравнения (2) служат ответом на предложенную задачу.

ГЛАВА XLII.

Maxima и minima в задачах.

Maxima и minima простейших целых функций. — Maxima и minima квадратной дроби. Наименьшая этой функции. — Maxima и minima функций нескольких переменных.

I. Maxima и minima простейших целых функций.

632. Прямой способ. При определении максимального или минимального значения функции этим способом, составляем выражение функции и исследуем ее изменение, изменяя независимое переменное в пределах, указываемых условиями вопроса. Таким образом мы естественным путем находим максимум или минимум функции вместе с соответствующим значением независимого переменного. В этом и заключается *натуральный, прямой способ* определения *max.* или *min.* функций.

Этим путем мы нашли максимум и минимум квадратного тринома в § 585. Здесь мы приводим примеры в пояснение этого метода.

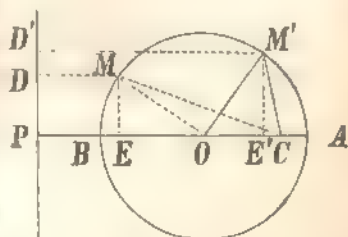
633. Примеры I. Дана окружность диаметра AB, на котором взяты точки: C в расстоянии от A, равном трети радиуса, и P в расстоянии $OP = \frac{5}{3}$ радиуса от центра. Найти на окружности такую точку M, чтобы сумма квадратов ее расстояний от точки C и от перпендикуляра, проведенного к AB в точку P, была *maxima* или *minima*.

За неизвестное примем расстояние центра круга от проекции E точки M на диаметр AB, принимая это неизвестное положительным, когда точка E лежит влево от O, и отрицательным, когда эта точка вправо от O. Таким образом для точки M из прямоугольного $\triangle МОС$ найдем:

$$MC^2 = MO^2 + OC^2 + 2OC \cdot OE = R^2 + \frac{4}{9}R^2 + \frac{4}{3}R \cdot x.$$

$$MD^2 = \left(\frac{5}{3}R - x\right)^2 = \frac{25}{9}R^2 - \frac{10}{3}Rx + x^2;$$

след. $MC^2 + MD^2 = R^2 - \frac{29}{9}R^2 - 2Rx + x^2 = (x - R)^2 + \frac{29}{9}R^2.$



Черт. 114.

Легко видѣть, что это выраженіе сохраняетъ видъ при всякомъ положеніи точки M на окружности, благодаря условію относительно знака количества x . Итакъ, изслѣдованію подлежитъ выраженіе

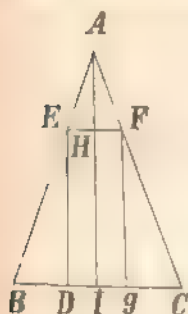
$$y = (x - R)^2 + \frac{29}{9} R^2.$$

представляющее квадратный триномъ, въ которомъ x нужно измѣнять отъ $-R$ до $+R$. Изъ этого выраженія видно, что по мѣрѣ уменьшенія абсолютной величины бисома $x - R$, y будетъ идти уменьшаясь, слѣд. достигаетъ *minim'a* при $x = R$; такимъ образомъ имѣемъ таблицу:

$$\begin{array}{l} x \mid -R \dots < \dots 0 \dots < \dots +R \\ y \mid \frac{65}{9} R^2 \dots > \dots \frac{38}{9} R^2 \dots > \dots \frac{29}{9} R^2. \end{array}$$

Слѣд. y имѣетъ *minim'um* $\frac{29}{9} R^2$ при $x = +R$. Такимъ образомъ, при движеніи точки отъ B къ A по верхней полуокружности, функция y , начиная съ своего *минимальнаго значенія* $\frac{29}{9} R^2$, увеличивается до *maxim'а* $\frac{65}{9} R^2$, котораго она достигаетъ, когда точка приходитъ въ A ; затѣмъ, при движеніи точки по нижней полуокружности, функция уменьшается до $\frac{29}{9} R^2$.

634. Примеръ II. Въ прямой круглый конусъ вписанъ цилиндръ; найти, при какихъ размѣрахъ полная поверхность его будетъ *maxima* или *minima*?



Черт. 115.

Пусть будетъ r радиусъ основанія конуса, h — его высота. Назовемъ радиусъ основанія II цилиндра буквою x , высоту его III буквою y . Изъ подобія Δ -ковъ AEN и ABV находимъ связь между x и y , выражаемую пропорціей:

$$EN : BV = AN : AV, \text{ или } x : r = (h - y) : h,$$

откуда

$$y = \frac{h(r - x)}{r}.$$

Полная поверхность S цилиндра выражается формулою: $2\pi \cdot DI^2 + 2\pi \cdot DI \cdot IH$, или $2\pi(x^2 + xy)$, или, замѣняя y его величиною:

$$S = \frac{2\pi}{r} [(r - h)x^2 + hr x] \dots (1)$$

Въ данномъ вопросѣ радиусъ x основанія цилиндра можетъ измѣняться только отъ 0 до r . Припоминая § 585, замѣчаемъ, что смыслъ изысканій квадратнаго тринома зависитъ отъ знака коэффициента при x^2 ; слѣд. надо различать 3 случая: $r > h$, $r = h$, $r < h$.

I. $r > h$ (конусъ сплюснутый). Въ этомъ случаѣ, представивъ триномъ

$(r-h)x^2 + hr x$ въ видѣ $(r-h)\left[x + \frac{hr}{2(r-h)}\right]^2 - \frac{h^2 r^2}{4(r-h)^2}$, имѣемъ слѣдующую таблицу измѣненій:

x	$-\infty \dots < \dots < \dots - \frac{hr}{2(r-h)} \dots < \dots < \dots + \infty$
$x + \frac{hr}{2(r-h)} - \frac{h^2 r^2}{4(r-h)^2}$	$\infty \dots > \dots > \dots - \frac{h^2 r^2}{4(r-h)^2} \dots < \dots < \dots - \infty$
S	$+\infty \dots > \dots > \dots - \frac{\pi h r}{2(r-h)} \dots < \dots < \dots + \infty$

Заключаемъ, что когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до $-\frac{hr}{2(r-h)}$, функция S уменьшается, а затѣмъ увеличивается, когда x возрастаетъ отъ $-\frac{hr}{2(r-h)}$ до $+\infty$. Но какъ количество $\frac{hr}{2(r-h)}$ отрицательно, то изъ таблицы видимъ, что измѣненіямъ x въ области отъ 0 до r отвѣчаетъ возрастаніе функции S . Слѣд. когда $r > h$, полная поверхность цилиндра увеличивается по мѣрѣ увеличения радіуса основанія цилиндра. При $x=0$, и $S=0$; при $x=r$, $S=2\pi r^2$; такъ что S увеличивается отъ 0 до $2\pi r^2$; и въ самомъ дѣлѣ, при $x=0$, цилиндръ обращается въ прямую AM ; при $x=r$, боковая поверхность обращается въ 0, полная же поверхность приводится къ суммѣ двухъ круговъ радіуса BM .

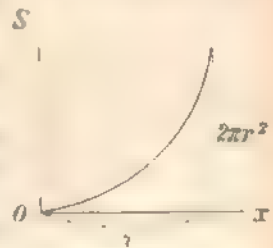
Таблица измѣненій функции S приводится къ слѣдующей части предыдущей таблицы:

$r > h$	x	0	возрастаетъ до r
	S	0	возрастаетъ до $2\pi r^2$.

II. $r = h$. Триномъ приводится къ hrx , и $S = 2\pi r x$, откуда непосредственно видно, что при возрастаніи x отъ 0 до r , S увеличивается отъ 0 до $2\pi r^2$. Таблица измѣненій та же, что и для случая I.

Въ обоихъ случаяхъ функция имѣетъ: абсолютный минимумъ, равный 0, и абсолютный максимумъ $2\pi r^2$.

Въ обоихъ случаяхъ кривая, изображающая ходъ измѣненій функции, такова, какъ представляетъ черт. 116, гдѣ на оси Ox представлены измѣненія x отъ 0 до r , а измѣненія S представлены ординатами кривой. Эта кривая есть часть параболы, отвернутой обращенная вверхъ.



Черт. 116.

III. $r < h$ (конусъ вытянутый). Въ этомъ случаѣ множитель $r-h$ отрицателенъ, и таблица измѣненій функции S такова:

x	$\infty \dots < \dots < \dots - \frac{hr}{2(r-h)} \dots < \dots < \dots + \infty$
$x + \frac{hr}{2(h-r)} - \frac{h^2 r^2}{4(r-h)^2}$	$-\infty \dots > \dots > \dots - \frac{h^2 r^2}{4(r-h)^2} \dots < \dots < \dots + \infty$
S	$-\infty \dots < \dots < \dots - \frac{\pi h^2 r}{2(h-r)} \dots > \dots > \dots - \infty$

Такимъ образомъ функция S сначала увеличивается до $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$, а потомъ

уменьшается; слѣд. имѣетъ максимумъ при $x = \frac{hr}{2(h-r)}$. Хотя это количество положительно, но оно можетъ быть или $> r$, или $< r$; между тѣмъ какъ въ данномъ вопросѣ x измѣняется только отъ 0 до r . Посмотримъ, при какой зависимости между r и h , это значение x будетъ $\geq r$. Положивъ

$$\frac{hr}{2(h-r)} \geq r, \quad \text{или} \quad \frac{h}{2(h-r)} \geq 1,$$

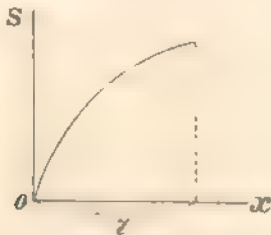
и умноживъ обѣ части на $h-r$ (большее 0), найдемъ: $h > 2h-2r$, или $h < 2r$.

1) Пусть $r < h < 2r$. Въ этомъ случаѣ x , возрастая отъ 0 до r , всегда будетъ меньше $\frac{hr}{2(h-r)}$, а слѣдовательно, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, полная поверхность цилиндра идетъ увеличиваясь. Исследование даетъ таблицу:

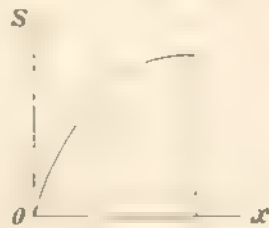
$r < h < 2r$	x	0	...	$<$...	$<$...	r
	S	0	...	$<$...	$<$...	$2\pi r^2$

а кривая, изображающая эти измѣненія, есть часть параболы, открытіе которой обращено внизъ (черт. 117).

2) Пусть $h = 2r$. Полусумма корней въ этомъ случаѣ равна r , триномъ достигаетъ максимумъ при $x = r$; таблица измѣненій — таже, какъ только что



Черт. 117.



Черт. 118.

указано; кривая измѣненій — таже, съ тою лишь разницею, что точка кривой, имѣющая абсциссу r , есть вершина параболы (черт. 118).

3) Пусть, наконецъ, $\frac{hr}{2(h-r)} < r$, или $h > 2r$. Въ этомъ случаѣ x , возрастающая отъ 0 до r , проходитъ чрезъ значение $\frac{hr}{2(h-r)}$; слѣд. полная поверхность S цилиндра, начиная съ нуля, возрастаетъ, достигаетъ максимумъ при

$$x = \frac{hr}{2(h-r)},$$

затѣмъ, при возрастаніи x до r , идетъ, уменьшаясь.

Максимальное значеніе S , при $x = \frac{hr}{2(h-r)}$, равно $\frac{h^2r}{2(h-r)}$; значеніе S при $x = r$ есть $2\pi r^2$. Таблица измѣненій такова:

$h > 2r$	x	0	...	$<$...	$\frac{hr}{2(h-r)}$...	$<$...	r
	S	0	...	$<$...	$\frac{h^2r}{2(h-r)}$...	$>$...	$2\pi r^2$

Измѣненія эти выражаются дугою параболы, обращенной отвертѣемъ внизъ, причемъ ордината вершины есть $\frac{-h^2r}{2(h-r)}$.

На чертежѣ

$$AB = \frac{-h^2r}{2(h-r)}; \quad CD = 2\pi r^2;$$

$$OB = \frac{hr}{2(h-r)}; \quad OD = r.$$

Итакъ: когда $h < 2r$, полная поверхность S цилиндра принимаетъ одинъ, и только одинъ, разъ каждое значеніе, содержащееся между 0 и $2\pi r^2$, не дѣлаясь больше $2\pi r^2$. Но при $h > 2r$, S принимаетъ дважды всякое значеніе между 0 и $2\pi r^2$; дважды всякую величину, содержащуюся между $2\pi r^2$ и $\frac{\pi h^2}{2(h-r)}$,

и не дѣлается больше $\frac{\pi h^2}{2(h-r)}$.

635. *Примѣръ III. Черезъ данную точку P внутри окружности O провести двѣ взаимно перпендикулярныя хорды AC и BD такъ, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была такова или minima.*

Пусть $OP = a$ и пусть $OF = x$ переменное разстояніе хорды BD отъ центра.

Площадь $\triangle DAB = \frac{1}{2} DB \times AP$, $\triangle BCD = \frac{1}{2} DB \times CP$; складывая, найдемъ, что площадь y четырехугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2} DB \times AC$, или, если перпендикуляръ изъ центра на хорду AC встрѣчаетъ ее въ точкѣ E , можемъ написать:

$$y = 2DF \times CE; \quad \text{но } DF = \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$CE = \sqrt{R^2 - OE^2} = \sqrt{R^2 - (a^2 - x^2)};$$

следовательно $y = 2\sqrt{(R^2 - x^2)(R^2 - a^2 + x^2)}$.

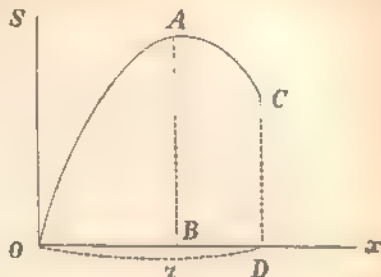
Но y величина положительная, а потому ея максимум или минимум будутъ имѣть мѣсто при тѣхъ же обстоятельствахъ, какъ и максимум или минимум квадрата функція y :

$$y^2 = -4x^4 + 4a^2x^2 + 4R^2(R^2 - a^2).$$

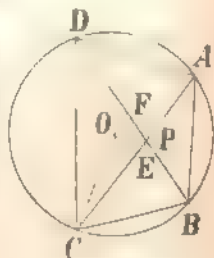
Вопросъ приведенъ къ изслѣдованію измѣненій биквадратнаго триннома, которому въ этихъ цѣляхъ даемъ видъ:

$$y^2 = -4 \left[\left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right)^2 - R^2 \cdot \frac{a^2}{2} \right]$$

Отсюда видно, что когда x увеличивается отъ нуля до $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, количество y^2 идетъ возрастаю; когда же x продолжаетъ увеличиваться отъ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ до a ,

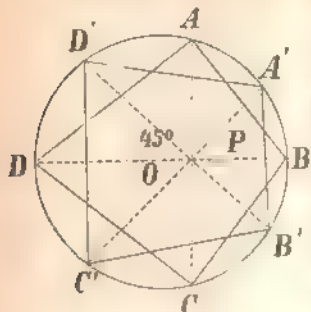


Черт. 119.



Черт. 120.

y^2 уменьшается; слѣд. количество y^2 , а слѣд. и y имѣетъ *maxim*ъ, когда обѣ хорды одинаково наклонены къ диаметру OP ; самый максимум y -ка равенъ $2R^2 - a^2$.



Черт. 121.

Затѣмъ, такъ какъ площадь уменьшается когда x возрастаетъ отъ $\frac{a + \frac{1}{2}}$ до a , т.-е. до того момента, когда хорда BD становится перпендикулярна къ диаметру OP , то ясно, что если эта хорда будетъ продолжать вращаться около точки P , площадь послѣдовательно пройдетъ черезъ всѣ предшествовавшія состоянія, сл. достигнетъ минимума, когда одна изъ хордъ совпадетъ съ диаметромъ OP ; самый минимумъ $= 2R^2 - a^2$.

Резюме: когда прямой уголъ совершаетъ полный оборотъ около точки P , площадь четырехугольника проходитъ дважды чрезъ максимумъ, равный

$A'B'C'D'$ и дважды чрезъ минимумъ, равный $ABID$.

636. Непрямой способъ. Сущность этого метода, предложеннаго *Симономъ Тюилъс*, можно резюмировать такъ: пусть будетъ y нѣкоторая функция переменнаго x , максимумъ или минимумъ которой мы желаемъ найти. Съ этою цѣлью предложимъ себѣ найти, какъ нужно взять x , чтобы функция имѣла данную величину m , которую на время оставляемъ произвольною; рѣшая эту вспомогательную задачу, мы получимъ ур—ніе въ x ; и если это ур—ніе будетъ такое, которое мы можемъ рѣшить (наприм. квадратное, биквадратное), то опредѣлимъ условій возможности вопроса, мы и найдемъ предѣлы неопредѣленнаго количества m ; эти предѣлы вообще и будутъ максимумъ или минимумъ m , т. е. функции.

Такимъ образомъ здѣсь максимумъ и минимумъ опредѣляются не прямо, а косвенно, какъ результаты изслѣдованія условій возможности вопроса. Примѣры этого рода мы имѣли въ главѣ XII. Вотъ еще примѣры примѣненія косвеннаго метода.

637. Вопросъ. Найти максимумъ и минимумъ квадратнаго тринома $ax^2 + bx + c$.

Положивъ $ax^2 + bx + c = m$, гдѣ m произвольное количество, рѣшаемъ это ур—ніе относительно x ; найдемъ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4am}}{2a} \dots (1).$$

Мы ищемъ дѣйствительныя значенія переменнаго x , при которыхъ триномъ получаетъ данное значеніе m ; но чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы подрадикальное количество не было отрицательно: слѣд. триномъ можетъ получать только такія дѣйствительныя значенія m , которыя удовлетворяютъ неравенству

$$b^2 - 4ac + 4am \geq 0, \text{ или } 4am \geq 4ac - b^2.$$

Для опредѣленія отсюда предѣла для m , придется обѣ части неравенства дѣлить на $4a$, причемъ отъ знака a будетъ зависѣть или сохраненіе знака неравенства, или перемена его на обратный. Отсюда два случая:

I. $a > 0$. Въ этомъ случаѣ дѣля на $4a$, мы не измѣнимъ смысла неравенства, и получимъ:

$$m \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$$

т.-е. m не можетъ быть меньше $\frac{4ac - b^2}{4a}$, слѣд. *минимумъ количества m равенъ* $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Подставляя это значеніе m въ формулу (1), находимъ соответствующее значеніе независимаго переменнаго: $x = -\frac{b}{2a}$.

II. $a < 0$. Въ этомъ случаѣ дѣля на $4a$, измѣнимъ знакъ неравенства, и получимъ:

$$m \leq \frac{4ac - b^2}{4a},$$

т.-е. m должно быть меньше и, въ крайнемъ случаѣ, равно $\frac{4ac - b^2}{4a}$; слѣдов. $\frac{4ac - b^2}{4a}$ есть *максимумъ* тринома. Соответствующее значеніе x выражается опять формулою $x = -\frac{b}{2a}$. Итакъ

При $a > 0$ триномъ имѣетъ *минимумъ*, при $a < 0$ онъ имѣетъ *максимумъ*; *максимумъ и минимумъ выражаются формулою* $\frac{4ac - b^2}{4a}$; *а соответствующія значенія независимаго переменнаго формулою: $x = -\frac{b}{2a}$.*

Найденное значеніе $\frac{4ac - b^2}{4a}$ представляетъ, такимъ образомъ, наибольшее или наименьшее значеніе функціи; но пока не видно, чтобы это были максимумъ или минимумъ относительно. Нужно еще доказать это, т.-е. доказать, что наирим. найденное минимальное значеніе тринома дѣйствительно меньше двухъ смежныхъ съ нимъ значеній функціи. Для этого мы должны вычислить два значенія тринома, которыя онъ имѣетъ при двухъ значеніяхъ x : одномъ, немного меньшемъ $-\frac{b}{2a}$, другомъ, немного большемъ $-\frac{b}{2a}$. Называя буквою h абсолютную величину нѣкотораго весьма малаго количества, вычислимъ величины тринома при $x = -\frac{b}{2a} - h$ и при $x = -\frac{b}{2a} + h$. Приведемъ триномъ къ виду

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right],$$

подставляемъ сюда сначала $-\frac{b}{2a} - h$, потомъ $-\frac{b}{2a} + h$ вмѣсто x ; въ обоихъ случаяхъ находимъ, что триномъ беретъ видъ

$$P = \frac{4ac - b^2}{4a} + ah^2.$$

Замѣчая, что, 1) при $a > 0$, ah^2 не только существенно положительная, находимъ, что $P > \frac{4ac - b^2}{4a}$, т.-е. что дробь $\frac{4ac - b^2}{4a}$ меньше двухъ соседнихъ съ нею значеній тринома; дробь эта, слѣдоват., дѣйствительно представляетъ относительный минимумъ функціи; 2) при $a < 0$, ah^2 есть количество суще-

ственно отрицательное, а потому въ этомъ случаѣ $P < \frac{4ac - b^2}{4a}$, и слѣд, дробь $\frac{4ac - b^2}{4a}$ больше двухъ смежныхъ съ нею значеній тринома, т.-е. представляетъ относительный максимумъ функціи.

Результаты эти вполне согласны съ выводами § 585.

638. Примеръ I. *Найти максимум или минимум тринома*

$$2x^2 - 5x + 7.$$

Положивъ $2x^2 - 5x + 7 = m$ и рѣшивъ относительно x уравненіе

$$2x^2 - 5x + 7 - m = 0,$$

имѣемъ

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8(7 - m)}}{4}.$$

Для дѣйствительности x необходимо, чтобы было $25 - 8(7 - m) \geq 0$, или $-31 + 8m \geq 0$, откуда $m \geq \frac{31}{8}$.

Заключаемъ, что m не должно быть меньше $\frac{31}{8}$, сл. $\min. (m) = \frac{31}{8}$, а соответствующее значеніе $x = \frac{5}{4}$.

Для проверки беремъ $x = \frac{5}{4} \pm h$, гдѣ h бесконечно-мало, и при этомъ значеніи x находимъ величину тринома, именно: $2\left(\frac{5}{4} \pm h\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4} \pm h\right) + 7$ или, по упрощеніи, $\frac{31}{8} \pm 2h^2$. Итакъ, при двухъ значеніяхъ x , смежныхъ съ $\frac{5}{4}$, триномъ получаетъ величины, большія $\frac{31}{8}$, ибо $2h^2$ — положительно; слѣдов. $\frac{31}{8}$ есть дѣйствительно minimum тринома.

639. Примеръ II. *Найти максимум и минимум функціи*

$$cx^2 - b(a - x)^2.$$

Приравнивая это выраженіе m , расположивъ по степенямъ x и собравъ всѣ члены въ первую часть, имѣемъ уравненіе

$$(c - b)x^2 + 2abx - (a^2b + m) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2b^2 + (c - b)(a^2b + m)}}{c - b}.$$

Для дѣйствительности x необходимо, чтобы m удовлетворяло неравенству $a^2b^2 + (c - b)(a^2b + m) \geq 0$, или $(c - b)m + a^2bc \geq 0$. Рѣшая это неравенство, различаемъ два случая:

1) Если $c - b > 0$, то $m \geq \frac{a^2bc}{b - c}$, откуда minimum $(m) = \frac{a^2bc}{b - c}$, а соответствующее значеніе x есть $x = \frac{ab}{b - c}$.

2) Если $c - b < 0$, то $m < \frac{a^2bc}{b-c}$ откуда максимум $(m) = \frac{a^2bc}{b-c}$, а $x = \frac{ab}{b-c}$.

Для проверки подставляемъ въ данное выраженіе вмѣсто x два значенія, смежныя съ $\frac{ab}{b-c}$, именно $\frac{ab}{b-c} \pm h$; находимъ:

$$c \left(\frac{ab}{b-c} \pm h \right)^2 - b \left(a - \frac{ab}{b-c} \pm h \right)^2,$$

или, по упрощеніи, $\frac{a^2bc}{b-c} + (c-b)h^2$. При $c-b > 0$, членъ $(c-b)h^2$ существенно положителенъ; а это значить, что при x смежныхъ съ $\frac{ab}{b-c}$ триномъ больше, нежели $\frac{a^2bc}{b-c}$; послѣднее выраженіе есть, слѣдоват., минимумъ тринома. При $c-b < 0$, членъ $(c-b)h^2$ отрицателенъ; это значить, что величины тринома при x смежныхъ съ $\frac{ab}{b-c}$ меньше $\frac{a^2bc}{b-c}$; слѣдов. эта дробь есть максимумъ тринома.

640. Прямыя III. Данъ кругъ радіуса R , вписанный въ прямоуг. углъ. Провести къ этому кругу касательную такъ, чтобы площадь отсѣкаемого ею въ углѣ треугольника ΔOVB была миним.

Пусть $OA = x$, $OB = y$. Площадь $\Delta OVB = \frac{1}{2}xy$; чтобы представить ее въ функціи одного переменнаго, выразимъ, что прямая AB касательна къ кругу C ; имѣемъ $AB = BF + FA = BE + AD = y - R + x - R = x + y - 2R$; съ другой стороны, такъ какъ $AB^2 = x^2 + y^2$, связь между x и y будетъ: $(x + y - 2R)^2 = x^2 + y^2$. Итакъ, ур-нія задачи суть (называя площадь ΔOVB чрезъ m^2):

$$xy = 2m^2, \quad 2R(x + y) = xy + 2R^2.$$

Подставляя во второе ур-ніе вмѣсто xy его величину $2m^2$, имѣемъ:

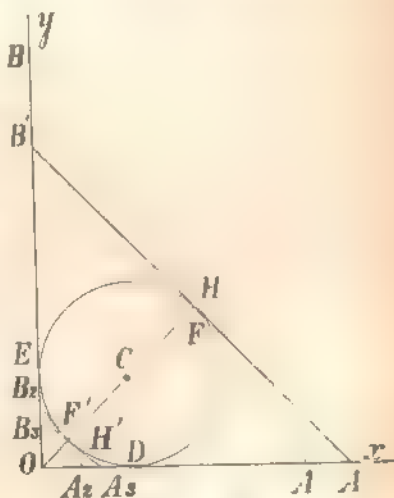
$$xy = 2m^2 \quad \text{и} \quad x + y = \frac{m^2 + R^2}{R};$$

такимъ образомъ видно, что неизвѣстныя x и y суть корни ур-нія

$$X^2 - \frac{m^2 + R^2}{R}X + 2m^2 = 0,$$

откуда

$$X = \left\{ \frac{x}{y} \right\} = \frac{m^2 + R^2}{2R} \pm \sqrt{\left(\frac{m^2 + R^2}{2R} \right)^2 - 2m^2} = \frac{m^2 + R^2 \pm \sqrt{m^4 - 6R^2m^2 + R^4}}{2R}$$



Черт. 122.

Для действительности x и y необходимо, чтобы было

$$m^4 - 6R^2m^2 + R^4 \leq 0, \quad \text{или} \quad [m^2 - R^2(3 + \sqrt{8})][m^2 - R^2(3 - \sqrt{8})] \geq 0.$$

Это неравенство будет удовлетворено, если количеству m^2 дадим значения, лежащие вне корней тринома, т.-е.: 1) значения, содержащиеся между 0 и $R^2(3 - 2\sqrt{2})$; 2) значения, большие $R^2(3 + 2\sqrt{2})$. Максимум значений первого ряда есть $R^2(3 - 2\sqrt{2})$; минимум значений второго ряда равен $R^2(3 + 2\sqrt{2})$.

Что касается минимума, то значения x и y , ему соответствующие, суть: $x = y = \frac{m^2 + R^2}{2R} = R(2 \pm \sqrt{2})$. Равенство x и y показывает, что Δ минимальной площади есть равнобедренный прямоугольный $\Delta AOB'$, которого гипотенуза есть касательная AB въ конечной точке диаметра-биссектора OC данного угла.

Что касается максимума $R^2(3 - 2\sqrt{2})$, то онъ не можетъ соответствовать треугольникамъ, образуемымъ касательными, проводимыми къ дугѣ ED , ибо площади этихъ треугольниковъ измѣняются отъ $+\infty$ до $+\infty$, слѣд. не имѣютъ максимума; съ другой стороны, и самая величина максимума, $R^2(3 - 2\sqrt{2})$, меньше R^2 . Они соответствуютъ треугольникамъ, образуемымъ касательными къ дугѣ DE . Въ самомъ дѣлѣ, площади этихъ треугольниковъ измѣняются отъ 0 до 0 и слѣд. имѣютъ максимумъ. Обозначивъ: $OA_2 = x$, $OB_2 = y$, имѣемъ: $A_1B_2 = EB_2$, $DA_2 = R - x = R - y = 2R - x - y$, и ур—нія этой новой задачи будутъ:

$$xy = 2m^2, \quad x^2 + y^2 = (2R - x - y)^2;$$

они не отличаются отъ ур—ній предыдущей задачи, и изслѣдуя подрадикальный триномъ, мы должны были, на ряду съ минимумомъ первой серии Δ -овъ, найти и максимумъ второй серии.

641. Прямая IV. Изъ всѣхъ прямоугольныхъ трехугольниковъ одинаковой высоты h (опущенной на гипотенузу) у какого периметръ имѣетъ наименьшую величину?

Пусть будутъ: x и y — катеты, z — гипотенуза и $2p$ — периметръ {треугольника; ур—нія задачи суть:

$$x + y + z = 2p, \quad xy = hz, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Изъ перваго: $x + y = 2p - z$, или $(x + y)^2 = (2p - z)^2$; затѣмъ, прибавивъ къ третьему удвоенное второе, имѣемъ:

$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2 + 2hz, \quad \text{или} \quad (x + y)^2 = z^2 + 2hz;$$

приравнивая оба выражения $(x + y)^2$, имѣемъ ур—ніе въ z

$$(2p - z)^2 = z^2 + 2hz,$$

изъ котораго

$$z = \frac{2p^2}{h + 2p}.$$

Слѣдовательно

$$x + y = 2p - \frac{2p^2}{h + 2p} = \frac{2ph + 2p^2}{h + 2p} = 2p \cdot \frac{h + p}{h + 2p}; \quad xy = hz = \frac{2p^2h}{h + 2p}.$$

Итакъ, x и y суть корни квадратнаго уравненія

$$X^2 - 2p \cdot \frac{h+p}{h+2p} \cdot X + \frac{2hp^2}{h+2p} = 0.$$

Изъ него

$$X = \left\{ \frac{x}{y} \right\} = p \cdot \frac{h+p}{h+2p} \pm \sqrt{p^2 \cdot \left(\frac{h+p}{h+2p} \right)^2 - \frac{2hp^2}{h+2p}},$$

а какъ подрадикальное выраженіе приводится къ $\frac{p^2}{(h+2p)^2} (p^2 - h^2 - 2hp)$, то

$$X = \frac{p}{h+2p} (h+p \pm \sqrt{p^2 - h^2 - 2hp}).$$

Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы p удовлетворяло неравенству $p^2 - 2ph - h^2 \geq 0$, или

$$[p - h(1 + \sqrt{2})] \cdot [p - h(1 - \sqrt{2})] \geq 0.$$

Отсюда известнымъ образомъ заключаемъ, что неравенство удовлетворяется двумя сериями значеній p , а именно: 1) всеми $p < h(1 - \sqrt{2})$; 2) всеми $p > h(1 + \sqrt{2})$; слѣд. $h(1 - \sqrt{2})$ есть максимумъ p , а $h(1 + \sqrt{2})$ минимумъ p .

Что касается минимума, равнаго $h(1 + \sqrt{2})$, то отвечающія ему значенія x и y суть:

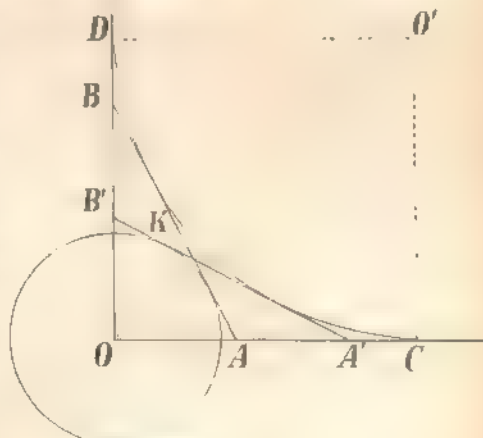
$$x = y = \frac{h(1 - \sqrt{2})}{h(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{h}{3 + 2\sqrt{2}} = h\sqrt{2}.$$

Слѣд. изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковой высоты, равнобедренный имѣетъ наименьшій периметръ.

Что касается найденнаго максимума, то, будучи отрицательнымъ, онъ не можетъ относиться къ данному геометрическому вопросу. Но замѣчая, что при $p = h(1 - \sqrt{2})$, количества x и y отрицательны, а z положительно, мы, перемѣнивъ въ уравненіи вопроса знаки количества x , y и p , найдемъ уравненія:

$$x + y = z - 2p, \quad xy = -hz, \\ x^2 + y^2 = z^2$$

Этимъ уравненіемъ отвѣчаетъ вопросъ: Изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковой высоты h у какого избытокъ суммы катетовъ надъ гипотенузою будетъ наименьшій? Рѣшивъ этотъ вопросъ, найдемъ, что искомый треугольникъ есть равнобедренный, и что минимумъ избытка дается абсолютною величиною отрицательнаго максимума предыдущей задачи.



Черт. 123.

Примечание. Если бы требовалось из всех прямоугольных треугольников одинакового периметра найти такой, у которого высота, опущенная на гипотенузу, была бы наибольшая; тогда p была бы величина данная и нужно бы было найти h , удовлетворяющую неравенству

$$h^2 + 2ph - p^2 \leq 0, \text{ или } [h = p(\sqrt{2} - 1)][h + p(1 + \sqrt{2})] \leq 0.$$

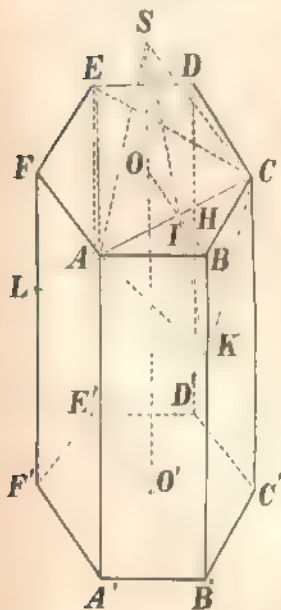
Отсюда нашли бы, что максимум $(h) = p(\sqrt{2} - 1)$; соответствующие значения x и y равны между собою, и общая величина их есть

$$x = y = p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 + 1} = p(2 - \sqrt{2}).$$

Эти результаты легко найти геометрически. Известно, что для построения прямоугольного треугольника по данным: периметру и высоте на гипотенузу, откладывают на сторонах прямого угла $OC = OD = p$; возводят в точках C и D перпендикуляры, которых пересечение определяет центр O' круга, вписанного в искомый $\triangle AOB$; из точки O как из центра радиусом OK , равным высоте, описывают другой круг. Гипотенуза AB должна быть касательною к обоим кругам O и O' , след. вообще задача имеет два решения одинаковая, ибо тр-ки OAB и $O'A'B'$ равны, так как $OA = O'B'$ и $OA' = OB$.

Задача возможна, когда обе окружности лежат одна вне другой; для того, чтобы они были касательны, необходимо чтобы $OO' = h \leq p$, а как $OO' = p/\sqrt{2}$, то $h \leq p \cdot p/\sqrt{2}$, или $h = p(\sqrt{2} - 1)$. Если h будет иметь большую величину, окружности пересекутся, и задача станет невозможна.

642. Пример V. Задача о пчелиных ячеек. На продолжении оси OO' правильной шестиугольной призмы возьмем точку S ; через эту точку и через каждую из сторон правильного треугольника ACE , полученного соединением через одну вершин верхнего основания призмы, проведем три плоскости, по которым отроем от призмы три тетраэдра $BACK$, $DCEN$ и $FEAL$ и заменим их одним тетраэдром $SACE$, поставленным над призмой. Новый многогранник будет ограничен сверху тремя ромбами $SAKC$, $SCEN$, $SEAL$; объем его всегда равен объему взятой призмы, где бы ни взять точку S на оси, ибо пирамида $SACE$ составлена из трех пирамид $SOAC$, $SOCE$ и $SOEA$, соответственно равных трем отрезанным пирамидам; так пирамида $SOAC$ — пир. $KABC$, ибо они имеют равные основания ($\triangle OAC = \triangle ABC$, как половины ромба $ABCO$) и равны высоты SO и KB (по равенству прямоугольных треугольников SOI и KBI). Имя равные объемы, многогранники имеют, однако, различные поверхности, и задача состоит в определении точки S так, чтобы поверхность нового десятигранника имела наименьшую величину.



Черт. 124.

Пусть $AB = a$, $BB' = OO' = b$, $BK = SO = x$; въ такомъ случаѣ: $AC = a\sqrt{3}$;

$$SI = \frac{1}{2} SO^2 + OI^2 = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + a^2}; \text{ слѣд. } SK = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + a^2};$$

площадь ромба $SAKC$, равная полупроизведенію діагоналей AC и SK , выразится формулою $\frac{1}{2} a \sqrt{3a^2 + 12x^2}$; площадь трапеція $CKB'C'$ — формулою $\frac{1}{2} a(2b - x)$. Слѣдовит., поверхность многогранника, не считая основанія, выражается формулою $\frac{3}{2} a \sqrt{3a^2 + 12x^2} + 3a(2b - x)$, или $3a \left[\frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b - x \right]$. Постоянный множитель $3a$ не вліяетъ на условія \max и \min ., и потому вопросъ приводится къ опредѣленію минимума скобочнаго выраженія. Положимъ

$$\frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b - x = m$$

и освободивъ это уравненіе отъ радикала, найдемъ

$$8x^2 - 8(m - 2b)x + 3a^2 - 4(m - 2b)^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{2(m - 2b) \pm \sqrt{6[(m - 2b)^2 - a^2]}}{4}.$$

Чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы было

$$2(m - 2b)^2 - a^2 \geq 0, \text{ или } (m - 2b)^2 \geq \frac{a^2}{2}, \text{ или } m - 2b \geq \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда миним. $(m) = 2b + \frac{a}{\sqrt{2}}$. Помноживъ на $3a$, найдемъ, что искомая минимальная поверхность =

$$6ab + \frac{3a^2}{\sqrt{2}},$$

а соответствующая величина $x = \frac{1}{4} a \sqrt{2}$

Формула для x показываетъ, что разность двухъ смежныхъ боковыхъ реберъ должна быть — четверти діагонали квадрата, построеннаго на сторонѣ шестиугольника, служащаго основаніемъ призмы.

Поверхность призмы, не считая основанія, была бы $6ab + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; слѣд. поверхность многогранника минимальной поверхности меньше на $\frac{3}{2} a^2 (\sqrt{3} - \sqrt{2})$ поверхности шестиугольной призмы, имѣющей то же основаніе и тотъ же объемъ.

Легко видѣть, что для треугольника KBI имѣетъ мѣсто пропорція

$$BK : BI : IK = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3},$$

откуда (при помощи тригонометріи) найдемъ, что уголъ $BKI = 35^\circ 15' 52''$.

Примѣчаніе. Пчелы строятъ ячейки своихъ сотовъ именно въ формѣ такихъ десятигранниковъ съ минимальною поверхностью; шестиугольникъ обра-

зуютъ входъ въ ячейку; медь кладется на дно; пчелы строятъ сначала ромбы, затѣмъ боковыя трапеціи. Если вообразить себѣ плоскость, заполненную шестиугольниками и построить на каждомъ изъ нихъ ячейку, то вершины ячеекъ будутъ находиться все въ одной плоскости, параллельной первой. Затѣмъ, если къ такой фигурѣ приложить другую выпуклостями во впадины первой, получимъ совокупность ячеекъ, называемую *сотомъ*. Улей наполняется сотами, помѣщенными другъ надъ другомъ такъ, чтобы двѣ пчелы могли вѣстѣ пройти между двумя последовательными сотами.

Итакъ: 1, наклоненіе трехъ ромбовъ, образующихъ дно, таково, что ячейки при давленіи объемъ имѣютъ минимальную поверхность; 2) правильнѣй треугольникъ, квадратъ и правильнѣйшій шестиугольникъ суть единственные правильные многоугольники, которыми можно заполнить плоскость безъ промежутковъ, и изъ нихъ шестиугольникъ, при той же площади, имѣетъ наименьшій контуръ. Такимъ образомъ является двойная экономія на воскъ. — Геометрическое строеніе пчелиныхъ ячеекъ, замѣченное еще Паллусомъ, геометромъ IV вѣка до Р. Х., было изучаемо сначала Филиппомъ Маральди (1712 г.), затѣмъ Реомюромъ, который и предложилъ вопросъ о минимумѣ (смыслу Кенига и Махлеру). Последний впервые далъ точное теоретическое рѣшеніе вопроса. Для угла ромба Кенигъ нашелъ $109^{\circ}26'$ вмѣсто $109^{\circ}28'16''$.

643. Примеръ VI. Зная сумму $2a$ двухъ параллельныхъ хордъ круга радиуса R , опредѣлить изъ положеніе такъ, чтобы расстояние этихъ хордъ имѣло наибольшую или наименьшую величину.

Пусть длины параллельныхъ хордъ будутъ x и y ; прямо имѣемъ, назвавъ расстояние между ними буквою m :

$$\sqrt{R^2 - x^2} \pm \sqrt{R^2 - y^2} = m,$$

гдѣ знакъ $(+)$ относится къ случаю, когда хорды расположены по обѣ, а $(-)$ по одну сторону центра. Затѣмъ, по условію:

$$x + y = a.$$

Возвышая обѣ части перваго уравненія въ квадратъ, имѣемъ:

$$2R^2 - (x^2 + y^2) \pm 2\sqrt{(R^2 - x^2)(R^2 - y^2)} = m^2,$$

или

$$(m^2 - 2R^2 + x^2 + y^2)^2 = 4(R^2 - x^2)(R^2 - y^2).$$

Раскрывая и дѣлая приведеніе, имѣемъ:

$$m^4 - (x^2 + y^2)^2 - 4m^2R^2 \pm 2m^2(x^2 + y^2) - 4x^2y^2 = 0.$$

Изъ втораго уравненія находимъ: $x^2 + y^2 = a^2 - 2xy$; слѣд.

$$m^4 - (a^2 - 2xy)^2 - 4m^2R^2 \pm 2m^2(a^2 - 2xy) - 4x^2y^2 = 0,$$

откуда

$$xy = \frac{(m^2 - a^2)^2 - 4m^2R^2}{4(a^2 - m^2)}.$$

По произведенію и суммѣ x и y можемъ выразить эти количества какъ корни квадратнаго ур—нія

$$u^2 - au + \frac{(m^2 + a^2)^2 - 4m^2R^2}{4(a^2 + m^2)} = 0.$$

Условіе дѣйствительности корней таково:

$$a^2(a^2 + m^2) - (m^2 + a^2)^2 + 4m^2R^2 > 0, \quad \text{или} \quad m^2(-m^2 - a^2 + 4R^2) >$$

Такъ какъ по свойству геометрическаго вопроса $a^2 < 4R^2$, то предыдущее неравенство можно написать такъ:

$$(\sqrt{4R^2 - a^2} - m)(\sqrt{4R^2 - a^2} + m) \geq 0 \quad (1)$$

Когда $m > 0$, изъ неравенства (1) находимъ: $m \leq \sqrt{4R^2 - a^2}$, сл. максимум (m) $= \sqrt{4R^2 - a^2}$, а соответствующія значенія x и y суть $x = y = \frac{a}{2}$. Очевидно, эти максимум принадлежатъ функции $\sqrt{R^2 - x^2}$ и $\sqrt{R^2 - y^2}$, ибъ другая функция при $x = y = \frac{a}{2}$ обращается въ 0.

Когда $m < 0$, неравенство (1) даетъ: $m > -\sqrt{4R^2 - a^2}$, откуда минимум (m) $= -\sqrt{4R^2 - a^2}$. Этотъ минимум принадлежитъ функции $-\sqrt{R^2 - x^2}$ и $-\sqrt{R^2 - y^2}$. Определение миним или макс. этой функции привело бы, послѣ возвышенія въ квадратъ, къ прежнему ур—нію въ a .

Для провѣрки найденнаго максимум'а $= \sqrt{4R^2 - a^2}$, которому соответствуютъ $x = y = \frac{a}{2}$, даемъ количеству $\frac{a}{2}$ безконечно малое приращеніе δ , т.е. полагаемъ $x = \frac{a}{2} + \delta$; въ такомъ случаѣ изъ соотношенія $x + y = a$, находимъ: $y = \frac{a}{2} - \delta$; вопросъ приводится къ провѣркѣ неравенства

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2} + \delta\right)^2} + \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2} - \delta\right)^2} < \sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Такъ какъ обѣ части этого неравенства положительны, то возвысивъ въ квадратъ, замѣнимъ эквивалентнымъ ему неравенствомъ

$$4\sqrt{\left[R^2 - \left(\frac{a}{2} + \delta\right)^2\right]\left[R^2 - \left(\frac{a}{2} - \delta\right)^2\right]} < 4R^2 - a^2 + 4\delta^2;$$

замѣняя, что $4R^2 - a^2$ положительно, можемъ еще разъ возвысить въ квадратъ, не измѣняя смысла неравенства; и по упрощенію находимъ: $-32R^2\delta^2 < +32R^2\delta^2$, что вѣрно.

644. Третій способъ. Этотъ способъ основанъ на самомъ опредѣленіи максимум'а и минимум'а функции. Пусть данная функция есть квадратный триномъ $ax^2 + bx + c$, и пусть она при $x = x'$ достигаетъ максимум'а; въ такомъ случаѣ, каковъ бы ни былъ знакъ произвольнаго количества h , должно имѣть мѣсто неравенство

$$a(x' + h)^2 + b(x' + h) + c - (ax'^2 + bx' + c) < 0,$$

или

$$h(2ax' + b) + ah^2 < 0;$$

такъ какъ h произвольно-мало, то первая часть неравенства имѣетъ знакъ перваго члена; поэтому она будетъ мѣнять знакъ съ переменою знака h , и слѣд. не будетъ постоянно отрицательною, пока первый членъ будетъ отличенъ отъ нуля; другими словами, неравенство можетъ существовать при взмѣненіи знака h только тогда, когда первый членъ будетъ тождественно $= 0$, т.-е. когда $2ax' + b = 0$, или $x' = -\frac{b}{2a}$. Но при этомъ значеніи x' неравенство приводится къ $ah^2 < 0$, и потому, чтобы оно было возможно, необходимо, чтобы было $a < 0$.

Итакъ, при $a < 0$ триномъ имѣетъ максимумъ, когда $x' = -\frac{b}{2a}$. Самый же $\text{maximum} = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что триномъ имѣетъ минимумъ при $x' = -\frac{b}{2a}$, если $a > 0$. Самый минимумъ выражается тою же формулою.

Этотъ способъ, принадлежащій къ числу вступальныхъ, важенъ для насъ въ томъ отношеніи, что даетъ возможность элементарнаго опредѣленія макс. и мин. въ такихъ случаяхъ, въ какихъ вышеизложенные элементарные методы не применимы. Найдемъ помощью этого способа

645. Maxima и minima кубической функции $ax^3 - bx^2 - cx + d$. Пусть x и будетъ то значеніе переѣннаго, при которомъ функция имѣетъ максимумъ или минимумъ; въ такомъ случаѣ, ваваяши буквою h произвольно малое приращеніе переѣннаго x , будемъ имѣть

$$a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d - (ax^3 + bx^2 + cx + d) \leq 0,$$

гдѣ верхній знакъ неравенства относится къ случаю максимум'а, нижній — къ случаю минимум'а; по упрощеніи, найдемъ

$$(3ax^2 + 2bx + c)h + (3ax + b)h^2 + ah^3 \leq 0 \dots (1).$$

Пока первый членъ, при h весьма маломъ, не равенъ нулю, первая часть будетъ мѣнять знакъ имѣетъ съ h , и слѣд. не будетъ постоянно отрицательною, или постоянно положительною, какъ требуетъ неравенство; итакъ, значенія x , дающія максимумъ или минимумъ функции, должны удовлетворять уравненію

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \dots (2).$$

Первое условіе чтобы функция имѣла макс. или мин., состоитъ въ томъ, чтобы корни уравненія (2) были действительны, т.-е. чтобы $b^2 - 3ac > 0$; но равенство $b^2 - 3ac = 0$ необходимо исключить, ибо при немъ не м. б. ни макс., ни мин. Въ самомъ дѣлѣ, если $b^2 - 3ac = 0$, корни уравненія (2) действительны и равны и общая величина ихъ $x = -\frac{b}{3a}$, откуда $3ax + b = 0$, т.-е. второй членъ пер. (1) обращается въ нуль, и первая часть этого неравенства обращается въ ah^3 ; поэтому равенство между максимумомъ (или минимумомъ) значеніемъ функции, если бы такое существовало, и смежными ей значеніями, выражалось бы количествомъ ah^3 , мѣняющимъ знакъ имѣетъ съ h . Итакъ, первое

условіе, необходимое для того, чтобы функція имѣла макс. или мин., есть $b^2 - 3ac > 0$.

Пусть это условіе удовлетворяется; въ такомъ случаѣ корни уравненія (2) будутъ действительные и неравные, и сл. будутъ отличны отъ $-\frac{b}{3a}$, т.-е. необходимо будетъ:

$$3ax' + b < 0, \quad 3ax'' + b < 0.$$

Пусть $x' < x''$; тогда

$$x' < -\frac{b}{3a} < x'' \dots (3)$$

ибо $-\frac{b}{3a}$ есть полусумма корней.

Затѣмъ различаемъ два случая.

Первый случай: $a > 0$.—Неравенства (3) въ этомъ случаѣ можно представить въ видѣ:

$$3ax' < -b < 3ax'',$$

откуда

$$3ax' + b < 0 \quad \text{и} \quad 3ax'' + b > 0;$$

слѣд. каковъ бы ни былъ знакъ весьма малаго количества h , будетъ

$$(3ax' - b)h^2 + ah^3 < 0 \quad \text{и} \quad (3ax'' - b)h^2 + ah^3 > 0.$$

Первое неравенство показываетъ, что приращенія функціи при значеніяхъ x , смежныхъ съ x' , отрицательны, и при значеніяхъ x , смежныхъ съ x'' , положительны, слѣд.: при $x = x'$ функція имѣетъ максимумъ, а при $x = x''$ она имѣетъ minimumъ.

Второй случай $a < 0$.—Неравенства (3) въ этомъ случаѣ, по умноженіи на положит. количество $-3a$, даютъ:

$$3ax' + b > 0 \quad \text{и} \quad 3ax'' + b < 0;$$

слѣд. каковъ бы ни былъ знакъ h , имѣемъ два неравенства:

$$(3ax' + b)h^2 + ah^3 > 0 \quad \text{и} \quad (3ax'' + b)h^2 + ah^3 < 0,$$

изъ которыхъ выводимъ заключеніе, обратное предыдущему.

Отсюда правило: чтобы найти максіма или миніма кубической функціи $ax^3 + bx^2 + cx + d$, приравниваемъ нулю полиномъ $3ax^2 + 2bx + c$, составленный умноженіемъ каждаго члена функціи на показателя буквы x въ этомъ членѣ, и уменьшеніемъ этого показателя на 1^ю; такъ, обр. получаемъ уравненіе

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \dots (1)$$

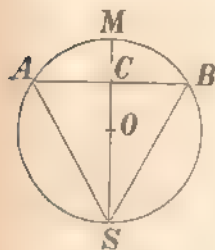
Если $b^2 - 3ac \leq 0$, функція не имѣетъ ни макс., ни минімумъ; если же $b^2 - 3ac > 0$, меньшему корню уравненія (1) соответствуетъ

*) Изъ этого слѣдуетъ, что послѣднимъ членомъ новаго полинома будетъ c , ибо послѣдній членъ дан. ой функціи, который можно написать въ видѣ dx^0 , дастъ, слѣд. по этому закону, $0 \cdot dx^{-1}$, или 0.

тажит, а большому минит, когда $a > 0$; напротив, меньшему коню соответствует минит, а большому — тажит, когда $a < 0$.

646. Примеръ. Найти тажит и минит разности объемов: конуса, вписаннаго въ данный шаръ и сферическаго сегмента, имѣющаго то же основаніе.

Вопросъ можно понимать двояко, а именно: высота конуса можетъ совпадать или не совпадать съ высотой сегмента. Въ первомъ предположеніи, означивъ MC буквою x , имѣемъ:



Черт. 126.

$$\text{объемъ конуса } SAB = \frac{1}{3} \pi x (2R - x)^2;$$

$$\begin{aligned} \text{объемъ сегмента } ABS &= \frac{1}{8} \pi (2R - x)^2 (3R - SC) \\ &= \frac{1}{8} \pi (2R - x)^2 (R + x). \end{aligned}$$

Разность между первымъ и вторымъ объемомъ выражается формулою: $-\frac{1}{8} \pi R (2R - x)^2$. Такъ какъ множитель $-\frac{1}{8} \pi R$ — постоянный, то измѣненія выраженія зависятъ отъ $(2R - x)^2$; но это выраженіе есть квадратъ, слѣд. оно имѣетъ минимумъ равный нулю, что имѣетъ мѣсто при $x = 2R$; а слѣд. выраженіе $-\frac{1}{8} \pi (2R - x)^2 R$ имѣетъ максимумъ при $x = 2R$, а какъ при этомъ x не можетъ, возрастая, превзойти $2R$, то полученный максимумъ есть абсолютный.

Во второмъ предположеніи:

$$\text{объемъ сегмента } AMB = \frac{1}{3} \pi x^2 (3R - x),$$

слѣд. разность между конусомъ и сегментомъ равна $\frac{1}{3} \pi x (2R - x)^2 - \frac{1}{3} \pi x^2 (3R - x)$ или

$$\frac{1}{3} \pi [2x^3 - 7Rx^2 + 4R^2x].$$

Измѣненія зависятъ отъ переменнаго множителя $2x^3 - 7Rx^2 + 4R^2x$, представляющаго кубичную функцію; значенія x , дающія этой функціи максимумъ и минимумъ, по правилу, суть корни квадратнаго уравненія

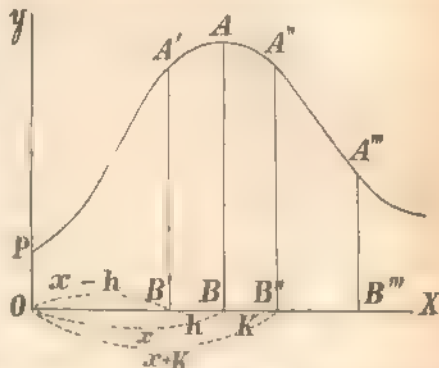
$$3 \cdot 2x^2 - 2 \cdot 7Rx + 4R^2 = 0. \text{ или } 6x^2 - 14Rx + 4R^2 = 0.$$

Эти корни суть: $x = \frac{R}{3}$, $x' = 2R$; а какъ коэффициентъ при x^2 положительнъ, то меньшему коню соответствуетъ максимумъ разности объемовъ $\frac{17}{81} R^3$, а большому ея минимумъ: $\frac{4}{3} \pi R^3$, причемъ этотъ минимумъ абсолютный.

647. Принципъ Фермата. Знаменитый французскій математикъ Ферма, въ одномъ изъ своихъ писемъ къ Паскалю и Робервалю, отъ 23 августа 1636 г. заявляетъ, что изъ всѣхъ своихъ отысканъ наибольшее значеніе онъ придаетъ методу опредѣленія максимальныхъ и минимальныхъ значеній во всевозможныхъ

задачу, основанную на принципе, который онъ считаетъ фундаментальнымъ. Этотъ принципъ легко понять, рассматривая функцию какъ ординату кривой.

Пусть ордината АВ представляетъ максимальное состояніе рассматриваемой функции, а абсцисса $OB = x$ соответствующее значеніе переменнаго. Принципъ Фермата состоитъ въ томъ, что всегда существуютъ такія два значенія независимаго переменнаго—одно $x - h$, немного меньшее x , другое $x + k$, немного большее x , которымъ соответствуютъ два значенія функции: $f(x - h)$ и $f(x + k)$ (или двѣ ординаты $A'B'$ и $A''B''$) равныя между собою. Въ самомъ дѣлѣ, функция, возрастающая, и приближаясь къ своему максимуму АВ, пройдетъ чрезъ свое значеніе $f(x - h)$, безконечно-близкое къ этому максимуму АВ; затѣмъ, достигнувъ максимума, она начнетъ убывать и, прежде чѣмъ дойдетъ до некотораго состоянія $A'''B'''$, меньшаго АВ, должна, по свойству непрерывности, пройти всѣ промежуточные состоянія, слѣд. между прочимъ, придетъ и чрезъ состояніе $A''B''$ или $f(x + k)$, равное $A'B'$ или $f(x - h)$ и безконечно-близкое къ АВ.



Черт. 127.

Такое же равенство имѣло бы мѣсто и тогда, если бы АВ изображала минимум функции.

Отсюда непосредственно вытекаетъ и самый методъ. Приравнявъ два значенія функции, одно, соответствующее $x - h$, другое $x + k$, гдѣ x есть значеніе переменнаго, дающее максимум или минимум функции, а h и k безконечно-малыя; такимъ образомъ получимъ уравненіе $f(x - h) = f(x + k)$. Очевидно, что если значенія переменнаго $x - h$ и $x + k$, дающія равныя значенія функции, сблизятся между собою, т.е. приблизятъ h и k къ нулю, то оба значенія функции будутъ приближаться къ максимуму (или мин.), и въ предѣлѣ, т.е. при $h = k = 0$, сольются съ максимумомъ (или мин.), а оба значенія переменнаго сольются съ тѣмъ значеніемъ, которое соответствуетъ максимуму (или мин.). Такимъ образомъ, въ предѣлѣ получится уравненіе въ x : $\varphi(x) = 0$, которому будетъ удовлетворять значеніе переменнаго x , дающее или максимум или минимум. Изъшивъ это уравненіе, найдемъ, вообще говоря, нѣсколько значеній для x , напр. $x = a, b, c, \dots$. Ничто не указываетъ, чтобы всѣ эти рѣшенія давали максимум или минимум функции; слѣд. для каждаго нужна проверка. Впрочемъ, если уравненіе $\varphi(x) = 0$ имѣетъ только одно рѣшеніе, и по свойству вопроса можно а priori заключить, что $f(x)$ имѣетъ max. или min., проверка будетъ не необходима.

На практикѣ поступаемъ такъ. Выразивъ всѣ неизвѣстныя черезъ одно x и положивъ $x - h = x'$, $x + k = x''$, въ уравненіи $f(x') = f(x'')$ делаемъ упрощенія, удаляя общія части и сокращая на $x' - x''$, въ оставшихся членахъ делаемъ $x' = x''$ равнымъ нулю, послѣ чего и получаемъ уравненіе $\varphi(x) = 0$.

Методъ Фермата есть болѣе общій изъ числа элементарныхъ методовъ опредѣленія максим. и миним. значеній функции. Въ историческомъ отношеніи онъ важенъ тѣмъ, что послужилъ зародышемъ, изъ котораго позднѣе развилось дифференціальное исчисленіе.

648. Примеръ I.—Изъ какой точки гипотенузы данного прямоугольнаго треугольника нужно опустить перпендикуляры на катеты, чтобы прямоугольникъ, образуемый ими со сторонами прямого угла, имѣлъ наибольшую площадь.

Взявъ точку E на гипотенузѣ и опустивъ изъ нея перпендикуляры ED и



Черт. 128

EF на катеты, образуемъ прямоугольникъ EDCF; когда точка E совпадаетъ съ A, прямоугольникъ превращается въ прямую AC, а его площадь въ нуль; если затѣмъ двигать точку E отъ A къ B, то площадь прямоугольника сначала будетъ увеличиваться, а потомъ начинаетъ уменьшаться, и когда точка E совпадаетъ съ B, площадь снова обращается въ нуль. Такимъ образомъ, измѣняясь отъ нуля до нуля, она необходимо проходитъ чрезъ максимумъ.

Пусть въ положеніи EDCF прямоугольникъ имѣетъ наибольшую площадь xy .

По принципу Фермата, всегда существуютъ такіе два бесконечно близкіе къ EDCF прямоугольника D'E'F'C и D''E''F''C, которыхъ площади равны, т.-е.

$$x'y' = x''y'' \dots (1)$$

Чтобы y выразить черезъ x , замѣчаемъ, что для всякаго положенія прямоугольника между его измѣреніями существуетъ соотношеніе (послѣ изъ подобія \triangle -въ BEF и BAC), выражающееся пропорціей $y : (a - x) = b : a$, откуда $y = \frac{b}{a}(a - x)$. Въ силу этого соотношенія можно исключить переменное y и представить (1) въ формѣ

$$\frac{b}{a}x'(a - x') = \frac{b}{a}x''(a - x''),$$

откуда: $ax' - x'^2 = ax'' - x''^2$, или $a(x' - x'') = (x' + x'')(x' - x'')$. Сокративъ на $x' - x''$, имѣемъ: $a = x' + x''$. Положивъ $x' - x'' = x$, получимъ уравненіе $2x = a$, котораго корень $x = \frac{a}{2}$ даетъ искомый максимумъ. (Отсюда, изъ

вышеприведенной пропорціи, найдемъ: $y = \frac{b}{2}$. Эти результаты показываютъ, что максимумъ площади прямоугольника даетъ точка, лежащая въ среднѣй гипотенузы. (Самый же максимумъ площади $= \frac{ab}{4}$ (половина площади \triangle -ка).

649. Примеръ II.—Данъ кругъ и прямая xy . Изъ всякаго треугольника, имѣющаго вершину въ точкѣ P, данной на этой прямой, а основаниемъ хорду AB, параллельную этой прямой, найти тотъ, площадь котораго имѣетъ наибольшую величину.

Различаемъ два случая, смотря по тому, пересекаетъ данная прямая xy кругъ O или нѣтъ.

I. Пусть прямая xy не пересекаетъ кругъ O. Задача имѣетъ максимумъ, потому что если перемѣщать хорду AB параллельно xy , отъ D къ D, она будетъ измѣняться отъ нуля до нуля, а слѣд. такимъ же образомъ будетъ измѣняться и

Д'АВ — равнобедренный и вписанный; площадь его — $\frac{3}{2} R^2 \sqrt{3}$. Итак: из всех равнобедренных вписанных треугольников правильный имеет наибольшую площадь.

II. Если прямая xu пересекает круг, то для каждой части круга получается максимум. Къ большому сегменту относится разорванный случай; для меньшаго, из уравнения $(x' - a) \sqrt{R^2 - x'^2} = (x'' - a) \sqrt{R^2 - x''^2}$ находимъ:

$$x = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 8R^2}}{4}.$$

Если параллель проходитъ черезъ центръ, то $a = 0$, и $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

C50 Методъ равныхъ корней. Пусть кривая PAQ (черт. 127) изображаетъ ходъ функции $f(x)$; давая функции частное значение m и решая уравнение $f(x) - m = 0$, мы определяемъ тѣ значения x , при которыхъ функция получаетъ эту величину m . Съ геометрически точки зрѣнія это приводится къ опредѣленію точекъ встрѣчи кривой съ параллелью, проведенною въ разстояніи m отъ оси x . Когда m мало разнится отъ максимума АВ, мы находимъ для x двѣ величины OB' и OB'' , малъ разниціи между собою; они дѣлаются равными между собою и OB , когда m обращается въ АВ. Итакъ, когда цѣлая въ x функция получаетъ при $x = \alpha$ максимумъ m , уравнение $f(x) - m = 0$ имѣетъ двѣ корни равныя α , и слѣд. его первая часть раздѣлится на $(x - \alpha)^2$. Въ самомъ дѣлѣ: если ур. $f(x) - m = 0$ имѣетъ корни α' и α'' , то $f(\alpha) - m = 0$ и $f(\alpha') - m = 0$; первое равенство показываетъ, что $f(x) - m$ дѣлится на $x - \alpha'$, равно, что тотъ же полиномъ дѣлится на $x - \alpha$; сл. онъ дѣлится и на $(x - \alpha')(x - \alpha'')$, и при $\alpha' = \alpha''$, на $(x - \alpha)^2$. Отсюда правило:

Чтобы найти максимумъ цѣлой функции, отнимъ разность $f(x) - m$ на $(x - \alpha)^2$ или на $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$, продолжая отысканіе до тѣхъ поръ, пока получится остатокъ первой степени, вида $Mx + N$; выражающъ, что этотъ остатокъ тождественно равенъ нулю при всякомъ x , полагая $M = 0$, $N = 0$; решивъ эти уравненія, и найдомъ $x = \alpha$, соответствующій максимуму, и самый этотъ максимумъ m .

Очевидно, то же относится и къ максимуму функций.

651. Примеръ. Изъ всего равнобедреннаго треугольника, описаннаго около круга, найти трѣхъ наименьшей площади.

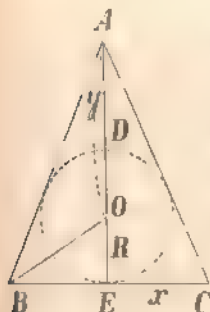
Если перечислять вершину А по высотѣ АЕ отъ D до бесконечности, то площадь \triangle -ка будетъ имѣваться отъ ∞ до ∞ , слѣд. имѣетъ минимумъ. Пусть половина основанія равна x , высота — $R + y$; чтобы выразить y черезъ x , изъ $\triangle ABE$, по свойству биссектриссы, имѣемъ $y : R = AB : x$, или $y^2 : R^2 = [(y + R)^2 + x^2] : x^2$, откуда найдемъ:

$$y = \frac{R(R^2 + x^2)}{x^2 - R^2}.$$

Черт. 130.

Подставляя это выраженіе въ формулу площади грѣ-ка, получимъ

$$\triangle ABC = x(y + R) = x \left(\frac{R(R^2 + x^2)}{x^2 - R^2} + R \right) = \frac{2Rx^4}{x^2 - R^2}.$$



Вопросъ приводится къ нахождению минимумъ а выражения $\frac{x^3}{x^2 + R}$. Приравнивая это выраженіе m , получаемъ уравненіе

$$x^3 - mx^2 + mR = 0.$$

Раздѣливъ первую часть его на $x^2 - 2x + a^2$, находимъ въ остаткѣ $(3x^2 - 2am)x + (mR^2 - 2x^3 + a^2m)$, откуда, следуя правилу, имѣемъ 2 уравненія

$$3a^2 - 2am = 0, \quad mR^2 - 2a^3 + a^2m = 0.$$

Изъ перваго находимъ: $m = \frac{3}{2}a$; подставляя во второе, получаемъ: $x = R\sqrt{3}$, слѣд. $m = \frac{3}{2}R\sqrt{3}$, а минимальная площадь $= 3R^2\sqrt{3}$; заключаемъ, что искомый треугольникъ—правильный.

II. Maxima и minima квадратной дроби $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

652 Первый методъ. Нужно опредѣлить x такъ, чтобы при всякомъ знамѣнѣ безконечно-малого h , имѣло мѣсто неравенство

$$\frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c}{a'(x+h)^2 + b'(x+h) + c'} - \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} > 0,$$

гдѣ знакъ $<$ относится къ случаю максимумъ а дроби, знакъ $>$ къ случаю ея минимумъ.

Умножая на произведеніе знаменателей, которое положительно, ибо положить $a'(x+h)^2 + b'(x+h) + c' = 0$, разлнсь безконечно мало отъ $a'x^2 + bx + c'$, имѣемъ одинаковый съ нимъ знакъ, находимъ неравенство:

$$[a(x+h)^2 + b(x+h) + c][a'x^2 + b'x + c'] - [a'(x+h)^2 + b'(x+h) + c'](ax^2 + bx + c) \leq 0,$$

которое, будучи упрощено и расположено по возрастающимъ степенямъ h , приводится къ:

$$h[(ab' - ba')x^2 + 2(ac - ca')x + bc' - cb] + h^2[(ab' - ba')x + ac' - ca] \leq 0. \quad (1).$$

Чтобы это выраженіе не переимѣняло знака вмѣстѣ съ h , коэффициентъ при h долженъ быть нулемъ; слѣд. значенія x , которыя могутъ дать дроби максимальное или минимальное значеніе, суть корни уравненія:

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb) = 0. \quad (2).$$

Итакъ первое условіе, чтобы дробь имѣла максимумъ или минимумъ, состоитъ въ томъ, чтобы ур. (2) имѣло корни дѣйствительные, т.-е. чтобы было

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb) \geq 0. \quad (3).$$

Взявъ равенство, т.-е. полагая, что ур. (2) имѣетъ корни равные, находимъ, что общая величина ихъ определяется равенствомъ: $x = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$, откуда

$$x(ab' - ba') + ac' - ca' = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что неравенство (1) привело бы къ равенству $0 = 0$, каково бы ни было h : въ этомъ случаѣ, слѣдов., дробь не имѣетъ ни максимум'а, ни минимум'а.

Обращаясь къ равенству $(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0$, замѣчаемъ, что, какъ доказано въ § 467, оно выражаетъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы два ур-нія $ax^2 + bx + c = 0$ и $a'x^2 + b'x + c' = 0$ имѣли общій корень, именно: $x_1 = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$; слѣд. оба члена дроби дѣлятся на $x - x_1$ и, по сокращеніи, дробь приводится къ $\frac{ax + \beta}{x'x + \beta'}$, а это выраженіе не имѣетъ ни максимум'а, ни минимум'а (§ 591).

Итакъ, пусть существуетъ неравенство (3), и пусть x' и x'' суть два корня ур-нія (2), причемъ $x' < x''$; сравнивая ихъ съ полусуммою корней, имѣемъ неравенства

$$x' < -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} < x''.$$

1-й случай: $ab' - ba' > 0$. Предыдущія неравенства эквивалентны слѣдующимъ:

$$(ab' - ba')x' + ac' - ca' < 0, \quad (ab' - ba')x'' + ac' - ca' > 0.$$

Отсюда выводимъ:

$$[(ab' - ba')x' + (ac' - ca')]h^2 < 0, \quad [(ab' - ba')x'' + (ac' - ca')]h^2 > 0.$$

Первое условіе выражаетъ, что величинѣ x' соответствуетъ максимумъ дроби, а второе, что большому корню x'' отвѣчаетъ минимумъ дроби.

2-й случай $ab' - ba' < 0$. Умножая на положительное количество

$$-(ab' - ba'),$$

находимъ

$$[(ab' - ba')x' + ac' - ca']h^2 > 0 \quad \text{и} \quad [(ab' - ba')x'' + ac' - ca']h^2 < 0;$$

заключенія обратны предыдущимъ.

3-й случай: $ab' - ba' = 0$. Ур-ніе (2) въ этомъ случаѣ дѣлается 1-й степени, а потому дробь имѣетъ максимумъ или минимумъ, смотря по тому, отрицательно $ac' - ca'$ или положительно, ибо неравенство (1) приводится къ $h^2(ac' - ca') \leq 0$.

Наконецъ, если бы сверхъ того имѣли $ac' - ca' = 0$, и слѣд. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, дробь не имѣла бы ни максимум'а, ни минимум'а: она имѣла бы постоянную величину $\frac{a}{a'}$ при всякомъ x . Этотъ анализъ приводитъ къ слѣдующему правилу нахождения максимум'а и минимум'а квадратной дроби:

Составляем уравнение:

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb' = 0 \quad (2).$$

Если его корни равные или мнимые, дробь не имеет ни максимума, ни минимума; если же корни действительные и неравные, то меньшему корню соответствует максимум, большему минимум, если коэффициент $ab' - ba'$ положителен; напротив, меньшему корню отвечает минимум, а большему максимум, если $ab' - ba' < 0$; если же $ab' - ba' = 0$, дробь имеет максимум или минимум, смотря по тому, будет ли $ac' - ca' < 0$ или > 0 .

Примеръ I. Найти максимум и минимум дроби $\frac{5x-1}{4x^2}$.

Уравнение, аналогичное (2), в данномъ случаѣ есть: $20x^2 - 8x = 0$, откуда:

$$x' = 0, \quad x'' = \frac{2}{5}.$$

Меньшему корню соответствует абсолютный минимум дроби, равная $-\infty$; большему корню—максимум, равный $\frac{5}{16}$.

Примеръ II. Найти максимум и минимум дроби $\frac{ax^2 - bx + c}{x^2 + 1}$.

Уравнение, дающее значения x , обращающія дробь въ максимум и минимум, въ данномъ случаѣ есть

$$-bx^2 + 2(a - c)x + b = 0.$$

Корни этого уравнения всегда действительные и неравные, ибо подрадикальное количество есть сумма двухъ квадратовъ. Такимъ образомъ, если $b > 0$, дробь имеетъ

$$\text{максимум} = \frac{a + c + 1}{2} \cdot \frac{(a - c)^2 + b^2}{b^2}, \text{ при } x = \frac{a - c + 1}{b} \cdot \frac{(a - c)^2 + b^2}{b^2};$$

$$\text{и минимум} = \frac{a + c - 1}{2} \cdot \frac{(a - c)^2 + b^2}{b^2}, \text{ при } x = \frac{a - c - 1}{b} \cdot \frac{(a - c)^2 + b^2}{b^2}.$$

Обратно—если $b < 0$.

653. Второй методъ. Приравнявъ дробь произвольному, но определенному количеству m , определяемъ, при какихъ значенияхъ переменнаго x она можетъ имѣть эту величину m . Искъмая значения x дасть уравне-

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = m, \text{ или } (a - a'm)x^2 + (b - b'm)x + c - c'm = 0,$$

изъ котораго

$$x = \frac{-(b - b'm) \pm \sqrt{(b - b'm)^2 - 4(a - a'm)(c - c'm)}}{2(a - a'm)},$$

или, расположивъ подрадикальное количество по степенямъ m , найдемъ:

$$x = \frac{b'm - b \pm \sqrt{(b^2 - 4a'c')m^2 + 2(2ac' - 2a'a'm - bb'm + b^2 - 4ac')}}{2(a - a'm)}$$

Положивъ

$$b'^2 - 4a'c' = P, \quad 2ac' + 2ca' - bb' = Q, \quad b^2 - 4ac = R,$$

дадимъ подрадикальному количеству видъ

$$Pm^2 + 2Qm + R \dots (1).$$

Для того, чтобы переменное x было действительно, необходимо, чтобы подрадикальное количество не было отрицательнымъ, т.-е. чтобы было

$$Pm^2 + 2Qm + R \geq 0 \dots (2).$$

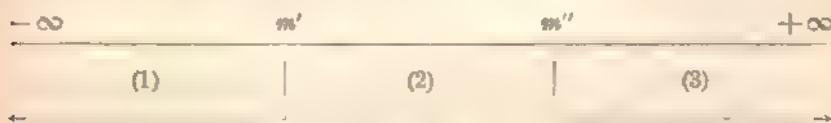
Итакъ, m можетъ измѣняться только въ предѣлахъ, удовлетворяющихъ этому неравенству; соответствующія значенія x получаются изъ формулы

$$x = \frac{b'm - b \pm \sqrt{Pm^2 + 2Qm + R}}{2(a - a'm)} \dots (3).$$

Здѣсь могутъ представиться три случая: $Q^2 - PR > 0$, $Q^2 - PR = 0$ и $Q^2 - PR < 0$.

Первый случай: $Q^2 - PR > 0$. Корни триннома (1) будутъ действительные неравные; пусть меньшій корень будетъ m' , большій m'' . Извѣстно, что при всякомъ значеніи m , лежатъ въ корняхъ знакъ триннома (1) одинаковъ съ знакомъ коэффициента P ; при всѣхъ же значеніяхъ m , лежащихъ между корнями, знакъ триннома противоположенъ знаку P . Отсюда необходимость различать два случая:

1. $P > 0$, т.-е. знаменатель изучаемой дроби имѣетъ действительные неравные корни. Неравенство (2) будетъ удовлетворено, если количеству m будемъ давать значенія, лежащія въ корняхъ триннома (1); такимъ образомъ дробь m можетъ принимать два ряда значеній: отъ $-\infty$ до m' и отъ m'' до $+\infty$, и не имѣетъ значеній между m' и m'' ; такимъ образомъ ея значенія лежатъ въ областяхъ (1) и (3):



Черт. 131.

См. Зад. III, § 658.

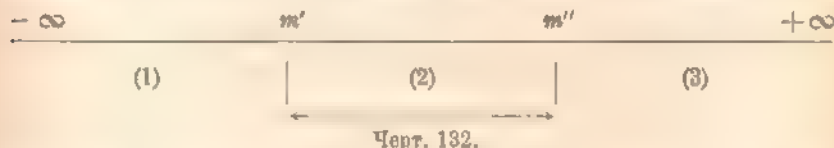
Заключаемъ, что m' есть наибольшее значеніе перваго ряда а m'' — наименьшее значеніе втораго ряда, т.-е. *максимумъ дроби равенъ меньшему корню триннома (1), а минимумъ — большому его корню*; и дробь не имѣетъ значеній между корнями триннома. Когда дробь принимаетъ максимальное и минимальное значеніе, подрадикальное количество формулы (3) обращается въ нуль, и

$$x = \frac{b'm - b}{2(a - a'm)};$$

подставивъ сюда m' вмѣсто m , найдемъ x , соответствующій максимуму дроби, а замѣнивъ m количествомъ m'' , найдемъ x , соответствующій минимуму.

При этомъ каждое свое значеніе меньшее m' , и каждое значеніе большее m'' дробь принимаетъ при двухъ различныхъ значеніяхъ x .

2. $P < 0$, т.-е. знаменатель дроби имѣетъ корни мнимые. Неравенство (2) будетъ удовлетворено, если количеству m дадимъ значенія, лежащія между корнями тринوما (1); такимъ образомъ дробь m можетъ имѣть всѣ значенія въ предѣлахъ: $m'' \geq m \geq m'$, т.-е. значенія дроби лежатъ въ области (2), и она



не имѣетъ действительныхъ значеній въ областяхъ (1) и (3). Заключаемъ, что *меньшій корень тринома (1) есть minimum дроби, а большій — ея maximum*. Соответствующія значенія x вычисляются по прежней формулѣ. Каждое свое значеніе между m' и m'' дробь принимаетъ дважды, при двухъ различныхъ значеніяхъ x , и только значенія m' и m'' принимаетъ, каждое, при одномъ определенномъ x -ѣ. См. Зад. I, § 656 и II, § 657.

Примѣры: 1. *Найти maximum и minimum дроби $\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14}$.*

Приравнявъ данную дробь произвольному количеству m , рѣшаемъ ур—ню

$$\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14} = m, \text{ или } x^2 - (2 + 6m)x + (14m + 21) = 0,$$

откуда

$$x = 1 + 3m \pm \sqrt{9m^2 - 8m - 20}.$$

Корни подрадикальнаго тринома суть: 2 и $-\frac{10}{9}$. Такъ какъ въ данномъ случаѣ $P > 0$, то заключаемъ, что maximum дроби равенъ меньшему корню, а minimum—большому; слѣд.

$$\max. (m) = -\frac{10}{9}; \min. (m) = 2.$$

Подставивъ въ формулу x вмѣсто m , сперва $(-\frac{10}{9})$, а потомъ 2, и замѣчая, что при этихъ значеніяхъ m подрадикальное количество обращается въ нуль, находимъ:

$$x_{(\max)} = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}; \quad x_{(\min)} = 1 + 3 \cdot 2 = 7.$$

2. *Найти max. и min. дроби $\frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + x + 1}$.*

Приравнявъ дробь количеству m , и рѣшивъ полученное ур. относительно x , имѣемъ

$$x = \frac{5 - m \pm \sqrt{1 - 3m^2 - 2m + 2}}{2(1 - m)},$$

Корни подрадикальнаго тринома суть: -3 и $+2\frac{1}{3}$; а какъ $P < 0$, то

закключаемъ, что болѣе корень есть максимумъ дроби, меньшій — ея минимумъ; итакъ

$$\max. (m) = 2\frac{1}{3}; \min. (m) = -3.$$

Вычисливъ соответствующія значенія x по формулѣ $x = \frac{5-m}{2(1-m)}$, находимъ:
 $x_{\max.} = -1$; $x_{\min.} = +1$.

Второй случай: $Q^2 - PR = 0$. Тривомъ (1) имѣетъ корни дѣйствительные равные и общая величина ихъ $\frac{Q}{P}$; тривомъ принимаетъ видъ $P \sqrt{m + \frac{Q^2}{P^2}}$, а условіе дѣйствительности x — видъ:

$$P \left(m + \frac{Q^2}{P^2} \right) \geq 0.$$

Закключаемъ, что тривомъ всегда имѣетъ знакъ количества P . Отсюда:

1. $P > 0$. При всякомъ m тривомъ (1) остается положительнымъ, а при $m = -\frac{Q^2}{P^2}$ обращается въ нуль, слѣд. дробь можетъ имѣть какую угодно величину, и слѣд. нѣтъ ни максимумъ, ни минимумъ. Это можно было предвидѣть: въ самомъ дѣлѣ: $Q^2 - PR = (2ac' - 2aa' - b^2)^2 - (b^2 - 4ac')(b'^2 - 4a'c')$; но въ данномъ случаѣ это выраженіе $= 0$, а мы видѣли (§ 467), что при такомъ условіи тривомъ $ax^2 + bx + c$ и $a'x^2 + b'x + c'$ имѣютъ одинъ общій корень, а слѣд. оба члена дроби — общаго множителя; сокративъ его, найдемъ

$$m = \frac{bx + c}{ax + b'}.$$

Отсюда видно, что задача всегда возможна; всегда найдемъ для x одну величину, и только одну, при которой дробь принимаетъ данную величину.

2. $P < 0$. Въ этомъ случаѣ тривомъ (1) будетъ отрицателенъ при всякомъ m , кромѣ $m = -\frac{Q^2}{P^2}$; слѣд. какую бы величину дробь m ни имѣла, кромѣ величины $-\frac{Q^2}{P^2}$, x остается мнимымъ, и только при $m = -\frac{Q^2}{P^2}$ онъ дѣйствителенъ; слѣд. наоборотъ, всякая дѣйствительная величина x должна дѣлать дробь равною $-\frac{Q^2}{P^2}$, иначе говоря, дробь должна имѣть постоянную величину, а сл. не имѣть ни max., ни min.

Можно доказать непосредственно, что когда совместно имѣемъ $P < 0$ и $Q^2 - PR = 0$, то дробь имѣетъ постоянную величину. Въ самомъ дѣлѣ:

$$Q^2 - PR = a'c' \left[b - \frac{b'(ac' + ca')}{2a'c'} \right]^2 + \frac{4a'c' - b'^2}{4a'c'} (ac' - ca')^2 \dots (4).$$

Но P или $b^2 - 4a'c' < 0$, слѣд. $4a'c' - b'^2 > 0$, откуда $4a'c' > 0$; слѣд. $Q^2 - PR$ есть сумма двухъ существенно положительныхъ количествъ, и потому можетъ быть нулемъ только тогда, когда каждое изъ этихъ количествъ въ отдельности $= 0$; итакъ, должно быть:

$$b - \frac{b'(ac' + ca')}{2a'c'} = 0 \dots (1) \quad \text{и} \quad ac' - ca' = 0 \dots (2),$$

или, заменивъ въ (1) c' его величиною, выведенною изъ (2):

$$\begin{cases} 2bc \cdot \frac{a^2}{a^2} - 2b'ca' = 0, & \text{или } \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \\ \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}, \end{cases}$$

т.-е.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

но мы видѣли (§ 468), что при этихъ условіяхъ дробь имѣетъ постоянную величину, не зависящую отъ x .

Примѣчаніе. Задача: найти прямо условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы дробь $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ имѣла постоянную величину при всякомъ x ?

1-й способъ. Отвѣщая постоянною при всякомъ x , дробь должна имѣть одну и ту же величину и для трехъ различныхъ значеній x , напр., для $x=0$, $x=-1$ и $x=+1$; слѣд. должно быть:

$$\frac{c}{c'} = \frac{a-b+c}{a'-b'+c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'}.$$

откуда, по § 309, найдемъ:

$$\frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{b}{b'} \quad \text{или, наконецъ,} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Эти условія, будучи необходимы, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточны: ибо какъ скоро они выполнены, то, помнявъ общую величину равныхъ откопавій буюю k , найдемъ: $a = a'k$, $b = b'k$, $c = c'k$, и дробь беретъ видъ $\frac{k(ax^2 + bx + c)}{k(a'x^2 + b'x + c')}$, т.-е. $= k$.

2-й способъ. Пусть постоянная, впрочемъ, неизвѣстная, величина дроби будетъ k . Положить $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = k$ значитъ положить, что $ax^2 + bx + c = k(a'x^2 + b'x + c')$, или $(a - a'k)x^2 + (b - b'k)x + (c - c'k) = 0$, каковы бы ни былъ x . Отсюда, по § 72, заключаемъ, что

$$a - a'k = 0, \quad b - b'k = 0, \quad c - c'k = 0, \quad \text{или} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Третій случай. $Q^2 - PR < 0$. Въ этомъ случаѣ корни триніа (1) мнимые, слѣд. триніа всегда сохраняетъ знакъ коэффициента P . Отсюда:

1. $P > 0$. Подрадикальное количество формулы x будетъ при всякомъ m положительно, а слѣдовъ x дѣйствителенъ; такимъ образомъ дробь m можетъ имѣть какую угодно величину, и слѣд. не имѣетъ ни максимума, ни минимума.

2. $P < 0$. Подрадикальное количество формулы x будетъ существенно отрицательно, слѣд. при всякомъ m для x будетъ получаться мнимо-значеніе: а слѣд. обратно, какое бы дѣйствительное значеніе мы ни дали переменному x , дробь m не можетъ получить дѣйствительнаго значенія. Но это заключеніе, очевидно, нецѣльно, ибо изъ ур-нія $m = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ видно, что дѣйствительному значенію x соответствуетъ дѣйствительное же значеніе дроби m . Стало быть, случай совмѣстнаго существованія условій: $P < 0$ и $Q^2 - PR < 0$ невозможенъ.

Впрочемъ, можно доказать это и прямо; въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы (4) видно, что когда $P < 0$, выражение $Q^2 - PR$ представляетъ сумму двухъ квадратовъ, а такая сумма никогда не можетъ быть отрицательною.

Частные случаи Когда $P=0$, подрадикальное выраженіе формулы x обращается въ $2Qm + R$. Чтобы переменное x было дѣйствительно, необходимо, чтобы $2Qm + R \geq 0$, или $2Qm \geq -R$. Отсюда:

1) Если $Q > 0$, то $m \geq -\frac{R}{2Q}$, слѣд. min. (m) $= -\frac{R}{2Q}$: дробь имѣть только min., и не имѣть max.

2) Если $Q < 0$, то $m \leq -\frac{R}{2Q}$, откуда max. (m) $= -\frac{R}{2Q}$ дробь имѣть только max., и не имѣть min.

3) Если $Q = 0$, неравенство приводится къ $R \geq 0$: оно всегда удовлетворяется; ибо въ этомъ случаѣ $b^2 - 4ac = \frac{(ac' - ca')^2}{a'c'}$, гдѣ $a'c' > 0$, такъ какъ $b'^2 - 4a'c' = 0$. Слѣд. всякому значенію m отвѣчаетъ дѣйствительное значеніе x -са: дробь не имѣть ни max., ни min.

Исслѣдованіе приводитъ къ слѣдующему результату: Когда корни тринома $Pm^2 + 2Qm + R$ мнимые или действительные равные, дробь не имѣетъ ни max., ни min.; если же корни этого тринома действительные неравные, дробь имѣетъ max. и min., выражаемые корнями тринома; соответствующія значенія x получаются изъ формулы

$$x = -\frac{b}{2(a-a'm)} \pm \frac{b'm}{2(a-a'm)^2},$$

въ которой m нужно замѣнить корнями тринома.

О результатахъ этого изслѣдованія мы получимъ болѣе ясное понятіе, изслѣдуя измѣненія дроби при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

III. Исслѣдованіе измѣненія дроби $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

654. ТЕОРЕМА.—Квадратная дробь непрерывна при измѣненіи x отъ α по β , если только въ промежуткѣ между α и β не содержится ни одинъ изъ корней знаменателя.

Во-первыхъ, очевидно, что данная дробь дѣйствительна при всякомъ дѣйствительномъ x , и что она конечна, если только значеніе, данное x -су, не обращаетъ знаменателя въ нуль. Остается доказать, что если x_1 есть нѣкоторое значеніе x , заключающееся между α и β , то количеству x_1 всегда можно дать приращеніе h , на столько близкое къ нулю, чтобы и приращеніе K дроби y_1 само было какъ угодно близко къ нулю. Имѣемъ:

$$y_1 = \frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{a'x_1^2 + b'x_1 + c'}, \quad y_1 + K = \frac{a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c}{a'(x_1 + h)^2 + b'(x_1 + h) + c'}$$

$$K = \frac{[a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c](a'x_1^2 + b'x_1 + c') - [a'x_1^2 + b'x_1 + c'] [a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c]}{[a(x_1 + h)^2 + b'(x_1 + h) + c'] [a'x_1^2 + b'x_1 + c']}$$

или, по упрощеніи числителя,

$$K = \frac{h \{ (ab' - ba')x_1^2 + [(ab - ba')h + 2(ac' - ca')]x_1 + [(ac' - a'c)h + (bc' - b'c)] \}}{[a'(x_1 + h)^2 + b'(x_1 + h) + c'] (a'x_1^2 + b'x_1 + c')}$$

По мѣрѣ приближенія h къ нулю числитель стремится къ нулю, а знаменатель къ $(a'x_1^2 + b'x_1 - c')^2$. Но x_1 не обращаетъ этого тринорма въ нуль, ибо интервалъ отъ α до β , содержащій x_1 , не содержитъ корней знаменателя; слѣд. выѣтъ съ h и K стремится къ нулю; иначе говоря, можно приращенію h перемѣннаго x дать значеніе настолько близкое къ нулю, чтобы и соответственное приращеніе K дроби было также какъ угодно близко къ нулю; что и требовалось доказать.

Примѣчаніе. Если x -у дать значеніе x_1 , обращающее въ нуль знаменателя дроби, то она вообще обратится въ безконечность, испытывая при этомъ разрывъ непрерывности, перескакивая изъ $-\infty$ въ $+\infty$, если только корни знаменателя неравные, или если оба члена дроби не имѣютъ общаго множителя $x - x_1$. Если эти исключенія не имѣютъ мѣста, то слѣдуетъ опредѣлить знакъ безконечности, когда x приближается къ x_1 , возрастая, и затѣмъ переходить чрезъ x_1 . Для этого достаточно опредѣлить знакъ числителя при $x = x_1$; зная знакъ и знаменателя, будемъ знать и знакъ дроби.

655. При изученіи измѣненій дроби будемъ держаться слѣдующаго порядка.

1. Опредѣляемъ максимумъ и минимумъ, если таковыя имѣются, и соответственные значенія x .

2. Приравняемъ нулю числителя, потомъ знаменателя и рѣшаемъ полученныя ур-нія: корни перваго ур-нія, если они действительны, дадутъ тѣ значенія x , при которыхъ дробь обращается въ нуль; втораго — тѣ значенія x , при которыхъ она обращается въ $\pm\infty$.

3. Опредѣляемъ значеніе дроби при $x = 0$.

4. Наконецъ, ищемъ предѣльныя значенія дроби, т.е. при $x = \pm\infty$.

Расположивъ значенія x въ порядкѣ ихъ возрастанія, а противъ нихъ соответствующія величины дроби, составимъ таблицу, ясно показывающую измѣненія дроби по величинѣ и знаку. Для наглядности такую таблицу будемъ сопровождать графическимъ изображеніемъ измѣненій дроби.

Задача I.

656. Изслѣдовать измѣненія дроби $\frac{3x^2 + 2x - 3}{4x^2 - 10x + 7}$ при непрерывномъ возрастаніи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Слѣдуя вышеозначенному плану, опредѣляемъ:

1. **Мактит** и **минитит** дроби. — Приравнивая данную дробь произвольному количеству y , получаемъ ур-ніе

$$\frac{3x^2 - 2x - 3}{4x^2 - 10x + 7} = y, \quad \text{или} \quad (3 - 4y)x^2 + (2 + 10y)x - (3 + 7y) = 0.$$

изъ котораго (расположивъ подрадик. колич. по степенямъ y):

$$x = \frac{(1 + 5y) \pm \sqrt{3y^2 + 19y + 10}}{3 - 4y} \dots (1)$$

Приравнявъ подрадик. выраженіе нулю и рѣшивъ ур. $3y^2 + 19y + 10 = 0$, находимъ: $y' = -0,488$, $y'' = 6,821$; а какъ въ данномъ случаѣ коэффиціентъ при y^2 подъ радикаломъ отрицателенъ, то заключаемъ, что большій корень есть максимумъ дроби, меньшій — ея минимумъ. Итакъ

$$\text{max. } (y) = 6,821; \quad \text{min. } (y) = -0,488.$$

Соответствующія значенія x суть:

$$x_{\max} = \frac{-(1 + 5,6,821)}{3 - 4,6,821} = 1,445; \quad x_{\min} = \frac{(1 - 5, -0,488)}{3 - 4 - 0,488} = 0,291.$$

Заключаемъ, что дробь можетъ измѣняться только между $0,488$ и $+6,821$ и не имѣть значеній, меньшихъ $0,488$ и большихъ $6,821$. Всякое же значеніе между этими предѣлами она принимаетъ два раза, при двухъ различныхъ значеніяхъ x , потому что для каждаго y , лежащаго между $-0,488$ и $+6,821$, мы изъ формулы (1) находимъ два различныхъ действит. значенія x .

2. *Нулевая значенія дроби*, соответствующія конечнымъ значеніямъ x . Алгебраическая дробь $\frac{A}{B}$ обращается въ нуль, когда обращается въ нуль числитель A , знаменатель же B остается отличнымъ отъ нуля; или когда B обращается въ ∞ , причемъ A остается конечнымъ. Но B — выраженіе цѣлое относительно x , сл. оно не можетъ обратиться въ ∞ при конечныхъ x ; остается приравнять A нулю. Положимъ $3x^2 + 2x - 3 = 0$ и рѣшивъ это ур., найдемъ:

$$x' = 1,387, \quad x'' = +0,721.$$

3. *Безконечныя значенія дроби*. — Дробь не обращается въ ∞ ; въ этомъ убѣждаемся, приравнявъ знаменателя нулю, и рѣшивъ ур—ніе $4x^2 - 10x + 7 = 0$; найдемъ для x мнимыя значенія.

4. *Значенія дроби при $x = 0$* . — Положимъ $x = 0$, найдемъ $y = \frac{3}{7}$.

5. *Предѣльныя значенія дроби*. Положимъ $x = \pm\infty$, находимъ, что y принимается неопред. видъ $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытія котораго дѣлимъ числ. и знам. на x^2 и затѣмъ полагаемъ $x = \pm\infty$.

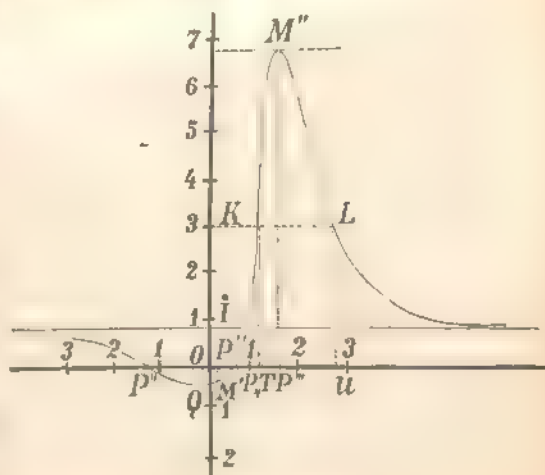
Такимъ образомъ получаемъ, что при $x = \pm\infty$, $y = +\frac{3}{4}$.

Результаты этого изслѣдованія даютъ слѣдующую таблицу измѣненій дроби:

Таблица измѣненій дроби.

Значенія x	Значенія y	Знакъ y
$-\infty$	$+\frac{3}{4}$	+
$-1,387$	0	—
0	$-0,428 = -\frac{3}{7}$	—
$0,291$	$-0,488$ (min.)	—
$0,721$	0	—
$1,445$	$+6,821$ (max.)	+
$+\infty$	$+\frac{3}{4}$	+

Кривая измѣненій.



Кривая измѣненій дроби. Взявъ оси координатъ xx' и yy' и произвольную прямую за 1, наносимъ на ось x -овъ $OP'' = -1,387$ и получаемъ точку P'' , для которой ордината равна 0, и въ которой, слѣд., кривая пересѣкаетъ ось отрицательныхъ x -овъ. Отложивъ $OQ = -0,428$, имѣемъ точку Q , въ которой кривая пересѣкаетъ ось отрицательныхъ y -овъ. Нанеся $OP' = 0,291$ и возставивъ въ точкѣ P' перпендикуляръ къ оси x -овъ, откладываемъ на немъ $P'M' = -0,488$ — ординату минимум. Нанеся $OP_1 = 0,721$, получаемъ другую точку P_1 , въ которой кривая пересѣкаетъ ось x -овъ. $OP''' = 1,445$ даетъ точку P''' , въ которой, проведя перп. $P'''M'' = 6,821$, имѣемъ наибольшую ординату. Наконецъ, отложивъ $OI = \frac{3}{4}$ и проведя черезъ точку I параллель оси x -овъ, имѣемъ асимптоту кривой, къ которой кривая неограниченно приближается, сближаясь съ нею на бесконечныхъ расстоянияхъ отъ оси y -овъ.

Соединивъ построенныя точки непрерывною кривою, получимъ линію, представленную на черт. 133. Такъ какъ каждую свою величину дробь принимаетъ только два раза, при двухъ различныхъ значеніяхъ x (напр. $y=3$ при $x=0P'$ и $x=0P_1$), то всякая прямая параллельная xx' пересѣкаетъ кривую только въ двухъ точкахъ. И ключеніе составляютъ $0P'$ и $0P_1$ — прямая, параллельная оси x и проведенная отъ нея, одна въ разстояніи $-0,488$, другая $6,821$, встрѣчаютъ кривую, каждая въ одной точкѣ, иначе касательны къ кривой. Такимъ обр., кривая не можетъ представлять явныхъ измѣнѣнй, кромѣ указанныхъ на чертежѣ. Чертежъ наглядно показываетъ, что $-0,488$ есть наименьшая ордината для минимума дроби, а $-6,821$ — наибольшая, или максимум дроби.

Задача II.

657. Исследовать измѣненія дроби $\frac{2x^2 - 3}{x^2 + 4x + 3}$ при непрерывномъ возрастаніи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

1. **Максимумъ и минимумъ дроби.** — Приравнявъ дробь y -къ, получаемъ ур.

$$\frac{2x^2 - 3}{x^2 + 4x + 3} = y, \text{ или } (2 - y)x^2 - 4y \cdot x + 3 - 5y = 0,$$

откуда

$$x = \frac{2y \pm \sqrt{y^2 + 13y - 6}}{2 - y}.$$

Корни подрад. тринома суть: $y' = 0,48$ и $y'' = 12,52$, а какъ коэф. при y^2 отрицателенъ, то заключаемъ, что

$$\max. (y) = 12,52; \min. (y) = 0,48.$$

Соотвѣтствующія значенія x суть:

$$x_{\max.} = \frac{2 \cdot 12,52}{2 - 12,52} = -2,38; \quad x_{\min.} = \frac{2 \cdot 0,48}{2 - 0,48} = 0,63.$$

Такимъ образомъ дробь можетъ измѣняться только между предѣлами 0,48 и 12,52, принимая каждое свое значеніе между этими предѣлами два раза — при двухъ различныхъ значеніяхъ x .

2. Нулевые значения дроби.—Такъ какъ между предѣлами 0,48 и 12,52 не содержится нуль, то дробь ни при какомъ действительномъ x не обращается въ нуль. Это видно и изъ того, что, приравнявъ числителя нулю, получаемъ ур. $2x^2 + 3 = 0$, имѣющее мнимые корни.

3. Бесконечныя значенія дроби.—Дробь не обращается въ ∞ , ибо корни знаменателя мнимые.

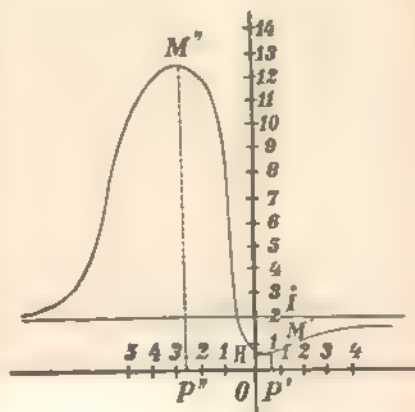
4. Значенія дроби при $x = 0$.—Положивъ $x = 0$, имѣемъ $y = \frac{3}{5}$. Сл. кривая пересѣкаетъ ось y на разстояніи $+\frac{3}{5}$ отъ начала.

5. Предѣльныя значенія дроби.—Какъ и въ предыдущей задачѣ, найдемъ, что при $x = \pm \infty$, $y = 2$. Слѣд. кривая неограниченно приближается къ асимптотѣ, параллельной оси x и отстоящей отъ нея на 2.

Таблица измѣненій дроби.

Значенія x	Значенія y	Знакъ y
$-\infty$	$+2$	
$-2,38$	$+12,52(\text{max.})$	
0	$+\frac{3}{5}$	+
$+0,63$	$+0,48(\text{min.})$	
$+\infty$	$+2$	

Кривая измѣненій дроби.



Черт. 134.

$$\begin{aligned} OP' &= 0,63; OP'' = -2,38; \\ P'M' &= 0,48; P''M'' = 12,52. \\ OH &= \frac{3}{5}; OI = 2. \end{aligned}$$

Задача III.

658. Изслѣдовать измѣненія дроби $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

1. Максимит и минимит.—Положивъ

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3} = y, \quad \text{или} \quad (1 - y)x^2 + 4y \cdot x - 1 - 3y = 0,$$

находимъ

$$x = \frac{-2y \pm \sqrt{y^2 + 4y - 1}}{1 - y}.$$

Корни тринома $y^2 + 4y - 1$ суть: $y' = -4,236$; $y'' = 0,236$; а какъ коэффициентъ при y^2 положителенъ, то

$$\max. (y) = -4,236; \min. (y) = 0,236;$$

соотвѣтствующія значения x суть: $x_{\max.} = 1,618$ $x_{\min.} = -0,617$.

2. Дробь не обращается въ нуль, ибо числитель $x^2 + 1$ существенно положителенъ.

3. Дробь обращается въ ∞ , или претерпѣваетъ разрывъ непрерывности при двухъ значеніяхъ x , обращающихъ знаменателя въ нуль: именно при $x' = 1$ и $x'' = 3$. Для опредѣленія знаковъ безконечности, замѣчаемъ, что числитель дроби при всякомъ x положителенъ, сл. нужно изслѣдовать знаки знаменателя. Обозначивъ буквою h произвольно малое полож. количество, замѣчаемъ, что $x = 1 - h$ и $x = 3 + h$ будутъ находиться вѣхъ корней знаменателя, и слѣд. при этихъ значеніяхъ x знаменатель положителенъ, а потому и $y > 0$; затѣмъ, $x = 1 + h$ и $x = 3 - h$ содержатся между корнями знаменателя, а потому знаменатель и вся дробь при этихъ значеніяхъ x отрицательны. Отсюда видно, что если измѣнить x отъ $-\infty$ непрерывно до $+\infty$, то при $x = 1$ и при $x = 3$ дробь претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, перескакивая изъ $-\infty$ въ $-\infty$, въ первомъ случаѣ, т.е. при $x = 1$, и изъ $-\infty$ въ $+\infty$ во второмъ, т.е. при $x = 3$.

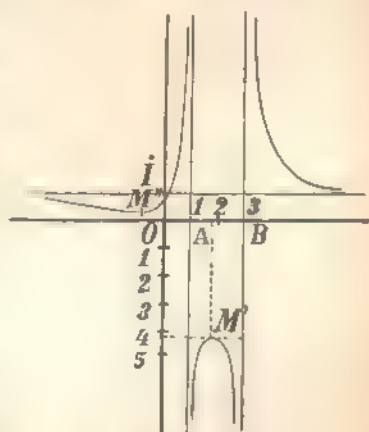
4. При $x = 0$ дробь обращается въ $\frac{1}{3}$.

5. При $x = \pm\infty$ она равна 1.

Таблица измѣненій дроби.

Кривая измѣненій.

Значенія x	Значенія y	Знакъ y
$-\infty$	1	
-0.617	0,236 (min.)	+
$1 - h$	$+\infty$	
$1 + h$	$-\infty$	-
1.618	-4,236 (max.)	-
$3 - h$	∞	
$3 + h$	$+\infty$	+
$+\infty$	1	



Черт. 135.

Кривая измѣненій дроби.—Нанѣтивъ точки M' и M'' , соотвѣтствующія \max и \min дроби, проводимъ чрезъ нихъ параллели оси x овъ: кривая не имѣетъ точекъ между этими параллелями. Затѣмъ наносимъ $OA=1$ и $OB=3$ и черезъ точки A и B проводимъ параллели оси y , которыя будутъ служить асимптотами кривой въ мѣстахъ разрыва непрерывности. Такъ какъ при $x=\pm\infty$, $y=1$, то параллель оси x на единичномъ отъ нея разстояннн будетъ служить 3-ею асимптотой. Наконецъ, замѣчая, что для всѣхъ x -овъ, лежащихъ внѣ 1 и 3, дробь > 0 , и < 0 для всѣхъ x -овъ, лежащихъ между 1 и 3, заключаемъ, что точки кривой для $x < 1$ и для $x > 3$ находятся въ области положит. ординатъ, точки же кривой для $1 < x < 3$ находятся въ области отрицат. ординатъ. Такимъ образомъ получаемъ кривую, изображенную на черт. 135.

Задача IV.

659. Исследовать измѣненія дроби $\frac{2x^2-5x-4}{5x^2-8x-10}$ при непрерывномъ измѣненнн x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

1. *Maximum и minimum.*—Положимъ

$$\frac{2x^2-5x-4}{5x^2-8x-10} = y, \text{ или } (2-5y)x^2 - (5-8y)x - 4 - 10y = 0,$$

находимъ

$$x = \frac{5-8y \pm \sqrt{264y^2 - 240y + 57}}{2(2-5y)}.$$

Убѣдившись, что корни радикальнаго выраженія мнимые, заключаемъ, что оно всегда будетъ положительно, а потому дробь не имѣетъ ни \max , ни \min .

2. Приравнивая числителя нулю, найдемъ значенія x , при которыхъ дробь обращается въ 0; эти значенія суть:

$$x' = -0,638 \text{ и } x'' = 3,188.$$

3. Приравнивая знаменателя 0, получимъ значенія x , при которыхъ дробь обращается въ ∞ ; эти значенія суть:

$$x_1 = -0,824 \text{ и } x_2 = 2,424.$$

Для опредѣленнн знаковъ безконечности, даемъ дроби видъ:

$$y = \frac{2(x+0,638..)(x-3,188)}{5(x+0,824..)(x-2,424..)}.$$

Такъ какъ $x = -0,824 - h$ лежитъ какъ внѣ корней числителя, такъ и внѣ корней знаменателя, то и числ. и зн. дробн, а потому и самая дробь, положительны. $x = -0,824 + h$ паходится внѣ корней числителя и внутри корней знаменателя, слѣд. при этомъ значенн x числитель > 0 , а знаменатель < 0 , а потому дробь отрицательна. Заключаемъ, что при переходѣ x чрезъ $-0,824$ дробь претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, перескакивая изъ $+\infty$ въ $-\infty$. Подобнымъ же образомъ убѣдяся, что когда x , возрастая, проходитъ чрезъ $+2,424$, дробь перескакиваетъ изъ $+\infty$ въ $-\infty$.

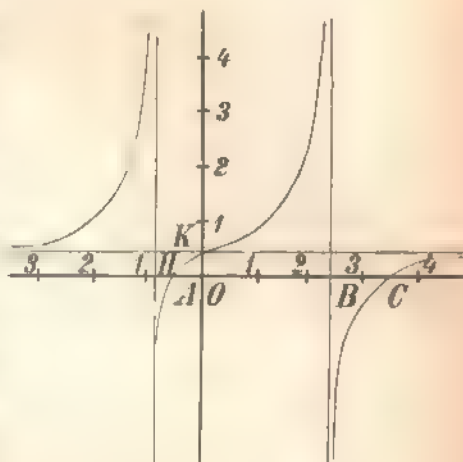
4. При $x = 0$ имеемъ $y = \frac{2}{5}$.

5. При $x = \pm \infty$, находимъ: $y = \frac{2}{5}$.

Таблица изменений дроби.

Кривая изменений дроби.

Значения x	Значения y	Знакъ y
$-\infty$	$+\frac{2}{5}$	
$-0,824 - h$	$+\infty$	
$-0,824 + h$	$-\infty$	
$-0,638$	0	
0	$\frac{2}{5}$	$+$
$+2,424 - h$	$+\infty$	
$2,424 + h$	$-\infty$	
$+3,138$	0	
$+\infty$	$+\frac{2}{5}$	$+$



Черт. 136.

Таблица изменений дроби показываетъ, что величина дроби постоянно увеличивается, но претерпѣваетъ два раза разрывъ непрерывности: одинъ разъ при переходѣ x чрезъ $-0,824$ другой разъ при переходѣ x чрезъ $2,424$; въ томъ и другомъ случаѣ дробь перескакиваетъ изъ $+\infty$ въ $-\infty$.

Кривая изменений. Отложивъ на оси y линію $OK = +\frac{2}{5}$, проводимъ чрезъ точку K параллель оси x ; затѣмъ, отложивъ на оси x линіи $OH = -0,824$ и $OB = +2,424$, проводимъ чрезъ точки H и B параллели оси y . Такимъ обр. получаемъ три асимптоты вѣтвей кривой. Отложивъ на оси x линіи: $OA = -0,638$ и $OC = 3,138$, получимъ точки, въ которыхъ кривая пересѣкаетъ ось x ось. Ось y она пересѣкаетъ въ точкѣ K .

Задача V.

660. Изслѣдовать изменения дроби $\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 7x + 12}$ при непрерывномъ измененіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

1. Maximum и minimum.—Положивъ

$$\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 7x + 12} = y, \text{ или } (2 - y)x^2 - 7(1 - y)x + 3(1 - 4y) = 0,$$

находимъ

$$x = \frac{7(1-y) \pm \sqrt{y^2 + 10y + 25}}{2(2-y)}$$

Замѣчая, что $y^2 + 10y + 25 = (y+5)^2$ и что, слѣд., подрадикальное выражение всегда положительно, заключаемъ, что дробь не имѣетъ ни шах., ни пш.

Если y -ку дадимъ какое-либо значение, то для x найдемъ два соответственныхъ значения; только при $y = -5$, x принимаетъ одно значеніе $= 3$. Итакъ, всякую свою величину дробь принимаетъ при двухъ различныхъ значеніяхъ x , кромѣ величины, равной -5 . Значенія x , соответствующія данному y , суть:

$$x = \frac{7(1-y \pm y+5)}{2(2-y)}, \quad \text{или} \quad x = 3 \quad \text{и} \quad x = \frac{1-4y}{2-y},$$

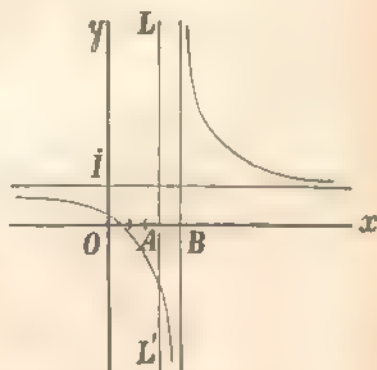
изъ которыхъ первое не зависитъ отъ y . Эта особенность объясняется тѣмъ, что числ. и знам. дроби имѣютъ общій корень $x = 3$ и слѣд. при $x = 3$ оба члена дроби равны 0, а дробь неопредѣленна.

Если сократить дробь на $x - 3$, она приметъ видъ

$$Y = \frac{2x-1}{x-4}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{1-4Y}{2-Y};$$

всякой величинѣ Y соответствуетъ *только одно* значеніе x , слѣд. при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ дробь $\frac{2x-1}{x-4}$ проходитъ *только одинъ разъ* чрезъ всякое свое значеніе; обращается въ 0 при $x = \frac{1}{2}$, и въ ∞ при $x = 4$; а при $x = \pm\infty$ обращается въ 2. Замѣтивъ при этомъ, что при $x = 4 - h$, $Y = \infty$, а при $x = 4 + h$, $Y = -\infty$, выразимъ ходъ измѣненій сокращенной дроби таблицей:

Значенія x	Сокращ. дробь Y	Знакъ Y
$-\infty$	2	+
$\frac{1}{2}$	0	
$4-h$	$-\infty$	-
$4+h$	$+\infty$	
$+\infty$	2	



Черт. 137.

Что касается дроби $\frac{2x^2-7x+3}{x^2-7x+12}$, то какъ она принимаетъ какую угодно величину при $x = 3$, то чтобы изобразить вполнѣ ея измѣненія, нужно къ кривой присоединить прямую LL' , параллельную оси Oy и пересѣкающую ось x -овъ въ разстояніи $OA = 3$ отъ начала координатъ.

Задача VI.

661. Изследовать измѣненія дроби $\frac{x^2 - 8x + 15}{3x^2 - 24x + 45}$ при непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Положивъ

$$\frac{x^2 - 8x + 15}{3x^2 - 24x + 45} = y,$$

или

$$(1 - 3y)x^2 - 8(1 - 3y)x + 15(1 - 3y) = 0,$$

или

$$(1 - 3y)(x^2 - 8x + 15) = 0,$$

находимъ, что ур—ніе удовлетворяется при всякомъ y , когда $x^2 - 8x + 15$ равно нулю, т.-е. когда $x = 3$ и $x = 5$, и, кромѣ того, при всякомъ x , если только $y = \frac{1}{3}$. Слѣд. при $x = 3$ и $x = 5$, y можетъ имѣть какую угодно величину, и кромѣ того $y = \frac{1}{3}$ при какомъ угодно x . Это объясняется тѣмъ, что оба члена дроби имѣютъ одинаковые корни

$$y = \frac{(x - 3)(x - 5)}{3(x - 3)(x - 5)};$$

при $x = 3$ и $x = 5$ величина дроби неопредѣленная; а если сократить дробь на $(x - 3)(x - 5)$, то y дѣлается $= \frac{1}{3}$, каковъ бы ни былъ x .

Совокупность рѣшеній ур—нія $x^2 - 8x + 15 = y(3x^2 - 24x + 45)$, или $(x^2 - 8x + 15)(3y - 1) = 0$ геометрически изображается двумя параллелями оси y , отстоящими отъ начала на $OA = 3$ и $OB = 5$, и параллелью оси x , отстоящею отъ начала на $OI = \frac{1}{3}$.



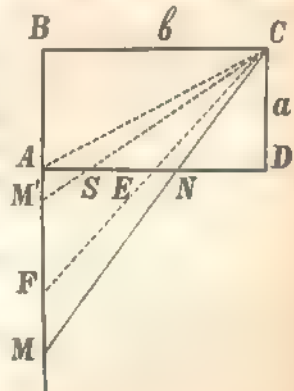
Черт. 138.

662. Задача. На продолженіи стороны AB данного прямоугольника $ABCD$ взять такую точку M , чтобы сумма площадей треугольников AMN и DCN была *минимума*.

Когда точка M движется по прямой BM отъ A внизъ, сумма площадей, вначалѣ равная $\frac{1}{2}$ прямоугольника, начинаетъ уменьшаться: такъ для точки M' трѣуг. CAS замѣняется меньшимъ $M'AS$; но когда точка M займетъ положеніе F , при которомъ $AF \perp AB$, сумма площадей снова становится равною $\frac{1}{2}$ прямоугольника, сл. при перемѣщеніи точки M отъ A къ F эта перемѣнная сумма прошла черезъ *минимумъ*.

Пусть $AB = a$, $BC = b$, $AM = x$; выраженіе суммы y будетъ:

$$y = \frac{x \times AN}{2} + \frac{a \times DN}{2}.$$



Черт. 139.

Но $\frac{AN}{x} = \frac{DN}{a} = \frac{b}{a+x}$, отсюда $AN = \frac{bx}{a+x}$, $DN = \frac{ab}{a+x}$, и следоват.

$$y = \frac{bx^2}{2(a+x)} + \frac{ba^2}{2(a+x)}, \text{ или } y = \frac{b(a^2 + x^2)}{2(a+x)}.$$

Опредѣляемъ x такъ, чтобы сумма площадей имѣла величину m . Для этого беремъ ур—ніе

$$\frac{b(a^2 + x^2)}{2(a+x)} = m, \text{ или } bx^2 - 2mx + a(ab - 2m) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - ab(ab - 2m)}}{b} \dots (1).$$

Чтобы сумма площадей могла имѣть величину m , необходимо и достаточно, чтобы этой величинѣ m отвѣчало действительное и положительное значеніе x . Но x будетъ действ., если $m^2 - ab(ab - 2m) \geq 0$,

$$\text{или } m^2 + 2abm - a^2b^2 \geq 0 \dots (2).$$

А рѣши виднo, что корни тринома (2) действительные, неравные и противоположнаго знака; слѣд. неравенство (2) будетъ удовлетворено такимъ положительнымъ m , которое не меньше положительнаго корня тринома; т.-е. необходимо, чтобы $m \geq ab(\sqrt{2} - 1)$. Итакъ, сумма площадей не можетъ быть $< ab(\sqrt{2} - 1)$; смотримъ, можетъ ли она равняться $ab(\sqrt{2} - 1)$. Когда m достигнетъ этого предѣла, тогда будетъ

$$x = \frac{m}{b} = a(\sqrt{2} - 1);$$

это значеніе x положительно и сл. можетъ быть взято; поэтому минимумъ (y) = $ab(\sqrt{2} - 1)$, а соответствующее значеніе $x = a(\sqrt{2} - 1)$.

Повѣрка. Полагаемъ $x = a(\sqrt{2} - 1) + h$, гдѣ h произвольно мало, и подставляемъ это значеніе x въ выраженіе функции. Найдемъ

$$y = \frac{(2 - \sqrt{2})a^2b \pm ab(\sqrt{2} - 1)h + \frac{bh^2}{2}}{a\sqrt{2} \pm h}.$$

Вопросъ приводится къ проверкѣ неравенства:

$$\frac{(2 - \sqrt{2})a^2b \pm ab(\sqrt{2} - 1)h + \frac{bh^2}{2}}{a\sqrt{2} \pm h} > ab(\sqrt{2} - 1),$$

которое, по освобожденіи отъ знаменателя и по упрощеніи, приводится къ $\frac{bh^2}{2} > 0$, что вѣрно.

IV. Maxima и minima функций нѣсколькихъ переменныхъ.

663 Произведение двухъ переменныхъ множителей, сумма которыхъ постоянна и равна a , возрастаетъ по мѣрѣ того, какъ абсолютное значение разности переменныхъ уменьшается.

Доказательство. Пусть переменные множители будутъ x и y , а ихъ постоянная сумма пусть будетъ a :

$$x + y = a \quad . \quad . \quad (1) \quad .$$

Вывѣдъ тождества $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ и $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, и вычтя второе изъ перваго, найдемъ $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$.

Замѣнивъ $x + y$ въ силу условия (1), равнымъ количествомъ a , имѣемъ $a^2 - (x - y)^2 = 4xy$, что можно написать такъ:

$$xy = \frac{a^2}{4} - \frac{(x - y)^2}{4} \quad . \quad . \quad (2).$$

Такъ какъ уменьшаемое $\frac{a^2}{4}$ сохраняетъ постоянную величину, то произведение будетъ вѣдаться съ измѣненіемъ вычитаемаго, и именно, по мѣрѣ уменьшенія $(x - y)^2$, или, что то же, $x - y$, произведение xy будетъ увеличиваться. Отсюда слѣдуетъ, что xy достигнетъ максимума, когда $x - y$ достигнетъ minimum'a, и мы находимъ теорему:

Произведение двухъ переменныхъ множителей, сумма которыхъ постоянна (и равна a), достигаетъ наибольшей величины, когда абсолютное значение ихъ разности достигаетъ своей наименьшей величины; въ частности, если эта разность можетъ обратиться въ 0, т.-е. если x можетъ сдѣлаться $= y$, то произведение будетъ имѣть максимумъ, когда множители сдѣлаются равными.

Если имѣетъ мѣсто послѣдній случай, то максимумъ будетъ при $x = y = \frac{a}{2}$, а самый максимумъ будетъ $\frac{a^2}{4}$.

Примѣчаніе. Для этого послѣдняго случая можно доказать теорему еще такъ. Пусть одинъ множитель $= x$; другой будетъ $a - x$; произведение ихъ выразится формулою $y = x(a - x)$ или $= x^2 - ax$; это есть квадратный триномъ, свободный членъ котораго $= 0$. Пытаемся измѣненіе тринома при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Удобную для такого изслѣдованія форму мы найдемъ, придавая и вычитая $\frac{a^2}{4}$, что даетъ:

$$y = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4}, \text{ или } y = - \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

При $x = -\infty$ и функция $y = -\infty$. При увеличеніи x отъ $-\infty$ до $\frac{a}{2}$, y возрастаетъ отъ $-\infty$ до $\frac{a^2}{4}$; затѣмъ при увеличеніи x отъ $\frac{a}{2}$ до $+\infty$, y

уменьшается отъ $\frac{a^2}{4}$ до $-\infty$. Получаемъ слѣдующія — таблицу и кривую измѣненій функции:

x	y
$-\infty$	$-\infty$
$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{4}$
$+\infty$	$-\infty$



Черт. 140.

Итакъ, произведение сперва возрастаетъ отъ $-\infty$ до $\frac{a^2}{4}$, а затѣмъ уменьшается отъ $\frac{a^2}{4}$ до $-\infty$; слѣд. оно не имѣетъ минимум'а, но имѣетъ максимумъ $= \frac{a^2}{4}$. Соответствующее значеніе x есть $\frac{a}{2}$, а другого множителя: $a - \frac{a}{2}$ или $\frac{a}{2}$, т.-е. произведение получаетъ наибольшую величину, когда оба множителя дѣлаются равными, предполагая, что ихъ можно сдѣлать равными.

Косвенное доказательство. Вмѣсто того, чтобы изслѣдовать измѣненія произведенія $x(a - x)$, соответствующія измѣненію x отъ $-\infty$ до $+\infty$, можно предложить себѣ вопросъ: при какомъ значеніи x это произведение получаетъ данную величину m , изслѣдовать рѣшеніе, и такимъ образомъ найти, между какими предѣлами величина m произведенія можетъ измѣняться. Такимъ образомъ для опредѣленія x имѣемъ ур—ніе

$$x(a - x) = m, \text{ или } x^2 - ax + m = 0,$$

откуда

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m}.$$

Чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы подкоренное количество не было отрицательнымъ, т.-е. необходимо, чтобы $m \leq \frac{a^2}{4}$. Заключаемъ, что произведение m можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $\frac{a^2}{4}$; слѣдов. оно не имѣетъ минимум'а, но имѣетъ максимумъ $\frac{a^2}{4}$. Но когда $m = \frac{a^2}{4}$, радикалъ обращается въ 0, и $x = \frac{a}{2}$; поэтому и другой множитель, какъ равный $a - x$, обращается въ $\frac{a}{2}$, сл. произведение имѣетъ максимумъ, когда множители равны. Но не всегда x можетъ принимать значеніе $\frac{a}{2}$, соответствующее алгебраическому максимум'у.

664 **Примѣры.**—1. Произведение двухъ множителей, которыхъ сумма $= 12$, можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $+36$; максимумъ произведенія равенъ 36, а соответствующіе множители равны, каждый, 6.

II. Произведение двухъ множителей, которыхъ сумма равна $= -12$, можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $+36$; слѣд. максимумъ произведенія равенъ $+36$, каждый производитель $= -6$.

665. **Задача I.** Изъ всѣхъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный треугольникъ, какой имѣетъ наибольшую площадь?

Если основаніе DE прямоугольника передвигать отъ вершины тр-ка до его основанія, то площадь прямоугольника будетъ измѣняться отъ нуля до нуля, и слѣд. проходить чрезъ максимумъ. Пусть b и h будутъ — основаніе и высота данного треугольника (черт. 37), x и y основаніе и высота вписаннаго прямоугольника DEFG. Площадь прямоугольника $= xy$. Изъ подобія треугольниковъ ABC и DBE имѣемъ: $\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$, откуда $y = \frac{h}{b}(b-x)$; слѣдов. площадь xy выразится произведеніемъ:

$$\frac{h}{b} x(b-x).$$

Такъ какъ постоянный множитель $\frac{h}{b}$ не вліяетъ на условія максим., то впростѣ приводится къ опредѣленію макс. произведенія $x(b-x)$. Сумма множителей x и $b-x$ равна постоянной величинѣ b , слѣд. произведение имѣетъ максимумъ, когда множители равны, т.е. когда $x = b-x$, откуда $x = \frac{b}{2}$; въ такомъ случаѣ изъ уравненія $y = \frac{h}{b}(b-x)$ найдемъ $x = \frac{b}{2}$, самая же максимальная площадь xy равна $\frac{bh}{4}$, т.е. половинѣ площади треугольника. Итакъ: наибольшій изъ всѣхъ прямоугольниковъ, какой можно вписать въ треугольникъ, имѣетъ основаніе и высоту вдвое меньшія основанію и высотѣ треугольника.

Задача II. Изъ всѣхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго шара, какой имѣетъ наименьшій объемъ?

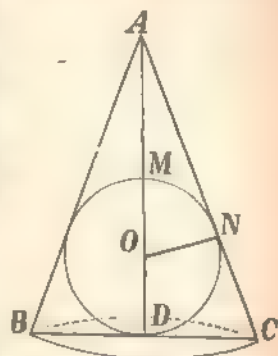
Пусть будетъ ABC конусъ, описанный около шара ON. Если его вершина A будетъ перемѣщаться по оси PA отъ M до безконечности, объемъ конуса будетъ измѣняться отъ ∞ до ∞ , и слѣд. пройдетъ чрезъ минимумъ. Чтобы найти этотъ минимумъ, обозначимъ высоту DA буквою x , объемъ будетъ:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot CD^2 \cdot x.$$

Подобные тр-ки ACD и AON дадутъ: $\frac{DC}{R} = \frac{x}{AN}$; но $AN^2 = x(x-2R)$; слѣд.

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{R^2 x^2}{x-2R}.$$

Постоянный множитель $\frac{1}{3} \pi R^2$ не измѣняетъ условій минимум'а функціи, а по-



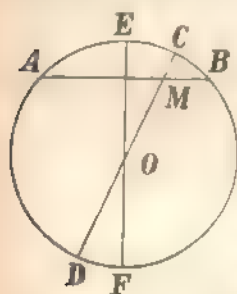
Черт. 141.

тому V имѣть наиб. вел. при тѣхъ же обстоятельствахъ, какъ и $\frac{x^2}{x-2R}$. Но максимумъ этой функціи соответствуетъ максимуму обратной: $\frac{x-2R}{x^3}$, которую можно представить въ видѣ: $\frac{1}{x} \cdot 1 - \frac{2R}{x}$; наконецъ, мы не изменимъ условій максимума, введя постоянный множитель $2R$. Такимъ образомъ вобщемъ приведемъ къ опредѣленію max. функціи

$$\frac{2R}{x} \cdot 1 - \frac{2R}{x}.$$

Замѣчая, что сумма перемѣнныхъ факторовъ $\frac{2R}{x}$ и $1 - \frac{2R}{x}$ равна постоянной величинѣ 1, заключаемъ, что произведение достигнетъ наибольшей величины, когда оба фактора сдѣлаются равными, т.-е. когда $\frac{2R}{x} = 1 - \frac{2R}{x}$, откуда $x = 4R$, что не несовѣстно съ свойствами задачи. Итакъ, описанный конусъ имѣетъ наименьшій объемъ, когда высота конуса вдвое больше диаметра; самый же объемъ $= \frac{8}{3} \pi R^3$, т.-е. вдвое больше шара.

666. Въ предыдущихъ параграфахъ мы не разъ дѣлали оговорку, что перемѣнными x и y , сумма которыхъ постоянна, не всегда могутъ быть сдѣланы равными, по свойствамъ самой задачи: таковы, напр., некоторые вопросы геометріи. Въ такихъ случаяхъ произведение достигаетъ максимума, когда абсолютное значеніе разности перемѣнныхъ достигнетъ минимума. Вотъ несколько задачъ, иллюстрирующихъ подобные случаи.



Черт. 142.

Задача I. Данъ кругъ и хорда AB; провести диаметръ такъ чтобы произведение отрезковъ CM и DM, образуемыхъ на немъ хордою, имѣло наибольшую величину.

Сумма отрезковъ CM и MD, при всякомъ положеніи диаметра, постоянна; но эти отрезки не могутъ быть сдѣланы равными: слѣд. ихъ произведение достигнетъ наибольшей величины, когда разность ихъ будетъ наименьшей, а это будетъ тогда, когда отрезокъ MD достигнетъ своего наименьшаго, а отрезокъ CM своего наибольшаго значенія, т.-е. когда диаметръ станетъ перпендикулярнымъ въ хордѣ. Требуемый диаметръ есть EF.

Задача II. Найти максимумъ произведенія $(3 - x^2)(7 + x^2)$.

Сумма факторовъ постоянна и равна 10; приравнявая ихъ, получаемъ уравненіе $3 - x^2 = 7 + x^2$, или $x^2 = -2$ (явно невозможное) ни при какомъ действительномъ x . Итакъ, находимъ наибольшія абсолютныя величины ихъ разности: $2x^2 + 4$. Минимумъ этого бичема, очевидно, есть 4, достигаемый при $x = 0$; слѣд. максимумъ произведенія равенъ 21, при $x = 0$.

Задача III. Даны: кругъ O и одна его прямая MN. Пусть ABC будетъ другая прямая, перпендикулярная къ MN и пересѣкающая кругъ въ точкахъ A и B, а прямую MN въ точкѣ C. При какомъ положеніи прямой AC произведение AB \cdot BC достигаетъ наибольшей величины?

Когда точка В нахо-

дится въ Р Г Q Р' Р'
Разность ВС—ВК= d умен. до 0 увел. до $2R - d'$ умен. до 0 увел. до d .
Проязв. $2BK \cdot BC \dots 0$ увел. до $\frac{d^2}{2}$ умен. до $2R(d - R)$ увел. до $\frac{d^2}{2}$ умен. до "

Итакъ, дѣйствительно имѣть мѣсто относительный минимум $= 2R(d - R)$, когда В находится въ Q.

667. ТЕОРЕМА. Произведение нѣсколькихъ положительныхъ множителей, сумма которыхъ постоянна, и которые никакимъ другимъ условіямъ не подчинены, не можетъ быть больше произведенія, помноженнаго отъ замѣны каждая изъ этихъ множителей ихъ арифметическою срединою.

Эта теорема была нами доказана для случая двухъ переменныхъ множителей, сумма которыхъ сохраняетъ постоянную величину, причемъ не было необходимости налагать условія, чтобы множители были положительны.

Но распространеніе теоремы на определенное число множителей, большее двухъ, требуетъ, чтобы множители могли принимать только положительныя значенія.

Обычное доказательство теоремы, которое приведено было въ 1-мъ изданіи нашего курса, не свободно отъ нѣкоторыхъ возраженій, и потому замѣнено было, почти одновременно (въ 1857 г.), строгими доказательствами: одно изъ нихъ дано академикомъ Г. Дарбу (деканомъ парижскаго Факультета Наукъ), другое — профессоромъ Сорбонны Гурза. По строгости и изяществу прѣмъ оба доказательства принадлежать къ образцовымъ, оба заслуживаютъ одинаковаго вниманія; приводимъ и то и другое.

Доказательство ДАРБУ. Пусть дано m независимыхъ переменныхъ положительныхъ и имѣющихъ постоянную сумму

$$x > 0, \quad y > 0, \quad . \quad . \quad . \quad z > 0, \quad t > 0, \quad x + y + \dots + z + t = \text{const.}$$

Покажемъ сначала, что если теорема вѣрна для m множителей, то она будетъ вѣрна и тогда, когда число множителей будетъ *вообще* больше (доказательство отъ m къ $2m$). Присоединимъ къ m даннымъ множителямъ еще m положительныхъ множителей: x', y', \dots, z', t и пусть будетъ произведение

$$P = xy \dots zt \cdot x'y' \dots z't',$$

состоящее изъ $2m$ положительныхъ множителей. Пусть будетъ a — арифметическая средина этихъ $2m$ множителей:

$$2ma = x + y + \dots + z + t + x' + y' + \dots + z' + t';$$

пусть, далѣе, будетъ b — ариом. средина m первыхъ, b' — ариом. средина m прибавленныхъ множителей, т. е.

$$mb = x + y + \dots + z + t, \quad mb' = x' + y' + \dots + z' + t'.$$

Очевидно, имѣемъ

$$m(b + b') = 2ma, \quad \text{или} \quad b + b' = 2a,$$

а этимъ доказано, что a есть ариом. средина b и b' .

Понимая это, замѣчаемъ, что какъ, по допущенію, теорема справедлива для случая m множителей, то

$$xy \dots st \leq b^m, \quad x'y' \dots s't' \leq b'^m.$$

Перемноживъ почленно, имѣемъ

$$P \leq (bb')^m.$$

Но a есть арифм. средина для b и b' , и теорема доказана для двухъ множителей; то

$$bb' \leq a^2,$$

и слѣд., тѣмъ болѣе

$$P \leq a^{2m}.$$

Этимъ доказано, что теорема вѣрна для $2m$ множителей, если она вѣрна для m . Но она доказана для двухъ множителей, слѣдов. доказана и для 4-хъ; а если такъ, то и для 8-ми, 16-ти и т. д., вообще для случая, когда число множителей есть степень 2.

Теперь уже не трудно распространить ее на какое угодно число множителей. Въ с. д., пусть будетъ P —произведение m положительныхъ множителей (m —какое угодно), и пусть ихъ арифм. средина $= a$. Пусть, затѣмъ, q будетъ такое цѣлое число, чтобы $m+q$ было степенью 2-хъ. Присоединяя къ m множителямъ произведенія P , q множителей равныхъ a , получимъ новое произведение, $P'a^q$, состоящее изъ $m+q$ множителей, которыхъ арифм. средина опять $= a$. Такъ какъ число $m+q$ множителей этого новаго произведенія есть степень 2, то по доказанному имѣемъ: $P'a^q = a^{m+q}$, откуда, по сокращеніи на положительное число a^q , что не влечетъ смысла равенства, выйдемъ

$$P \leq a^m,$$

что и требовалось доказать.

Это доказательство показываетъ, кромѣ того, что произведеніе P остается меньше a^m , пока есть въ немъ множитель отличный отъ a ; въ с. д., это имѣетъ мѣсто для двухъ множителей, слѣд. будетъ имѣть мѣсто и для всѣхъ случаевъ.

Итакъ, произведеніе равно a^m только тогда, когда всѣ множители равны. Отсюда теорема:

произведеніе нѣсколькихъ положительныхъ переменныхъ множителей, сумма которыхъ постоянна, имѣетъ максимумъ, когда всѣ множители равны (если только ихъ можно сдѣлать равными, что бываетъ не всегда).

Доказательство Гурзла. Удерживая прежнія обозначенія, замѣчаемъ, что произведеніе $P = xy \dots st$ есть функція $m-1$ независимыхъ переменныхъ, ибо количествамъ $y, s \dots t$ можно дать какія угодно положительныя значенія, лишь бы сумма ихъ была меньше ma , а затѣмъ x -у даемъ значеніе ma ($y+s \dots +t$). Между различными системами значеній, какія можно давать нашимъ переменнымъ съ соблюденіемъ сказаннаго условія, есть одна, и только одна, когда всѣ значенія равны, и слѣд. каждое $= a$. Произведеніе P_1 приметъ тогда значеніе a^m ; а соответствующую систему равныхъ переменныхъ назовемъ

$$x_1 = y_1 = \dots = s_1 = t_1 = a \dots (1).$$

Пусть будетъ взята другая система положительныхъ множителей:

$$x_2, y_2, \dots, z_2, t_2 \dots (2),$$

сумма которыхъ постоянна, и пусть произведение ихъ будетъ P_2 :

$$P_2 = x_2 y_2 \dots z_2 t_2.$$

Теорема состоитъ въ томъ, что P_2 будетъ необходимо меньше a^m .

Между значеніями системы (2) необходимо существуетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ множитель большій a , ибо положивъ, что всѣ они не больше a , т.-е. что

$$x_2 \leq a, y_2 \leq a, \dots, z_2 \leq a, t_2 \leq a,$$

то какъ не дано, что всѣ они равны a , т.-е.

$$x_2 = a, y_2 = a, \dots, z_2 = a, t_2 = a,$$

мы имѣли бы

$$x_2 + y_2 + \dots + z_2 + t_2 < ma,$$

что противно условію. Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что въ числѣ значеній системы (2) необходимо хотя одно будетъ $< a$. Пусть это будутъ значенія

$$x_2 = a + h, y_2 = a - k, \text{ гдѣ } h > 0, 0 < k < a.$$

Не трогая другихъ множителей произведенія P_2 , замѣнимъ $a + h$ чрезъ a , и $a - k$ чрезъ $a + h - k$, получимъ систему

$$a, a + h - k, \dots, z_2, t_2 \dots (3),$$

въ которой всѣ члены положительны, и сумма не измѣнится, ибо не измѣнилась и сумма измѣненныхъ членовъ системы: какъ прежде, такъ и теперь послѣдніи $= 2a + h - k$. Новое произведение

$$P_3 = a(a + h - k) \dots z_2 t_2,$$

а предшествующее

$$P_2 = (a + h)(a - k) \dots z_2 t_2.$$

Но

$$(a + h)(a - k) = a^2 + a(h - k) - hk,$$

тогда какъ

$$a(a + h - k) = a^2 + a(h - k);$$

слѣд. мы замѣнили положительное произведение двухъ факторовъ большимъ произведеніемъ, не измѣняя положительнаго произведенія прочихъ $m - 2$ факторовъ, а слѣд. произведение всѣхъ m факторовъ мы увеличили. Такимъ образомъ $P_3 > P_2$. Кромѣ того, въ системѣ (3), по крайней мѣрѣ, однимъ факторомъ, равнымъ a , стало больше, нежели въ системѣ (2).

Если всѣ значенія, составляющія систему (3), равны a , то теорема доказана, ибо тогда $P_3 = a^m$, между гѣмъ какъ $P_2 < a^m$. Въ противномъ случаѣ оне-

рируем надъ системою (3) такъ же, какъ мы оперировали надъ (2): составимъ новую систему (4) значений, положительныхъ и имѣющихъ данную сумму; этой системѣ будетъ соответствовать значеніе P_1 произведенія, большее P_2 , и въ немъ будетъ, по крайней мѣрѣ, однимъ значеніемъ, равнымъ a , больше, чѣмъ въ системѣ (3). Если всѣ значенія системы (4) равны a , то теорема доказана, ибо тогда P_1 будетъ $= a^n$, между тѣмъ какъ $P_2 < P_1 < a^n$. Если же нѣтъ, то начинаемъ снова ту же операцію, и кончимъ тѣмъ, что получимъ систему (1); и какъ каждый разъ значеніе произведенія увеличивается, то его начальное значеніе P_2 навѣрное меньше окончательнаго значенія a^n , которое, слѣдов., и есть искомый максимумъ.

668. Задача I. Какой изъ всѣхъ *треугольниковъ одинаковаго периметра имѣетъ наибольшую площадь?*

Пусть переменныя стороны будутъ x, y, z ; $2p$ —постоянный периметръ; по условію, $x + y + z = 2p$.

Площадь Δ треугольника по трѣмъ сторонамъ выражается формулою

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Функція S имѣетъ максимумъ при тѣхъ же обстоятельствахъ какъ и ея квадратъ; при этомъ, откинувъ постоянный множитель, мы опять не измѣнимъ условій максимума; такъ, обр., приводимъ вопросъ къ опредѣленію макс. произведенія $(p-x)(p-y)(p-z)$. Каждый множитель этого произведенія положительнъ, сумма ихъ $= (p-x) + (p-y) + (p-z) = 3p - (x+y+z) = p$ —величинѣ постоянной; слѣд., произведеніе достигнетъ максимума, когда всѣ множители сдѣлаются равными, т.-е. когда $p-x = p-y = p-z$, или $x = y = z$. Слѣд. искомый треугольникъ—*правильный*. Каждая сторона его $= \frac{2}{3}p$, а площадь $= \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$.

669. Задача II. Какой изъ всѣхъ *прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ одинаковую полную поверхность, имѣетъ наибольшій объемъ?*

Пусть x, y и z будутъ переменныя измѣренія этихъ параллелепипедовъ, S —данная полная поверхность; имѣемъ:

$$S = 2xy + 2xz + 2yz.$$

Переменный объемъ $U = xyz$. Его максимумъ будетъ при тѣхъ же условіяхъ, какъ максимумъ его квадрата: $U^2 = (xy)(xz)(yz)$. Но эти три положительныхъ множителя имѣютъ постоянную сумму $\frac{S}{2}$, слѣдов. максимумъ имѣетъ чѣсто при $xy = xz = yz$, откуда: $x = y = z$. Это значитъ, что наибольшій объемъ имѣетъ кубъ; величина максимальнаго объема $= x \cdot x \cdot x = x^3 = \frac{S^3}{6^3}$.

670. Задача III. Зная, что $mx^2 + ny^3 + pz^3 = q$, найти максимумъ произведенія $x^2 y^3 z^3$.

Произведеніе $x^2 y^3 z^3$ имѣетъ максимумъ при тѣхъ же обстоятельствахъ какъ и $m^2 x^4 y^6 z^6$, т.-е. какъ и $(mx^2)(ny^3)(pz^3)$; но сумма факторовъ этого послѣдняго произведенія постоянна (и равна q), слѣд. это произведеніе,

а съ нимъ и предложенное, имѣтъ maximum, когда множители равны, т.-е. когда $mx^2 = ny^3 = pz^7 = \frac{q}{3}$. Такимъ образомъ, максимальное значеніе предложеннаго произведенія $= \frac{q^3}{27mnp}$.

Напр., найдемъ, что произведеніе xy , при условіи $3x + 4y = 12$, имѣтъ maximum $= 3$, при $x = 2$ и $y = \frac{3}{2}$. Произведеніе x^2yz^8 , при условіи $3x^2 + 5y + 7z^8 = 315$, имѣтъ maximum $= 35.21.15$, при $x = \sqrt{35}$, $y = 21$, $z = \sqrt[8]{15}$.

671. Примѣчаніе I. Въ теоремѣ (§ 667) было дано, что переменныя x , y , z , . . . подчиняются только одному условію, чтобы сумма ихъ была постоянна; если же эти переменныя будутъ подчинены еще другимъ условіямъ (выражаемымъ равенствами или неравенствами), то мы уже не имѣемъ права замѣнять два множителя $a + h$, $a - k$, одинъ числомъ a , другой числомъ $a + h - k$, не измѣняя другихъ, ибо новое произведеніе можетъ уже не удовлетворять прочимъ условіямъ, кромѣ относящагося къ суммѣ. Слѣд. приведенное доказательство было бы непримѣнимо. Вообще, множители не могутъ быть равными, имѣть постоянную сумму и удовлетворять еще другимъ условіямъ; такъ что теорема § 667, вообще, не будетъ имѣть мѣста: maximum произведенія будетъ вообще меньше той величины произведенія, какую оно имѣтъ при равенствѣ множителей.

Рассмотримъ, наприм., произведеніе трехъ положительныхъ чиселъ x , y , z , сумма которыхъ постоянна и $= 12$, слѣд. удовлетворяющихъ условію

$$x + y + z = 12 \dots (1).$$

Пусть, кромѣ того, числа эти связаны еще условіемъ

$$x + 5y + 2z = a \dots (2),$$

гдѣ a —постоянная величина. Назовемъ переменное произведеніе, удовлетворяющее этимъ двумъ условіямъ, черезъ P . Рассмотримъ также произведеніе Q трехъ положительныхъ чиселъ x , y , z , удовлетворяющихъ только условію (1). Maximum произведенія Q будетъ имѣть при $x = y = z = 4$; самый же max. $= 64$. Что касается переменнаго произведенія P , область его значеній будетъ ограничена области значенія Q произведеніе P не можетъ принимать всѣхъ значеній, которыя можетъ имѣть Q ; въ самомъ дѣлѣ: для составленія Q нужно отыскать всѣ системы положительныхъ рѣшеній, удовлетворяющихъ неопредѣленному ур—нію (1). Для составленія же значеній, которыя можетъ принимать произведеніе P , нужно изъ всѣхъ сказанныхъ системъ выбрать только тѣ, которыя удовлетворяютъ и ур—нію (2). Отсюда очевидно, что, во-первыхъ, maximum (P) не можетъ быть больше maximum'a Q , во-вторыхъ, что только въ исключительномъ случаѣ maximum произведенія P будетъ равенъ max. (Q), вообще же maximum P будетъ меньше maximum'a Q .

Сказанный исключительный случай—тотъ, когда ур—ніе (2) удовлетворяется величинами $x = y = z = 4$, что имѣтъ мѣсто при $a = 4 + 5 \times 4 + 2 \times 4 = 32$; въ этомъ случаѣ 64 будетъ находиться въ числѣ значеній, которыя принимаетъ P , а такъ какъ max. (P) не можетъ быть больше max. (Q), и 64 есть max. произведенія Q , то тѣмъ болѣе 64 будетъ служить maximum'омъ и P .

Обобщая это разсужденіе, заключаемъ, что если факторы произведенія положительны, имѣютъ постоянную сумму и подчинены еще другимъ условіямъ, максимумъ произведенія вообще меньше той величины его, какую оно получаетъ, если всѣ множители сдѣлать равными; этой послѣдней величинѣ максимумъ произведенія равенъ только въ томъ исключительномъ случаѣ, когда всѣ условія, которымъ факторы подчинены, удовлетворяются, когда сдѣлать эти факторы равными.

Интересный примѣръ на этотъ исключительный случай представляетъ произведеніе $x^m y^n z^p$, состоящее изъ m множителей равныхъ x , n —равныхъ y , и p множителей равныхъ z , съ условіемъ, что сумма $mx + ny + pz$ всѣхъ множителей равна постоянному a .

На основаніи сказаннаго выше, это произведеніе будетъ имѣть макс., когда всѣ множители равны, если только равенство факторовъ будетъ совмѣстно съ остальными условіями, которымъ множители подчинены.

Равенство m множителей x съ дастъ $m - 1$ соотношеніе; подобно этому имѣемъ еще $n - 1$ и $p - 1$ условій, что составляетъ $m + n + p - 3$ условій; присоединивъ еще равенство суммы всѣхъ множителей количеству a , получимъ $m + n + p - 2$ соотношенія; присоединяя еще два уравненія $x = y = z$, всего будемъ имѣть $m + n + p$ уравненій для опредѣленія столькихъ же количествъ, а это вообще возможно. (Слѣд., въ этомъ случаѣ наибол. вел. произведеніемъ достигается при

$$x = y = z = \frac{a}{m + n + p}.$$

672. Примѣчаніе II. При показаніи этой теоремы (667) мы предполагали, что всѣ множители положительны. Но теорема, очевидно, имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда *всѣ* множители отрицательны, если только число ихъ *четное*. Если же всѣ множители отрицательны и число ихъ нечетное, то произведеніе будетъ минимумъ, когда всѣ множители равны. Въ самомъ дѣлѣ, если, взявъ произведеніе нечетнаго числа положительныхъ множителей, переимѣнимъ у нихъ знаки, то и знакъ произведенія переимѣнится. Но если функція U имѣетъ максимумъ M , то функція $(-U)$ имѣетъ минимумъ $(-M)$; потому что, если M есть макс. (U) , то $U < M$ для всѣхъ значеній этой функціи, близкихъ къ M ; а изъ неравенства $U < M$ имѣемъ $-U > -M$, слѣд. $-M$ есть минимумъ функціи $(-U)$.

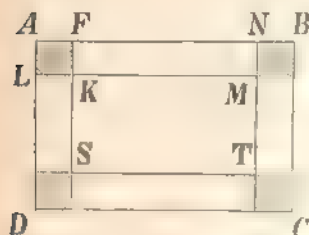
Наконецъ, если не всѣ множители отрицательны, то произведеніе не имѣло бы максимум'а, ибо при постоянной суммѣ множителей ихъ абсолютная величина могла бы увеличиваться неопредѣленно; и если число отрицательныхъ множителей четное, произведеніе было бы положительно и могло бы быть какъ угодно велико.

673. Примѣчаніе III. Для двухъ множителей теорема о макс. произведенія была доказана еще *Никомахомъ* 100 лѣтъ спустя послѣ Р. X.

674. Когда множители, имѣя постоянную сумму, не могутъ быть сдѣланы равными, прямое приложеніе теоремы (667) становится невозможно. Однако же, методъ неопредѣленныхъ коэффициентовъ даетъ возможность непрямого примѣненія теоремы. Приводимъ въ поясненіи сказаннаго слѣдующую задачу.

Задача. Въ прямоугольномъ картонномъ листѣ, стороны котораго равны a и b , требуется вынуть по угламъ такіе равные квадраты

AFKI, ..., чтобы, загнув ось четыре прямоугольника FKMN... перпендикулярно к плоскости KMST, составить коробку наибольшей вместимости?



Черт. 145.

Пусть $AF = x$, $AB = b$, $AD = a$; стороны основания коробки выразятся формулами $a - 2x$ и $b - 2x$, высота — x . Объем V коробки (какъ прямоугольнаго параллелепипеда)

$$V = (a - 2x)(b - 2x) \cdot x.$$

Чтобы сдѣлать сумму множителей постоянною, введемъ множитель 4 (введение постояннаго множителя 4 не вліяетъ на условія максимума); получимъ:

$$4V = (a - 2x)(b - 2x) 4x,$$

т.-е. произведение положительных переменныхъ множителей, которыхъ сумма $(a - 2x) + (b - 2x) + 4x$ равна постоянной величинѣ $a + b$; но какъ $b > a$, то ни при какомъ x нельзя сдѣлать $a - 2x = b - 2x$, и теорему (667) въ данномъ случаѣ нельзя примѣнить непосредственно. Чтобы найти максимумъ произведенія $(a - 2x)(b - 2x)x$, замѣтимъ, что, не измѣняя условій макс., мы можемъ умножить два изъ этихъ трехъ факторовъ на произвольныя постоянныя количества, напр., первый на α , второй на β , и искать максимумъ произведенія

$$\forall \alpha \beta = (\alpha a - 2\alpha x)(\beta b - 2\beta x)x.$$

Пользуясь неопредѣленностью постоянныхъ α и β , можно выбрать ихъ такъ, чтобы сумма всѣхъ трехъ множителей была постоянна. Представивъ эту сумму въ видѣ

$$\alpha a + \beta b - (2\alpha + 2\beta - 1)x,$$

находимъ, что она будетъ независима отъ x и слѣдовательно постоянна, когда $2\alpha + 2\beta - 1 = 0$. Такимъ образомъ α и β должны удовлетворять неопредѣленному ур-нію, и слѣд. существуетъ безчисленное множество паръ значений α и β , дѣлающихъ нашу сумму постоянной. Но изъ этихъ паръ надо выбрать такую пару значений α и β , при которой множители были бы равны. Итакъ, для опредѣленія α , β и x имѣемъ 3 ур-нія:

$$2\alpha + 2\beta - 1 = 0 \dots (1) \quad \alpha(a - 2x) = x \dots (2) \quad \beta(b - 2x) = x \dots (3).$$

Имѣя 3 ур-нія съ 3 неизвѣстными, мы получимъ опредѣленные значенія для α , β и x ; но намъ нѣтъ надобности опредѣлять α и β , а только x ; съ этою цѣлью исключаемъ изъ ур-ній (1), (2) и (3) α и β , чтобы получить ур-ніе съ однимъ неизвѣстнымъ x . Изъ (2) и (3) имѣемъ

$$\alpha = \frac{x}{a - 2x}, \quad \beta = \frac{x}{b - 2x};$$

подставивъ въ (1) эти значенія α и β , имѣемъ ур.

$$\frac{2x}{a - 2x} + \frac{2x}{b - 2x} - 1 = 0,$$

или

$$12x^3 - 4(a+b)x + ab = 0 \dots (4).$$

Это уравнение и дает такой x , при котором $V\alpha\beta$, а сл. и V имѣетъ максимум. Решая это уравн., имѣемъ

$$x = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}.$$

Оба корня действительны, ибо $a^2 + b^2 - ab = a^2 + b^2 - 2ab + ab = (a-b)^2 + ab$ — количеству положительному; они положительны, такъ какъ произведение и сумма корней положительны. Но чтобы корень уравненія (4) давалъ рѣшеніе задачи, недостаточно, чтобы онъ былъ действ. и положит.; нужно еще, чтобы онъ былъ меньше половины меньшей стороны прямоугольника $ABCD$. Пусть $a < b$; тогда можно взять оба или одинъ корень, смотря по тому, будутъ ли оба они или только одинъ заключаться между 0 и $\frac{a}{2}$. Подстановка въ первую часть уравненія (4) вмѣсто x количествъ 0, $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ даетъ

$$+ab, \quad a(a-b), \quad b(b-a):$$

первый результатъ положителенъ, сл. 0 заключается внѣ корней; второй результатъ отрицателенъ (ибо $a < b$), слѣд. $\frac{a}{2}$ лежитъ между корнями; третій результатъ положителенъ, сл. $\frac{b}{2}$ — внѣ корней. Такимъ образомъ, называя x' меньшій корень, x'' большій, имѣемъ

$$0 < x' < \frac{a}{2} < x'' < \frac{b}{2},$$

откуда слѣдуетъ, что большій корень x'' , какъ большій $\frac{a}{2}$, не можетъ служить отвѣтомъ; меньшій же корень x' , будучи меньше $\frac{a}{2}$, и служить отвѣтомъ на задачу. Итакъ высота коробки наибольшаго объема равна

$$x' = \frac{a+b - \sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}.$$

Когда $a = b$, т.-е. картонъ имѣетъ форму квадрата, прямо изъ послѣдней формулы находимъ: $x = \frac{a}{3}$.

Примѣчаніе. Если произведеніе содержитъ n переменныхъ множителей, зависящихъ отъ x , то произвольныхъ постоянныхъ надо брать $n-1$; вмѣстѣ съ x они составятъ n неизвѣстныхъ. Требованіе, чтобы сумма факторовъ равнялась постоянной, даетъ 1 уравн., а сравненіе n множителей дастъ $n-1$ уравненій, всего n уравненій, т.-е. сколько неизвѣстныхъ; поэтому, метода—общая.

Приложеніе способа неопредѣленныхъ коэффициентовъ къ вопросамъ о шах. и мин. принадлежитъ Гривье.

675. Теорема. Если сумма нѣсколькихъ положительныхъ переменныхъ x, y, z постоянна и равна a , то произведеніе $x^p y^q z^r$, гдѣ p, q, r данныя положительныя числа, имѣетъ максимумъ, когда переменныя

пропорциональны своим показателямъ, т.-е. когда $\frac{x}{p} : \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$, полагая, что x, y и z могутъ удовлетворить этимъ условіямъ.

Пусть, во-первыхъ, p, q и r будутъ числа цѣлыя.

Замѣчая, что введеніе постоянныхъ множителей не измѣнитъ условій maximum'a, заключаемъ, что данное выраженіе будетъ имѣть max. при такихъ же x, y, z , какъ и

$$\frac{x^p y^q z^r}{p^p q^q r^r}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{p}\right)^p \left(\frac{y}{q}\right)^q \left(\frac{z}{r}\right)^r,$$

или

$$\underbrace{\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdots \frac{x}{p}}_{p \text{ множит.}} \times \underbrace{\frac{y}{q} \cdot \frac{y}{q} \cdots \frac{y}{q}}_{q \text{ множит.}} \times \underbrace{\frac{z}{r} \cdot \frac{z}{r} \cdots \frac{z}{r}}_{r \text{ множит.}}$$

Произведеніе это состоитъ изъ $p + q + r$ множителей, которыхъ сумма постоянна и равна α , такъ какъ $\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdots \frac{x}{p} = \frac{x}{p} \cdot p = x, \frac{y}{q} + \frac{y}{q} + \cdots + \frac{y}{q} = \frac{y}{q} \cdot q = y$ и $\frac{z}{r} + \cdots + \frac{z}{r} = \frac{z}{r} \cdot r = z$. Примѣняя сюда теорему § 667, заключаемъ, что произведеніе достигнетъ maximum'a, когда множители сдѣлаются равными, т.-е. когда

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

Пользуясь известными свойствами равныхъ отношеній и помня, что $x + y + z = \alpha$, имѣемъ:

$$x = \frac{p\alpha}{p+q+r}, \quad y = \frac{q\alpha}{p+q+r}, \quad z = \frac{r\alpha}{p+q+r};$$

самый же maximum =

$$p^p q^q r^r \left(\frac{\alpha}{p+q+r} \right)^{p+q+r}.$$

Мы предполагали, что показатели p, q, r — числа цѣлыя. Но это предположеніе не необходимо, и теорема остается вѣрна и въ томъ случаѣ, когда показатели будутъ положительныя дроби. Приведемъ эти дроби къ общему знаменателю, пусть онѣ будутъ

$$p = \frac{\alpha}{\beta}, \quad q = \frac{\alpha'}{\beta}, \quad r = \frac{\alpha''}{\beta};$$

то произведеніе будетъ

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}} y^{\frac{\alpha'}{\beta}} z^{\frac{\alpha''}{\beta}}.$$

Очевидно, оно достигнетъ maximum'a одновременно со своей β -ой степенью:

$$x^{\alpha} y^{\alpha'} z^{\alpha''};$$

а это выраженіе, по доказанному, будетъ имѣть maximum при

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\alpha'} = \frac{z}{\alpha''}.$$

Эти равенства можно написать такъ:

$$\left(\frac{x}{r} = \frac{y}{q} = \frac{R}{r} \right),$$

или, наконецъ, такъ:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{R}{r}.$$

676. Задача I. Какой изъ всѣхъ конусовъ, описанныхъ въ данный шаръ, имѣетъ наибольшій объемъ?

Убѣдившись a priori, что рассматриваемый объемъ имѣетъ максимум, обозначимъ радиусъ основанія конуса буквою x , разстоянiе центра шара отъ этого основанiя буквою y , и буквою R радиусъ шара. Имѣемъ

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad V = \frac{1}{3} \pi x^2 (R + y);$$

или, замѣнивъ x^2 его величиною $R^2 - y^2$, найдемъ

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 - y^2) (R + y) = \frac{1}{3} \pi (R + y)^2 (R - y).$$

Отбросивъ постоянный множитель $\frac{1}{3} \pi$, и рассматривая произведенiе $(R + y)^2 (R - y)$, замѣчаемъ, что сумма первыхъ степеней множителей, т.-е. $(R + y) + (R - y)$ равна постоянной $2R$, слѣд. произведенiе имѣетъ максимумъ, когда переѣнныя $R + y$ и $R - y$ пропорциональны своимъ показателямъ, т.-е. $\frac{R + y}{2} = \frac{R - y}{1}$, откуда $y = \frac{R}{3}$.

677. Задача II. Описать около даннаго цилиндра конусъ наименьшаго объема.

Есть вообразимъ (черт. 115), что вершина A перемѣщается по оси AI , отъ точки H , то объемъ конуса вначалѣ безконечно-великъ, ибо основанiе его какъ угодно велико, а высота близка къ HI ; по мѣрѣ удаленiя точки A въ безконечность, объемъ снова приближается къ безконечности, ибо высота стремится къ безконечности, а основанiе — къ конечной величинѣ основанiя цилиндра. Измѣняясь отъ ∞ до ∞ , объемъ конуса проходить чрезъ минимумъ.

Пусть H и R — высота и радиусъ основанiя цилиндра, x и y — высота и радиусъ основанiя конуса. Объемъ конуса будетъ $V = \frac{1}{3} \pi x y^2$; но $y : R = x : (x + H)$, что слѣдуетъ изъ подобiя тр-ковъ ABH и AEN ; слѣд.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{x^3}{(x + H)^2} \dots (1).$$

Отбрасывая постоянный множитель $\frac{1}{3} \pi R^2$, ищемъ минимумъ выраженiя $\frac{x^3}{(x + H)^2}$, соответствующий максимумъу выраженiя $\frac{(x + H)^2}{x^3}$, которое можно представить въ

видѣ $\frac{1}{x} \left(1 - \frac{H}{x}\right)^2$. Условія максимум'а этого выраженія не измѣнятся, если помножимъ его на постоянное количество H , что даетъ

$$\frac{H}{x} \left(1 - \frac{H}{x}\right)^2.$$

Сумма первыхъ степеней производителей $\frac{H}{x}$ и $1 - \frac{H}{x}$ есть величина постоянная 1, слѣд. по теоремѣ § 675, максимумъ имѣетъ мѣсто, когда

$$\frac{H}{x} = 1 - \frac{H}{x},$$

когда $x = 3H$.

Итакъ, объемъ конуса достигаетъ minimum'а, когда высота конуса дѣлается вдвое больше высоты цилиндра. Пооставляя $3H$ вмѣсто x въ (1), находимъ, что минимальный объемъ $= \frac{9}{4} \pi R^2 H$, т.е. составляетъ $\frac{9}{4}$ объема цилиндра.

678. Задача III. Какой изъ всѣхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго полушара, имѣетъ наименьшую боковую поверхность?

Какъ и въ предыдущей задачѣ, сначала а priori убѣждаемся, что разсматриваемая поверхность имѣетъ minimumъ.

Пусть радиусъ шара будетъ R ; x , y и S —высота, радиусъ основанія и боковая поверхность конуса; имѣемъ:

$$S = \pi y \times AC.$$

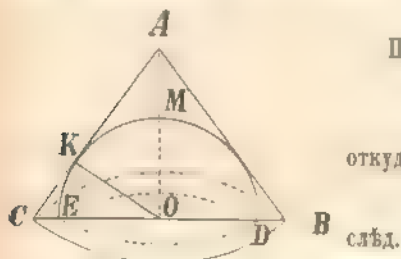
Подобные тр-ки AOC и AOK даютъ:

$$\frac{AC}{x} = \frac{y}{R} = \frac{x}{x^2 - R^2},$$

откуда

$$AC \cdot y = \frac{x^2}{x^2 - R^2},$$

$$S = \pi R \cdot \frac{x^2}{x^2 - R^2}.$$



Черт. 146.

Вопросъ приводится къ отысканію minimum'а $\frac{x^2}{x^2 - R^2}$, и слѣд. максимум'а обратной функціи $\frac{x^2 - R^2}{x^2}$, которой можно дать видъ $\frac{1}{x} \left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right)$. Возвысивъ въ квадратъ и умноживъ на R^2 , что не измѣнитъ условій максимум'а, приводимъ вопросъ къ нахожденію максимум'а выраженія

$$\frac{R^2}{x^2} \left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right),$$

въ которомъ множители $\frac{R^2}{x^2}$ и $1 - \frac{R^2}{x^2}$ имѣютъ постоянную сумму, равную 1; и слѣд. произведеніе это будетъ имѣть максимумъ тогда, когда

$$\frac{R^2}{x^2} = 1 - \frac{R^2}{x^2},$$

Легко видеть, что корни действительны и оба положительны; но зачатъ можетъ отвѣчать только тотъ изъ нихъ, который $< R$. Подстановка R въ первую часть уравненія даетъ результатъ $(-R^2)$; заключаемъ, что R находится между корнями, т. е. больший корень больше, а меньший — меньше R . Откидывая больший корень, соответствующій знаку $+$ передъ радикаломъ, находимъ:

$$x = \frac{5R - 1 \pm 25R^2 - 12R^2}{6} = \frac{R(5 - 1 \pm 13)}{6}.$$

680. Теорема Сумма двухъ переменныхъ, которыхъ произведение равно положительному постоянному, имѣетъ максимумъ, когда оба слагаемые отрицательны, и минимумъ, когда они положительны; при чемъ максимумъ и минимумъ имѣютъ мѣсто, когда оба количества равны между собою, если только они могутъ быть совланы равными. Сумма же двухъ переменныхъ, которыхъ произведение равно постоянной отрицательной величинѣ, не имѣетъ ни максимум'а, ни минимум'а.

Прямое доказательство. Пусть произведение $= p$, а одинъ изъ множителей $= x$; другой множитель будетъ $\frac{p}{x}$, а сумма ихъ

$$y = x + \frac{p}{x}.$$

1-й случай: $p < 0$. Назвавъ абсолютную величину произведенія p черезъ p' , имѣемъ

$$y = x - \frac{p'}{x}.$$

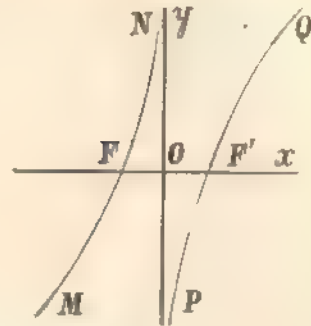
Будемъ измѣнять x отъ $-\infty$ до $+\infty$. При $x = -\infty$, $y = -\infty + \frac{p'}{\infty} = -\infty$; по мѣрѣ приближенія x къ 0, первый членъ, оставаясь отрицательнымъ, увеличивается до 0, второй членъ, $\frac{p'}{x}$, оставаясь положительнымъ, увеличивается до $+\infty$; слѣд. и сумма y увеличивается отъ $-\infty$ до $+\infty$. Продолжаемъ увеличивать x отъ 0 до $+\infty$. При x немного большемъ нуля, первый членъ суммы весьма малъ; второй членъ, будучи равенъ $-\frac{p'}{x}$, дѣленному на весьма малую положительную величину, будетъ равенъ отрицательному числу съ весьма большою абсолютною величиною; слѣд. при переходѣ x чрезъ 0, функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, дѣлая скачекъ изъ $+\infty$ въ $-\infty$. При дальнейшемъ увеличеніи x до $+\infty$, первый членъ возрастаетъ до $+\infty$, второй, оставаясь отрицательнымъ, приближается къ 0; оба члена опять увеличиваются, потому и сумма ихъ возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Такимъ образомъ при увеличеніи x отъ $-\infty$ до $+\infty$, y получаетъ дважды всякое данное значеніе при двухъ значеніяхъ x , дающихъ въ произведеніи p : при двухъ равныхъ и противоположныхъ значеніяхъ x функція принимаетъ два равныя и противоположныя значенія, образуя 2 вѣтви: въ той и другой y идетъ, непрерывно увеличиваясь отъ $-\infty$ до ∞ ; обѣ вѣтви раздѣлены разрывомъ непрерывности, имѣющимъ мѣсто при $x = 0$. Функція не имѣетъ, слѣд., ни максимум'а, ни минимум'а.

Таблица изменений y .

Кривая изменений.

x	y
$-\infty$	$-\infty$
$0-h$	$+\infty$
$0+h$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$



Черт. 148.

Обе ветви изображаются ординатами кривых MN и PQ , имеющих асимптотой ось y ; ось x они пересекают въ расстояніяхъ отъ начала, равныхъ $+\sqrt{p'}$ и $-\sqrt{p'}$; ибо изъ $y = 0$ слѣдуетъ $x = \frac{p}{x} = 0$, откуда $x^2 = p'$ и $x = \pm\sqrt{p'}$. Кривая симметрична относительно точки O .

2-й случай: $p > 0$. Въ этомъ случаѣ

$$y = x + \frac{p}{x} \quad (1)$$

Этому равенству послѣдовательно даемъ видъ:

$$y = \sqrt{x^2 + \frac{p^2}{x^2}} = \sqrt{x^2 + \frac{p^2}{x^2} - 2p - 4p = \sqrt{4p + \left(x - \frac{p}{x}\right)^2}}.$$

Будемъ увеличивать x отъ 0 до $+\infty$. При увеличеніи x отъ 0 до $+\sqrt{p}$, функція $x - \frac{p}{x}$, по предыдущему, увеличивается отъ $-\infty$ до 0, а слѣдоват. $\left(x - \frac{p}{x}\right)^2$ уменьшается отъ $+\infty$ до 0. При возрастаніи x отъ $+\sqrt{p}$ до $+\infty$, $x - \frac{p}{x}$ возрастаетъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и квадратъ этой функціи, отъ 0 до $+\infty$. Функція y , оставаясь положительною, уменьшается сначала отъ $+\infty$ до $+\sqrt{2p}$, а затѣмъ увеличивается отъ $+\sqrt{2p}$ до $+\infty$. Слѣд. y проходитъ чрезъ минимумъ $+\sqrt{2p}$, при $x = +\sqrt{p}$.

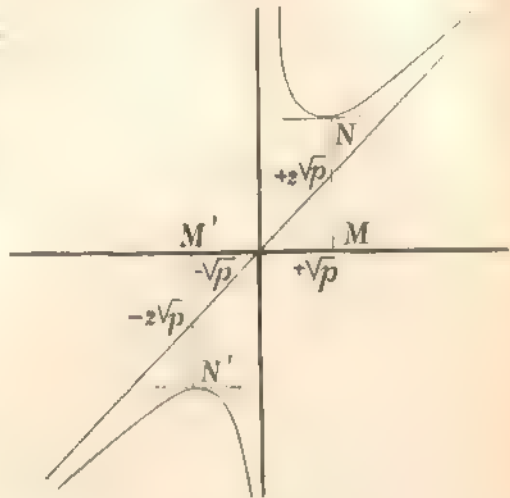
Изъ (1) непосредственно ясно, что при двухъ значеніяхъ x , равныхъ по величинѣ, но противоположныхъ по знаку, y имѣетъ величины равныя, отличающіяся только знаками. Слѣд. въ интерваллѣ измененій x отъ $-\infty$ до 0, функція возрастаетъ до максимумъа $-\sqrt{2p}$, при $x = -\sqrt{p}$, а затѣмъ при

увеличении x отъ $-\sqrt{p}$ до 0, y уменьшается отъ $-2\sqrt{p}$ до $-\infty$. При переходѣ x чрезъ 0, имѣетъ мѣсто разрывъ непрерывности изъ $-\infty$ въ $+\infty$.

Таблица измѣненій y .

Кривая измѣненій.

x	y
$-\infty$	$-\infty$
$-\sqrt{p}$	$-2\sqrt{p}$ макс.
0	$-\infty$
0 $+$ h	$+\infty$
$+\sqrt{p}$	$+2\sqrt{p}$ мин.
$+\infty$	$+\infty$



Черт. 149.

$$OM = OM' = \sqrt{p};$$

$$MN = M'N' = 2\sqrt{p}.$$

Непрямое доказательство.—Обозначив данное произведение переменных x и $\frac{p}{x}$ буквою p , а сумму ихъ S , имѣемъ ур—ніе

$$x + \frac{p}{x} = S \dots (1).$$

Рѣшая ур—нію (1) относительно x , имѣемъ:

$$x = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - p}.$$

Чтобы переѣнное x было дѣйствительно, необходимо, чтобы было $\frac{S^2}{4} > p$, или $S^2 > 4p$. Различаемъ два случая:

I. $p < 0$. Условіе $S^2 > 4p$ всегда будетъ удовлетворено, каково бы ни было S ; слѣд. сумма двухъ факторовъ, произведеніе которыхъ равно постоянной отрицательной величинѣ, можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $+\infty$; сумма S не имѣетъ ни макс., ни мин.

II. $p > 0$. Неравенству $S^2 > 4p$ можно дать видъ

$$(S + 2\sqrt{p})(S - 2\sqrt{p}) > 0;$$

оно будетъ удовлетворено, если оба множителя будутъ имѣть одинаковые знаки; слѣд. должно быть:

1) Или: $S = 2\sqrt{p}$, откуда: $\sin. (S) = 2\sqrt{p}$; причем $x = \frac{S}{2} = \sqrt{p}$; другой множитель также $= \frac{p}{x} = \sqrt{p}$.

2) Или $S = -2\sqrt{p}$, откуда: $\sin. (S) = -2\sqrt{p}$; причем $x = \frac{S}{2} = -\sqrt{p}$; другой множитель $= \frac{p}{x} = -\sqrt{p}$.

Итак: максимум и минимум суммы имеют место при равенстве слагаемых.

681. Задача I. Из всех прямоугольников одинаковой площади какой имеет наименьший периметр?

Обозначим стороны прямоугольника через x и y , имеем, по условию, $xy = a^2$, где a^2 постоянно; найти минимум периметра $2x + 2y$, или минимум $(x + y)$. Так как x может быть столько раз больше y , то площадь тогда будет тем же самым, когда будет $x = y = a$, т.е. когда прямоугольник превратится в квадрат. Самый минимум периметра равен $4a$.

682. Задача II. Даны две параллельныя и точка A между ними, служящая вершиною угла — вершина прямого угла треугольника, которого другая вершина лежит на одной из параллелей. Какое положение имеет другая вершина, чтобы периметр был минимален?

Проведем от точки A перпендикуляр AD на одну из параллелей, и пусть: $AD = a$, $AE = b$, $EC = x$. Угол EAC \angle ABD — вертикальные углы, следовательно стороны AE , EC треугольника EAC и стороны AB , AD треугольника ABD пропорциональны.

$$AC:EC = AB:AD, \text{ или } AC:x = AB:a \dots (1)$$

Умножая оба предыдущие члена на AC , имеем $AC^2:x = AB \cdot AC:a$; след. удвоенная площадь треугольника ABC , или

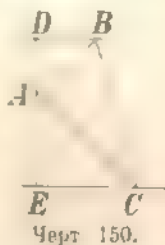
$$AB \cdot AC = \frac{AC^2}{x}; \text{ но } AC^2 = b^2 + x^2, \text{ откуда:}$$

$$2 \text{ пл. } ABC = \frac{a}{x} (b^2 + x^2) = a \left(\frac{b^2}{x} + x \right).$$

Произведение положительных членов $\frac{b^2}{x}$ и x равно постоянному b^2 , след. сумма $\frac{b^2}{x} + x$ имеет минимум, когда $\frac{b^2}{x} = x$, или $x^2 = b^2$, откуда $x = b$. Но в таком случае $BD = a$, и задача решается весьма простым построением.

683. Задача III. — Определить наилучшее соединение элементов гальванической батареи при данном внешнем сопротивлении.

Пусть всех элементов M ; электровозбудительная сила каждого E . внутреннее сопротивление каждого элемента ρ , дано — внешнее сопротивление r . Разделим элементы на m групп по n элементов в каждой: $M = m \cdot n$; в каждой группе соединим полюсы параллельно (спинки с цинком, уголь с углем), и полученные группы соединим последовательно; составится батарея как бы из m больших элементов. Электровозбудительная сила каж-



Черт. 150.

даго изъ нихъ E , всей батареи — mE ; сопротивление каждаго изъ такихъ элементовъ $\frac{\rho}{n}$; внутр. сопр. всей батареи $m \cdot \frac{\rho}{n}$. Сила тока

$$I = \frac{mE}{m \cdot \frac{\rho}{n} + r} = \frac{ME}{\frac{M\rho}{n} + rn}.$$

Числитель ME этой дроби есть величина постоянная, знаменатель — содержитъ переменное n ; дробь будетъ имѣть максимумъ, когда знаменатель достигнетъ минимума. Но произведение положительныхъ переменныхъ $\frac{M\rho}{n}$ и rn есть величина постоянная ($M\rho r$), слѣд. сумма будетъ имѣть минимумъ, когда

$$\frac{M\rho}{n} = rn, \text{ или } \frac{m}{n} \rho = r,$$

т.е. сила тока достигаетъ максимума, когда внутреннее сопротивление батареи равно внешнему.

684. Тотъ же вопросъ о минимальномъ значеніи суммы можно рѣшить еще такъ. Можно доказать слѣдующее

Предложеніе. Сумма двухъ положительныхъ переменныхъ, произведение которыхъ сохраняетъ постоянную величину, измѣняется въ томъ же смыслѣ, какъ и абсолютное значеніе ихъ разности.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть даны два переменныхъ положительныхъ числа x и y , произведение которыхъ равно постоянной a^2 .

$$xy = a^2.$$

Тождество

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$$

дастъ

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4a^2.$$

Отсюда прямо видно, что $(x - y)^2$, а слѣд. и $x + y$ измѣняется въ томъ же смыслѣ какъ $(x - y)^2$ или $|x - y|$ — при увеличеніи $x - y$ увеличивается и $x + y$, и наоборотъ; значить, когда $|x - y|$ принимаетъ наим. значеніе, тогда и $x + y$ достигаетъ минимума. Такимъ образомъ имѣемъ заключеніе:

Если переменныя положительныя слагаемыя, коихъ произведение постоянно, не могутъ быть сдѣланы равными, минимумъ изъ суммы будетъ имѣть мѣсто тогда, когда абсолютное значеніе ихъ разности достигнетъ минимума. Если же они могутъ быть сдѣланы равными, то ихъ сумма будетъ миним., когда они сдѣлаются равными (и равными ихъ геометрической средины).

Такъ, въ задачѣ предыдущаго §, если внутреннее сопротивление батареи не можетъ быть сдѣлано равнымъ внешнему, токъ получить наибольшую силу, когда внутреннее сопротивление будетъ возможно меньше разниться отъ внешнего. Вотъ еще примѣръ, иллюстрирующій случай подобнаго рода.

685. Задача IV. — Имѣемъ переменный ромбъ, описанный около даннаго круга, и вписанный прямоугольникъ, вершины котораго находятся въ точкахъ касанія сторонъ ромба. При какомъ положеніи прямоугольника сумма площадей обоихъ четырехугольниковъ будетъ миним.

Когда точка A будет удаляться по линии SA от точки S въ бесконечность, площадь ромба будетъ измѣняться отъ бесконечности до бесконечности; слѣд. сумма обѣихъ площадей сначала уменьшается, затѣмъ начинаетъ увеличиваться, слѣд. проходитъ чрезъ минимумъ. Затѣмъ, легко доказать, что произведение площадей остается *постояннымъ*, въ самомъ дѣлѣ, обозначая площадь ромба буквою Z , площадь прямоугольника Z' , и замѣтая, что $Z = 4\Delta AOD$, $Z' = 8\Delta OPE$, имѣемъ, $Z' : 2Z = OPE : AOD =$

$= R^2 : AD$; но $Z = AD \cdot 2R$, слѣд. $Z' : 2Z = 4R^2 : Z$, откуда $Z \cdot Z' = 8R^4$ — величинѣ постоянной. Хотя произведение разсматриваемыхъ переменныхъ и постоянно, но какъ мы не можемъ считать ихъ равными (ибо они всегда различны площадью круга), то для определения минимума $Z + Z'$ можно искать минимум разности $Z - Z'$ (или $Q - AEP$).

Но $DEQ = \frac{1}{2}xy$, $AEP = \frac{1}{2}y^2$, а

$$Z - Z' = 2 \cdot \frac{R^4 - 2x^2y^2}{xy}$$

Замѣчая, что $x^2 - y^2 = R^2$, имѣемъ отсюда: $x^4 - u^4 = R^4 - 2x^2y^2$, слѣд.

Очевидно, это выраженіе имѣетъ минимумъ, когда x^2y^2 имѣетъ максимумъ; но сумма $x^2 + y^2$ равна постоянной R^2 , слѣд. x^2y^2 имѣетъ максимумъ при $x = y$. Итакъ, искомый минимумъ суммы $Z + Z'$ имѣетъ мѣсто тогда, когда прямоугольникъ обращается въ квадратъ; тогда и ромбъ обращается въ квадратъ, и величина $\min. (Z + Z') = 6R^2$.

686. Теорема. — Сумма n положительныхъ переменныхъ, чьихъ произведение постоянно, имѣетъ минимумъ, когда эти n чиселъ равны между собою (полагая, что они могутъ быть дѣлами равными).

Пусть будутъ x, y, z, \dots, t, u — n положительныхъ переменныхъ, подчиненныхъ единственному условию:

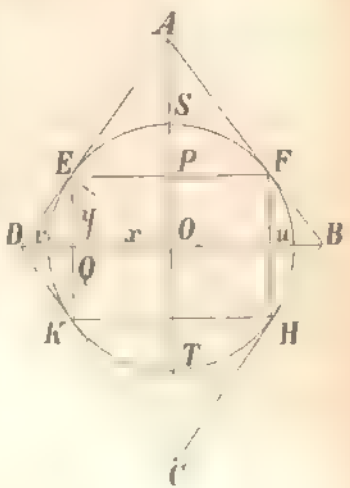
$$(1) \quad x > 0, y > 0, \dots, t > 0, u > 0; xyz \dots t \cdot u = a^n,$$

гдѣ a — данное положительное число. Ихъ сумма

$$S = x + y + z + \dots + t + u$$

есть функція $n - 1$ независимыхъ переменныхъ.

Между системами значеній x, y, \dots, u , удовлетворяющихъ условіямъ (1),



Черт. 151.

существует одна, и только одна, составленная изъ равныхъ значений. Система

$$(2) \quad x = y = z = \dots = u = a;$$

соответственное значеніе S есть na .

Пусть будетъ

$$x', y', z', \dots, u',$$

система значений, удовлетворяющихъ условіямъ (1), но отличная отъ системы — и пусть

$$S' = x' + y' + z' + \dots + u'.$$

Докажемъ, что $S' > na$. Въ самомъ дѣлѣ, числа x', y', z', \dots, u' , не равны между собою, следовательно ихъ арифметическая середина больше геометрической середины (§ 339); следовательно

$$\frac{S'}{n} > \sqrt[n]{x' y' z' \dots u'}$$

или

$$\frac{S'}{n} > a, \text{ или } S' > na$$

что и требовалось доказать.

Примѣчаніе.—Эта теорема, вообще, перестанетъ быть вѣрною, если переменныя подчинены инымъ условіямъ, кромѣ неизмѣнности ихъ произведенія. Но если новыя условія позволяютъ переменнымъ x, y, \dots сдѣлаться равными, теорема имѣетъ мѣсто.

687. Задача I.—Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковую площадь, какой имѣетъ наименьшій периметръ?

Обозначивъ стороны черезъ x, y, z , а постоянную площадь буквою Q , имѣемъ

$$(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z) = 16Q^2.$$

Сумму $x + y + z$ можно представить въ видѣ:

$$\frac{3}{4} \left\{ \frac{x+y+z}{3} + \frac{x+y-z}{1} + \frac{x-y+z}{1} + \frac{-x+y+z}{1} \right\}.$$

Произведеніе четырехъ членовъ, заключенныхъ въ скобки, равно постоянной $16Q^2$, слѣд. сумма имѣетъ миним., когда ея члены равны. Найдемъ, что они равны при $x = y = z$. Слѣд. минимальный периметръ принадлежитъ правильному треугольнику, а самый вып. $= 2\sqrt[3]{27} \sqrt{Q}$.

688. Задача II.—Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ одинаковаго объема какой имѣетъ наименьшую полную поверхность?

Пусть переменныя измѣренія параллелепипедовъ, сохраняющихъ одинаковый объемъ a^3 , будутъ x, y, z ; имѣемъ:

$$xyz = a^3.$$

Ищемъ миним. полной поверхности $S = 2(xy + xz + yz)$; замѣчая, что $xy \cdot xz \cdot yz = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = a^6$, находимъ, что сумма достигнетъ минимума

при $xu = xz = yz$, или при $x = y = z = a$, т.-е. когда параллелепипедъ будетъ кубъ, самая минимальная поверхность равна $6a^2$.

Проверка. Взявъ $x = a + h$, $y = a - h$, и слѣд. $z = \frac{a^3}{a^2 - h^2}$, найдемъ:

$$S' = 6a^2 + 2h^2 + \frac{4h^4}{a^2 - h^2}, \text{ что больше } 6a^2.$$

689. Задача III. — Зная, что $x^2y^2z^2 = \text{пост. } q$, найти минимум суммы $mx^2 + ny^2 + pz^2$.

Изъ условия $x^2y^2z^2 = q$ имѣемъ $(mx^2)(ny^2)(pz^2) = mpnq$; слѣдов. мы должны найти минимум суммы, зная, что произведение ея членовъ постоянно. Искомая сумма имѣетъ мѣсто при $mx^2 = ny^2 = pz^2 = \sqrt[3]{mpnq}$, а самый минимум $= 3\sqrt[3]{mpnq}$.

Напр. зная, что $xy = 16$, найдемъ минимум $3x + 12y$, рассуждая такъ: изъ условия $xy = 16$ имѣемъ: $(3x)(12y) = 16 \cdot 3 \cdot 12 = (24)^2$; слѣд. данная сумма имѣетъ минимумъ при $3x = 12y = 24$, т.-е. при $x = 8$ и $y = 2$; самый минимум $= 2 \cdot 24$, т.-е. 48.

Еще примѣръ. Зная, что $xy = a^2$, найти мин. $x^2 + xy + y^2$. Изъ $xy = a^2$ найдемъ $x^2y^2 = a^4$, или $x^2 \cdot xy \cdot y^2 = a^4$; произведение слагаемыхъ постоянно, слѣд. минимум суммы имѣетъ мѣсто при $x^2 = xy = y^2$, т.-е. при $x = y = a$, ибо $xy = a^2$; самый минимум $= 3a^2$.

690. Теорема. — Если произведение данныхъ степеней нѣсколькихъ переменныхъ x, y, z имѣетъ постоянную величину: $x^py^qz^r = P$, то сумма первыхъ степеней этихъ переменныхъ, $x + y + z$, имѣетъ минимумъ, когда числа x, y, z пропорциональны своимъ показателямъ, т.-е. когда $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$, если только числа эти могутъ имѣть такія значенія.

Равѣнявъ обѣ части равенства $x^py^qz^r = P$ на постоянное количество $p^p \cdot q^q \cdot r^r$, найдемъ

$$\left(\frac{x}{p}\right)^p \cdot \left(\frac{y}{q}\right)^q \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^r = \frac{P}{p^p \cdot q^q \cdot r^r} \quad (1)$$

что можно представить въ видѣ

$$\underbrace{\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot \dots \cdot \frac{x}{p}}_{p \text{ разъ}} \cdot \underbrace{\frac{y}{q} \cdot \frac{y}{q} \cdot \dots \cdot \frac{y}{q}}_{q \text{ разъ}} \cdot \underbrace{\frac{z}{r} \cdot \frac{z}{r} \cdot \dots \cdot \frac{z}{r}}_{r \text{ разъ}} = \frac{P}{p^p \cdot q^q \cdot r^r}.$$

Сумма произведений первой части равна $\frac{x}{p} \cdot p + \frac{y}{q} \cdot q + \frac{z}{r} \cdot r$ или $x + y + z$. т.-е. искомая, произведение же ихъ — постоянно, $\left(\frac{x}{p} \cdot \frac{y}{q} \cdot \frac{z}{r}\right)^{p+q+r}$, слѣд. по теоремѣ § 686, эта сумма будетъ минимъ при равенствѣ ея чистей, т.-е. при

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \quad (2).$$

Соотвѣтствующія минимальной суммѣ значенія переменныхъ имѣемъ изъ ур-ній (1) и (2), именно

$$x = p \cdot \sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p \cdot q^q \cdot r^r}}, \quad y = q \cdot \sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p \cdot q^q \cdot r^r}}, \quad z = r \cdot \sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p \cdot q^q \cdot r^r}}.$$

Самый минимум суммы

$$= (p + q + r)^{\frac{p+q+r}{p \cdot q \cdot r}} \sqrt{\frac{p}{p^p \cdot q^q \cdot r^r}}.$$

691. Задача I. — Зная, что $x^2 y^3 z^4 = q$, найти минимум $m x^a + n y^b + p z^c$.

Из $x^2 y^3 z^4 = q$ имеем:

$$(x^2 y^3 z^4)^{abc} = q^{abc}, \quad \text{т.е.} \quad (x^a)^{bc} (y^b)^{ac} (z^c)^{ab} = q^{abc},$$

следовательно

$$(m x^a)^{bc} (n y^b)^{ac} (p z^c)^{ab} = m^{bc} n^{ac} p^{ab} q^{abc} \dots (1).$$

Такимъ образомъ вопросъ приведенъ къ нахождению минимума суммы $m x^a + n y^b + p z^c$, зная, что произведение различныхъ степеней ея членовъ постоянно; по теоремѣ § 690 несомнѣнно имѣеть мѣсто при

$$\frac{m x^a}{b c a} = \frac{n y^b}{a c b} = \frac{p z^c}{a b c};$$

соединивъ эти два уравненія съ (1), найдемъ, при какихъ x, y, z имѣеть мѣсто минимумъ данной суммы, и самый минимумъ.

Примѣръ. — Зная, что $x^2 y^3 = a^5$, найти минимумъ $3x + 2y$.

Изъ $x^2 y^3 = a^5$ имѣемъ: $(3x)^2 (2y)^3 = 9 \cdot 8 \cdot a^5$; слѣд. по теоремѣ § 690 заключаемъ, что несомнѣнно имѣеть мѣсто при $\frac{3x}{2} = \frac{2y}{3}$, выражая отсюда x и вставляя въ условіе, имѣемъ:

$\frac{1}{9} \cdot y^3 = a^5$, откуда $y = a \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; самый минимумъ есть $\frac{4y}{3} + 2y$, т.е. $\frac{10a}{3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}$.

692. Задача II. — Найти минимумъ полной поверхности нини даннаго объема $\pi \frac{a^3}{6}$.

A

Нини есть тѣло, образуемое вращеніемъ на 180° около оси AA' фигуры, состоящей изъ прямоугольника $BDCO$, завершающагося квадратомъ ABO . Пусть радиусъ $OA = x$, высота OC прямоугольника равна y ; поверхность нини

$$= \pi \cdot \frac{x^2}{2} + \pi x y + \pi x^2 \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{2} (3x^2 + 2xy).$$

Но $\frac{\pi a^3}{6} = \frac{\pi}{2} x^2 y + \frac{\pi x^3}{3}$, откуда $y = \frac{a^3 - 2x^3}{3x^2}$;

слѣд. поверхность нини

$$= \frac{\pi}{2} \left(3x^2 + \frac{2a^3 - 4x^3}{3x} \right) = \frac{\pi}{2} \left(3x^2 + \frac{2a^3}{3x} - \frac{5}{6} x^2 + \frac{2x^3}{x} \right).$$

Произведеніе $(5x^2) \cdot \left(\frac{2a^3}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \text{пост. } 20a^{\frac{3}{2}}$, слѣдоват. сумма

$5x^2 + \frac{2a^3}{x}$, то теор. § 690, будет миним, когда $\frac{5x^2}{1} = \frac{x}{2}$; откуда $x = \frac{a}{\sqrt[3]{5}}$.

Отсюда слѣдуетъ: $y = \frac{a}{\sqrt[3]{5}} = x$.

693. Задача III.—Найти минимум суммы $mx^a + \frac{n}{x^b}$.

Всегда можно найти такія два числа α и β , чтобы $\alpha\alpha = b\beta$; найдя ихъ, имѣемъ тождество $(x^\alpha)^\alpha = (x^\beta)^\beta$, откуда $(mx^\alpha)^\alpha = \frac{n}{x^\beta} \cdot \frac{n}{x^\beta} \cdot m^\alpha \cdot n^\beta$. Такимъ образомъ, вопросъ приведенъ къ нахожденію минимума суммы, зная, что произведение двухъ степеней ея членовъ постоянно; по теор. § 690 минимум имѣетъ мѣсто при

$$\frac{mx^a}{a} = \frac{n}{x^b}, \text{ т.-е. при } x^{a+b} = \frac{an}{\beta m} = \frac{bn}{\alpha m},$$

откуда

$$x = \sqrt[a+b]{\frac{bn}{am}}; \text{ самый минимум } = (a+b) \cdot \sqrt[a+b]{\frac{n^\beta}{a^\beta} \cdot \frac{m^\alpha}{b^\alpha}}.$$

694. Теоремы § 686 и 690 обратны теоремамъ § 667 и 675. Этотъ результатъ встрѣчается часто, и его можно формулировать такъ:

Теорема. — Если U и V суть функции нѣсколькихъ переменныхъ x, y, z, \dots ; если, затѣмъ, при постоянномъ значеніи U функции V имѣетъ минимумъ B ; если, сверхъ того, B измѣняется съ томъ же смысломъ какъ и U , то обратно: U будетъ имѣть минимумъ равный A , когда V будетъ сохранять постоянное значеніе B .

Въ самомъ дѣлѣ, когда U получаетъ значеніе A , то этимъ переменныя x, y, z, \dots не опредѣляются, такъ какъ они должны удовлетворять только одному уравненію

$$U = A;$$

слѣд. функція V можетъ принимать безчисленное множество различныхъ значеній, изъ числѣ которыхъ наибольшее, по условію, есть B ; отсюда ясно, что если, наоборотъ, мы дадимъ функции V постоянное значеніе B , то въ числѣ безчисленнаго множества значеній, которыя можетъ принимать U , будетъ находиться и A . И легко показать, что U не можетъ получить никакого значенія меньшаго A : въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что U можетъ принять значеніе $A' < A$, мы найдемъ, что наибольшее изъ значеній V , соответств. съ $U = A'$, будетъ меньше B , изъ сизу того условія, что B и A вмѣняются въ одномъ смыслѣ. Слѣд. A есть дѣйствительно минимумъ функции U , когда V сохраняетъ постоянное значеніе B .

Примѣръ. — Пусть

$$U = x + y + z + t, \quad V = xyz + t$$

по теоремѣ (§ 667), если U сохраняетъ постоянную величину A , то V получаетъ наибольшее значеніе при

$$x = y = z = t.$$

а самый этот максимум $B = \frac{\lambda^4}{4}$. Но A и B изменяются въ одномъ смыслѣ (ибо x, y, z, t — положительные), слѣд. когда V сохраняетъ значеніе $\frac{\lambda^4}{4}$, то наиб. изъ значеній, принимаемыхъ U , будетъ A ; этого значенія U достигаетъ, слѣд., при

$$x = y = z = t.$$

695. Въ заключеніе приведемъ еще нѣсколько примѣровъ тѣхъ аналитическихъ уловокъ, при помощи которыхъ можно элементарно находить макс. и мин. функций высшихъ степеней отъ нѣсколькихъ переменныхъ.

I. *Найти minimum* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, *зная, что* $x + y = 2a$.

Имѣемъ: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{2a}{xy}$. Очевидно, эта дробь будетъ имѣть minimum тогда, когда знаменатель ея достигаетъ maximum'a; но $x + y = 2a$, слѣд. xy имѣетъ макс. при $x = y = a$; при этихъ значеніяхъ x и y данное выраженіе и имѣетъ minimum $= \frac{2}{a}$.

II. *Найти minimum* $x - y$, *зная, что* $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

$x - y$ будетъ имѣть мин., когда $(x - y)^2$ имѣетъ minimum. Но, по условію, $\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = \frac{1}{a^2}$, откуда

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = \frac{x^2 y^2}{a^2} + 2xy = xy \left(\frac{xy}{a^2} + 2 \right).$$

Очевидно, это выраженіе имѣетъ minimum, когда xy имѣетъ minimum, т.-е. когда $\frac{1}{xy}$, а потому и $\frac{1}{x^2 y^2}$ имѣетъ макс. Но $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ (въ виду того, что сумма этихъ производителей постоянна) имѣетъ макс. при $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2a^2}$, т.-е. при $x = y = a\sqrt{2}$. При этихъ значеніяхъ $x - y$ и имѣетъ minimum, равный $2a\sqrt{2}$.

III. *Найти minimum* $x^2 + y^2 + z^2$, *зная, что* $x + y + z = 3a$.

Тождественно имѣемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x+y+z)^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2}{3} = \frac{9a^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2}{3}.$$

Отсюда видно, что данное выраженіе имѣетъ minimum тогда, когда имѣетъ minimum $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2$; но эта сумма существенно положительна, слѣд. ея minimum есть нуль, и имѣетъ мѣсто при $x = y = z$. Потому и данное выраженіе имѣетъ мин. при $x = y = z = a$; самый minimum $= 3a^2$.

IV. *Доказать, что если* $x + y + z = 2a$, *сумма* $x^m + y^m + z^m$ *имѣетъ minimum при* $x = y = z$.

Во-первыхъ, заявляемъ, что теорема справедлива для $m = 2$, ибо

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4a^2 - 2xy,$$

откуда ясно, что какъ уменьшаемое постоянно, то разность имѣетъ мин., когда вычитаемое имѣетъ maximum, т.-е. при $x = y$.

Затѣмъ, допустивъ, что теорема справедлива для показателя $m - 1$ и для всѣхъ предыдущихъ, докажемъ, что она справедлива и для показателя m .

Различаемъ два случая: $m = 2m'$ и $m = 2m'' + 1$.

Положивъ $m = 2m'$, имѣемъ:

$$x^{2m'} + y^{2m'} = (x^{m'} + y^{m'})^2 - 2x^{m'}y^{m'};$$

по положенію, $x^{m'}$, $y^{m'}$ имѣемъ минимумъ при $x = y$; съ другой стороны $x^{m'}y^{m'}$ для (x, y) имѣемъ максимумъ при $x = y$. Слѣд. $x^{2m'} + y^{2m'}$ имѣемъ минимумъ при $x = y$.

Положивъ $m = 2m'' + 1$, имѣемъ:

$$x^{2m''+1} + y^{2m''+1} - (x^{m''+1} + y^{m''+1})(x^{m''} + y^{m''}) - x^{m''}y^{m''}(x + y) = \\ = (x^{m''+1} + y^{m''+1})(x^{m''} + y^{m''}) - 2a(xy)^{m''}.$$

Первая часть этой разности имѣетъ минимумъ при $x = y$, ибо, по положенію, оба ея множителя — минимумъ при $x = y$; вторая часть имѣетъ при $x = y$ максимумъ. Слѣд. $x^{2m''+1} + y^{2m''+1}$ имѣемъ минимумъ при $x = y$.

На этомъ основаніи заключаемъ такъ: теорема вѣрна для $m = 2$, слѣд. по доказанн. му. вѣрна и для $m = 3$; будучи вѣрна для $m = 2$ и $m = 3$, вѣрна и для $m = 4$ и т. д. слѣд. она вѣрна для всякаго m .

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

АНАЛИЗЪ СОЕДИНЕНІЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНІЯ.

ГЛАВА XLIII.

Размѣщенія, перестановки и сочетанія безъ повтореній и съ повтореніями.

696. Опредѣленія.—Если изъ m данныхъ предметовъ, напр., изъ m буквъ a, b, c, d, \dots, i, l взять k буквъ, гдѣ $k \leq m$, и написать ихъ другъ за другомъ въ какомъ-нибудь порядкѣ, то получится соединеніе, называемое *размѣщеніемъ изъ m буквъ по k* , или *размѣщеніемъ изъ m буквъ k -го порядка*. Такимъ образомъ одно размѣщеніе отличается отъ другого или самими буквами, или только порядкомъ ихъ. Изъ данныхъ m буквъ можно составить нѣсколько размѣщеній k -го порядка: число ихъ обозначаютъ символомъ A_m^k , гдѣ нижній указатель m означаетъ число всѣхъ предметовъ (элементовъ), верхній k —число элементовъ, входящихъ въ каждое размѣщеніе.

Если въ составъ каждаго соединенія мы возьмемъ всѣ данныя буквы, то одно соединеніе будетъ отличаться отъ другого уже не буквами, а только порядкомъ, въ которомъ онъ написанъ. Такия соединенія называются *перестановками*. Число перестановокъ изъ m элементовъ обозначаютъ символомъ P_m . Изъ опредѣленія слѣдуетъ, что $P_m = A_m^m$.

Если, взявъ m различныхъ буквъ, мы составимъ изъ нихъ соединенія по k буквъ въ каждомъ, такъ, чтобы одно соединеніе отличалось отъ другого по крайней мѣрѣ одною буквою, то получимъ такъ-называемыя *сочетанія изъ m буквъ k -го порядка*. Число ихъ обозначаютъ символомъ C_m^k .

Займемся указаніемъ способа составленія и опредѣленія числа соединеній каждаго рода.

Размѣщенія (arrangements).

697. Способъ составленія и опредѣленіе числа размѣщеній.—Пусть будутъ a, b, c, d, \dots, i, l данныя m элементовъ. Число размѣщеній изъ этихъ m буквъ, по одному элементу въ каждомъ, очевидно, равно числу элементовъ. Слѣд. $A_m^1 = m$.

Составим размѣщенія второго порядка, т.-е. содержащія по два элемента: для этого нужно взять поочередно каждую изъ m буквъ и приписать къ ней справа каждую изъ остальныхъ $m - 1$ буквъ; такимъ образомъ получимъ таблицу:

ab	ba	ca	ia	la
ac	bc	cb	ib	lb
ad	bd	cd	ic	lc
.
.
ai	bi	ci	.	li
al	bl	cl	.	li

Чтобы доказать, что такимъ образомъ получаются все размѣщенія 2-го порядка, надо доказать, что ни одно размѣщеніе не было опущено, ни одно не повторено два раза. И въ самомъ дѣлѣ: 1) возьмемъ какое-нибудь размѣщеніе, напр., cd ; для составленія вертикальныхъ колоннъ мы ставили по-очередно каждую букву на первомъ мѣстѣ; слѣд., въ частности, была взята и буква c ; справа отъ этой буквы ставили каждую изъ остальныхъ буквъ, слѣд., въ частности, и букву d ; что и дало размѣщеніе cd . Слѣд. ни одно размѣщеніе не было пропущено. 2) Сравнимъ два какихъ-нибудь размѣщенія таблицы: они будутъ находиться или въ одной и той же вертикальной колоннѣ, и въ такомъ случаѣ будутъ различаться послѣдними буквами, или же будутъ содержаться въ двухъ различныхъ вертикальныхъ колоннахъ, — и въ такомъ случаѣ будутъ различаться первыми буквами. Убѣждаемся, что все размѣщенія различны, т.-е. что таблица не содержитъ повтореній. Итакъ, послѣдняя содержитъ все размѣщенія 2-го порядка.

Опредѣлимъ ихъ число. Очевидно, всего вертикальныхъ колоннъ столько, сколько всего размѣщеній 1-го порядка, т.-е. сколько всего буквъ, слѣд. m ; въ каждой колоннѣ $m - 1$ размѣщеній; слѣд. всего двойныхъ размѣщеній $m(m - 1)$. Итакъ, $A_m^2 = m(m - 1)$.

Составимъ тройныя размѣщенія изъ m буквъ. Для этого нужно взять поочередно каждое двойное размѣщеніе и приписать къ нему послѣдовательно каждую изъ $m - 2$ остальныхъ буквъ; такимъ образомъ составимъ таблицу:

abc	acb	.	.	bca	.	.	lia
abd	acd	.	.	bcd	.	.	lib
abe	ace	.	.	bce	.	.	lic
.
.
abi	aci	.	.	bci	.	.	.
abl	acl	.	.	bcl	.	.	lih

Докажемъ, что ни одно тройное размѣщеніе не было пропущено и ни одно не повторено лишній разъ. И въ самомъ дѣлѣ: 1) возьмемъ какое-нибудь размѣщеніе lif . Для составленія вертикальныхъ колоннъ мы брали поочередно каждое двойное размѣщеніе: сл. между прочимъ было взято и li . Къ нему приписывали послѣдовательно каждую изъ остальныхъ буквъ, сл. въ частности была принята и буква f , что и даетъ lif . Слѣд. таблица не содержитъ пропусковъ. 2) Сравнимъ два какихъ-нибудь размѣщенія таблицы. Или они находятся въ одной вертикальной колоннѣ, и тогда различаются послѣдними буквами; или — въ двухъ различныхъ колоннахъ, и въ такомъ случаѣ различаются, по крайней мѣрѣ, порядкомъ двухъ первыхъ буквъ, какъ aci и cae . Заключаемъ, что все размѣщенія таблицы различны. Итакъ, она содержитъ все размѣщенія 3-го порядка.

Опредѣлимъ ихъ число. Всего вертикальныхъ колоннъ столько, сколько двойныхъ размѣщеній изъ m буквъ, т.-е. A_m^2 или $m(m - 1)$; въ каждой колоннѣ содержится $m - 2$ размѣщенія; слѣд. всего тройныхъ размѣщеній $m(m - 1)(m - 2)$. Итакъ, $A_m^3 = m(m - 1)(m - 2)$.

Разсматривая формулы A_m^1 , A_m^2 , A_m^3 , замѣчаемъ, что все онѣ составлены по одному и тому же закону: каждая представляетъ произведеніе чиселъ, послѣдовательно уменьшающихся на 1, начиная съ m и кончая множителемъ,

равнымъ числу элементовъ, минусъ порядокъ размѣщений, плюсъ 1: число же множителей равно порядку размѣщений. Докажемъ общность этого закона, и для этого выведемъ формулу, выражающую зависимость между числами размѣщений двухъ смежныхъ порядковъ, напр., связь между A_m^{k-1} и A_m^k . Вообразимъ, что мы составили всѣ размѣщения $k-1$ -го порядка, число которыхъ выражается символомъ A_m^{k-1} , и хотимъ составить размѣщения k -го порядка. Для этого беремъ поочередно каждое размѣщение $k-1$ -го порядка и приписываемъ къ нему поочередно каждую изъ остальныхъ буквъ, число которыхъ $= m - (k - 1)$, или $m - k + 1$. Такимъ образомъ составимъ столько вертикальныхъ колоннъ, сколько размѣщений $k-1$ -го порядка, а въ каждой колоннѣ $m - k + 1$ размѣщений. Докажемъ, что ни одно размѣщение k -го порядка не повторено два раза и что ни одно не пропущено. Въ самомъ дѣлѣ: 1) сравнивая два какихъ-нибудь размѣщения, найдемъ, что они или находятся въ одной и той же вертикальной колоннѣ, и въ такомъ случаѣ различаются послѣдними буквами, или же принадлежатъ двумъ различнымъ колоннамъ, и въ такомъ случаѣ различаются по крайней мѣрѣ, порядкомъ $k-1$ первыхъ буквъ, какъ $abc...ih$ и $ci...bah$. 2) Ни одно размѣщение k -го порядка не будетъ пропущено: въ самомъ дѣлѣ, пусть взято размѣщение k -го порядка $abc...ih$. Для составленія этихъ размѣщений мы брали поочередно каждое размѣщение $k-1$ -го порядка, слѣд. въ частности было взято и размѣщение $abc...i$; къ нему приписывали послѣдовательно каждую изъ остальныхъ буквъ, слѣд. приписали, между прочимъ, и букву h , что и дало $abc...ih$. Итакъ, указаннымъ способомъ составлены всѣ размѣщения k -го пор. изъ m буквъ.

Для опредѣленія ихъ числа, очевидно, нужно помножить число колоннъ, т.-е. число размѣщений $k-1$ -го пор. или A_m^{k-1} на число размѣщений въ каждой колоннѣ, т.-е. на $m - k + 1$. Имѣемъ:

$$A_m^k = A_m^{k-1} \cdot (m - k + 1).$$

Это и есть формула, связывающая числа A_m^k и A_m^{k-1} . Такъ какъ формула эта общая, то можемъ давать въ ней k всѣ цѣлыя значенія отъ 2 до k . Получимъ:

$$\begin{aligned} A_m^2 &= A_m^1 (m - 1) \\ A_m^3 &= A_m^2 (m - 2) \\ A_m^4 &= A_m^3 (m - 3) \\ &\dots \dots \dots \\ A_m^k &= A_m^{k-1} (m - k + 1). \end{aligned}$$

Перемноживъ почленно эти равенства, сокративъ въ обоихъ частяхъ общаго множителя $A_m^1, A_m^2, \dots, A_m^{k-1}$ и замѣнивъ A_m^1 его значеніемъ m , найдемъ:

$$A_m^k = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-k+1) \dots (I)$$

Отсюда

ТЕОРЕМА Число размѣщений изъ m буквъ по k равно произведенію k цѣлыхъ чиселъ, уменьшающихся послѣдовательно на 1, изъ которыхъ первое равно m .

698 Примеръ I. Сколько можно составить трехзначныхъ чиселъ изъ нечетныхъ цифръ 1, 3, 5, 7, 9?

Искомое число, очевидно, есть число размѣщений изъ 5 элементовъ по 3: слѣд. оно равно $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Примеръ II. Сколько можно бы было составить словъ изъ 20 согласныхъ и 6 гласныхъ, если каждое слово должно заключать 3 согласныхъ и 2 гласныхъ, причемъ послѣднія могутъ занимать только второе и четвертое мѣста?

20 согласныхъ дадутъ размѣщений по 3 буквы въ каждомъ: A_{20}^3 ; въ каждомъ изъ этихъ размѣщений 6 гласныхъ, помещаемыхъ по-парно на второе и четвертое мѣстѣ, могутъ быть размѣщены A_6^2 способами; слѣд. число искомымъ словъ $= A_{20}^3 \times A_6^2 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \times 6 \cdot 5 = 205200$.

Перестановки (permutations).

699. Способъ составленія и опредѣленіе числа перестановокъ.—Перестановки различаются отъ размѣщений только тѣмъ, что берутся всѣ буквы. Изъ этого прямо слѣдуетъ, что для составленія перестановокъ изъ m буквъ надо изъ этихъ буквъ составить всѣ размѣщенія по 2, изъ нихъ размѣщенія по 3 и т. д., пока не дойдемъ до размѣщений по m . Отсюда также слѣдуетъ, что для опредѣленія числа перестановокъ изъ m буквъ нужно только въ формулѣ $A_m^k = m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)(m-k+2) \dots (m-1)m$ положить $k = m$. Такимъ образомъ найдемъ

$$P_m = A_m^m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-2)(m-1)m.$$

Отсюда

ТЕОРЕМА. Число перестановокъ изъ m элементовъ равно произведенію натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m .

Можно доказать эту теорему независимо отъ формулы числа размѣщений. Въ самомъ дѣлѣ, пусть составлены перестановки изъ $m-1$ буквъ $a, b, c, d, \dots, h, i, k$, и пусть число перестановокъ будетъ P_{m-1} . Чтобы составить перестановки изъ m буквъ, беремъ каждую перестановку изъ $m-1$ буквъ и вводимъ въ нее m -ую букву l , помѣщая последовательно слѣва и справа этой перестановки и во всѣ промежутки между ея буквами. Такимъ образомъ мы составимъ всѣ перестановки изъ m буквъ, безъ повтореній и безъ пропусковъ. Безъ повтореній—потому, что одна перестановка будетъ отличаться отъ другой или перемѣною $m-1$ первоначальныхъ вѣтвѣхъ буквъ, или мѣстомъ, которое занимаетъ новая буква l . Безъ пропусковъ, ибо, въ въ перестановку $abc \dots k$, напр., замѣчаемъ, что она произошла изъ перестановки $abc \dots k$, составленной изъ $m-1$ первоначальныхъ элементовъ, въ которую буква l введена на 3-мъ мѣстѣ; слѣд. такая перестановка была получена.

Итакъ: указаннымъ способомъ получимъ всѣ перестановки изъ m буквъ. Опредѣлимъ ихъ число. Каждая перестановка изъ $m-1$ буквъ даетъ m перестановокъ изъ m буквъ, ибо буква l можетъ занять въ первой m различныхъ мѣстъ; слѣд.

$$P_m = mP_{m-1}:$$

тѣхъ, которыя содержатъ последнюю букву (*al, bl, . . . , il*), и приписываемъ последовательно каждую слѣдующую букву; получимъ

$$\begin{array}{l} abc, abd, abe, . . . , abh, abi, abl \\ acd, ace, . . . , ach, aci, acl \\ \\ \end{array} \quad \text{и т. д.}$$

Этимъ мы изъ размѣщеній выбрасываемъ такія, которыя отъ имѣющихся уже отличаются только мѣстами буквъ, и сл. получаемъ сочетанія. Но изъ способа составленія сочетаній трудно опредѣлить ихъ число; легче это сдѣлать при помощи слѣдующей теоремы.

Теорема. Число размѣщеній изъ *m* буквъ по *k* равно числу сочетаній изъ *m* буквъ по *k*, помноженному на число перестановокъ изъ *k* буквъ, т-е. $A_m^k = C_m^k \cdot P_k$.

Вообразимъ, что мы составили таблицу сочетаній изъ *m* буквъ *k*-го порядка; число ихъ выражается символомъ C_m^k . Взявъ каждое изъ этихъ сочетаній (содержащихъ *k* буквъ), сдѣлаемъ въ немъ всевозможныя перестановки, число которыхъ (изъ одного сочетанія выйдетъ P_k). Докажемъ, что такимъ образомъ мы составимъ всѣ размѣщенія изъ *m* по *k*, безъ пропусковъ и безъ повтореній. Въ самомъ дѣлѣ, если взять изъ составленной таблицы два члена, то: или они происходятъ отъ двухъ различныхъ сочетаній, и въ такомъ случаѣ различаются буквами; или же происходятъ изъ одного и того же сочетанія, — и въ такомъ случаѣ различаются порядкомъ буквъ. Слѣд. таблица не содержитъ повтореній. Въ ней нѣтъ и пропусковъ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ нѣкоторый членъ *z* группы A_m^k , не обращая вниманія на порядокъ буквъ въ немъ; этотъ членъ представляетъ нѣкоторое сочетаніе изъ *m* буквъ по *k*, и слѣд., если не обращать вниманія на порядокъ его буквъ, онъ находится въ группѣ C_m^k ; такъ какъ буквы этого сочетанія были перемѣнены всеми возможными способами, то *z* необходимо содержится въ числѣ полученныхъ размѣщеній. Зная это, замѣтимъ, что одно сочетаніе порядка *k* даетъ P_k перестановокъ, слѣд.

$$A_m^k = C_m^k \cdot P_k,$$

откуда

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \quad \text{III}$$

Итакъ, имѣемъ теорему: число сочетаній изъ *m* буквъ по *k* равно произведенію *k* цѣлыхъ чиселъ, послѣдовательно убывающихъ на 1, первое изъ которыхъ *m*, деленному на произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до *k*.

Можно доказать эту теорему независимо отъ формулъ числа размѣщеній и числа перестановокъ.

Пусть дано *m* буквъ *a, b, c, d, . . .* Обозначимъ число сочетаній порядка *k* символомъ C_m^k и, выразивъ двумя способами число буквъ, содержащихся во всей совокупности этихъ сочетаній, приравняемъ другъ другу результаты счета. Каждое сочетаніе содержитъ *k* буквъ, а всѣхъ сочетаній C_m^k ; сл. всѣхъ буквъ въ нихъ будетъ $k \times C_m^k \dots (1)$.

Выразимъ это число иначе. Если отбросить букву a , то изъ остальныхъ буквъ можно составить C_{m-1}^{k-1} сочетаний $k-1$ -го порядка. Если къ какому-нибудь изъ нихъ присоединить букву a , то составятся сочетания k -го порядка съ буквою a , и такихъ будетъ, следовательно, C_{m-1}^{k-1} . Итакъ, во всей совокупности сочетаний k -го порядка число такихъ, въ которыхъ входитъ буква a , будетъ C_{m-1}^{k-1} . Подобнымъ же образомъ число сочетаний, въ которыхъ входитъ буква b , будетъ C_{m-1}^{k-1} , и т. д. для каждой изъ m буквъ. Следовательно, число всѣхъ буквъ во всѣхъ сочетанияхъ k -го порядка, будетъ $m \times C_{m-1}^{k-1}$. (2).

Приравнявая числа (1) и (2), имѣемъ

$$k \cdot C_m^k = m \cdot C_{m-1}^{k-1}, \text{ откуда } C_m^k = \frac{m}{k} C_{m-1}^{k-1},$$

т. е. эта формула обща, то можно написать

$$C_{m-a}^{k-a} = \frac{m-a}{k-a} C_{m-a-1}^{k-a-1}.$$

Подставляя въ это 2 числа 0, 1, 2, . . . , $k-2$, получимъ

$$C_m^k = \frac{m}{k} C_{m-1}^{k-1}$$

$$C_{m-1}^{k-1} = \frac{m-1}{k-1} C_{m-2}^{k-2}$$

$$C_{m-2}^{k-2} = \frac{m-2}{k-2} C_{m-3}^{k-3}$$

$$C_{m-k+2}^2 = \frac{m-k+2}{2} C_{m-k+1}^1.$$

Перемножая эти тождества и сокращая въ обѣихъ частяхъ общіе множители, найдемъ

$$C_m^k = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+2)}{k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 2} C_{m-k+1}^1,$$

а какъ $C_{m-k+1}^1 = m-k+1$, такъ какъ оно означаетъ число сочетаний изъ $m-k+1$ буквъ по одной въ каждомъ и, слѣд., равно числу этихъ буквъ, то легко видѣть, что

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

702. Примеры.—I. Въ общество изъ 12 лицъ выбираютъ комиссію изъ 5 членовъ, для разработки нѣкотораго вопроса; сколькими способами эта комиссія можетъ быть составлена?

Такъ какъ одинъ составъ комиссіи долженъ отличаться отъ другого и не содержать всѣхъ тѣхъ же лицъ, то, очевидно, некоторое число есть число сочетаний изъ 12 элементовъ по 5; слѣд. оно $= C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$.

II. Сколько различныхъ діагоналей можно провести въ десятиугольникъ?

Искомое число есть число сочетаний из 10 элементов по 2, уменьшенное 10-ью (10 стор. мног.), и сл. $= C_{10}^2 - 10 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} - 10 = 35$.

703. Число C_m^k есть необходимо число дѣлое; поэтому изъ формулы (III) прямо получается

ТЕОРЕМА. Произведение k последовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на произведение первыхъ k цѣлыхъ чиселъ.

704. Формула (III) можетъ быть представлена въ другомъ видѣ. Помноживъ ея числителя и знаменателя на $(m-k)(m-k-1)(m-k-2)\dots 3.2.1$ или, что то же, на $1.2.3\dots(m-k)$, найдемъ

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)(m-k)(m-k-1)\dots 3.2.1}{1.2.3\dots k \times 1.2.3\dots(m-k)}$$

Прочитавъ числителя въ обратномъ порядкѣ, находимъ, что онъ представляетъ произведение натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m ; слѣд. можно написать:

$$C_m^k = \frac{1.2.3\dots m}{1.2.3\dots k \times 1.2.3\dots(m-k)}, \text{ или еще } C_m^k = \frac{P_m}{P_k \times P_{m-k}} \dots (IV).$$

Замѣчая, что C_m^k есть число дѣлое, изъ послѣднихъ формулъ прямо находимъ слѣдующую теорему.

ТЕОРЕМА. Произведение ряда натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m всегда дѣлится на произведение $1.2.3\dots k$, на произведение $1.2.3\dots(m-k)$ и на произведение этихъ двухъ произведений, полагая $k < m$.

705. Свойства сочетаній.—I. Число сочетаній изъ m буквъ по k равно числу сочетаній изъ m буквъ по $m-k$, т.-е. $C_m^k = C_m^{m-k}$.

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ IV имѣемъ:

$$C_m^k = \frac{P_m}{P_k \cdot P_{m-k}} \quad \text{и} \quad C_m^{m-k} = \frac{P_m}{P_{m-k} \cdot P_{m-(m-k)}} = \frac{P_m}{P_{m-k} \cdot P_k},$$

откуда прямо слѣдуетъ равенство $C_m^k = C_m^{m-k}$.

Можно доказать эту теорему еще такъ. Пусть въ урну положено m буквъ. Вынемъ изъ урны какія-нибудь k буквъ. Эти k буквъ образуютъ одно, и только одно, сочетаніе изъ m буквъ по k . Оставшіяся въ урнѣ $m-k$ буквъ образуютъ своей совокупностью одно, и только одно, сочетаніе изъ этихъ m буквъ по $m-k$. Такимъ образомъ всякому члену группы C_m^k соответствуютъ одинъ, и только одинъ, членъ группы C_m^{m-k} , и обратно: слѣд. число членовъ обѣихъ группъ одинаково.

II. Число сочетаній изъ m буквъ по k равно числу сочетаній изъ $m-1$ буквъ по k , сложенному съ числомъ сочетаній изъ $m-1$ буквъ по $k-1$; т.-е. $C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ IV можемъ написать:

$$C_{m-1}^k = \frac{1.2.3\dots(m-1)}{1.2\dots k \cdot 1.2\dots(m-k-1)} \quad \text{и} \quad C_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2.3\dots(m-1)}{1.2\dots(k-1) \cdot 1.2\dots(m-k)}.$$

Складывая, находимъ:

$$C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2.3 \dots (m-1)}{1.2 \dots (k-1).1.2 \dots (m-k-1)} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m-k} \right);$$

но

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m-k} = \frac{m}{k \cdot (m-k)},$$

след.

$$C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2.3 \dots (m-1).m}{1.2 \dots (k-1).k \cdot 1.2 \dots (m-k-1)(m-k)} = C_m^k.$$

Теорема эта можетъ быть доказана иначе. Члены группы C_m^k могутъ быть разбиты на двѣ части: пусть первая содержитъ всѣ тѣ сочетанія, въ которыхъ не входитъ буква a : ихъ число будетъ C_{m-1}^k . Другая группа будетъ содержать сочетанія съ буквою a . Вынеся въ нихъ за скобки букву a , получимъ въ скобкахъ, безъ пропусковъ и безъ повтореній, всѣ члены группы C_{m-1}^{k-1} , составленные изъ буквъ b, c, d, \dots, h, i, l . Итакъ, действительно, число C_m^k есть сумма чиселъ C_{m-1}^k и C_{m-1}^{k-1} .

706. Задача 1. Въ числѣ сочетаній изъ 12 буквъ a, b, c, d, \dots по 5 сколько такихъ сочетаній, каждое изъ которыхъ содержало бы 3 определенныхъ буквъ, напр. a, b, c ?

Для рѣшенія вопроса напишемъ подрядъ буквы a, b, c ; къ этимъ буквамъ нужно послѣдовательно приписывать парныя сочетанія изъ остальныхъ 9 буквъ. Искомое число и будетъ число парныхъ сочетаній изъ 9 буквъ, т.-е. $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}$ или 36.

Задача II. Въ числѣ сочетаній изъ m буквъ a, b, c, \dots по k , сколько такихъ, которыя не содержатъ ни одной изъ p определенныхъ буквъ a, b, c, \dots ?

Отдѣливъ эти p буквъ, которыя не должны входить въ составъ требуемыхъ сочетаній, изъ остальныхъ $m - p$ буквъ составимъ сочетанія k -го порядка: ихъ число и будетъ искомое, т.-е.

$$\frac{(m-p)(m-p-1) \dots (m-p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

Задача III. Въ числѣ сочетаній изъ m буквъ a, b, c, \dots по k , сколько такихъ, которыя содержатъ, по крайней мѣрѣ, одну изъ определенныхъ p буквъ a, b, c, \dots ?

Очевидно, искомое число есть разность между полнымъ числомъ сочетаній изъ m буквъ по k и числомъ сочетаній, не содержащихъ ни одной изъ p определенныхъ буквъ, т.-е.

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} - \frac{(m-p)(m-p-1) \dots (m-p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

Соединенія съ повтореніями.

707. Размѣщенія съ повтореніями — Размѣщенія называютъ *полными* или съ *повтореніями*, когда буквы въ размѣщеніяхъ могутъ повторяться нѣсколько разъ.

Пусть дано m букв: $a, b, c, d, \dots, h, i, j$. Чтобы составить из них двойные размещения съ повторениями, нужно къ каждой из букв приписать последовательно каждую из данных букв без исключения; такимъ образомъ получимъ двойные размещенія:

съ буквою a въ началѣ: $aa, ab, ac, \dots, ah, ai, aj$;
съ буквою b въ началѣ: $ba, bb, bc, \dots, bh, bi, bj$;
съ буквою c въ началѣ: $ca, cb, cc, \dots, ch, ci, cj$; и т. д.

Способомъ, которымъ пользовались выше, докажемъ и здѣсь, что полученные размещенія все различны и не содержатъ повторковъ. Легко найти число ихъ. Съ каждою буквою въ началѣ имѣемъ m размещений, и какъ каждая изъ m буквъ поочередно ставится въ началѣ, то всѣхъ размещений будетъ $m \cdot m$ или m^2 .

Для составления тройныхъ размещений беремъ одно двойное, напр., aa и приписываемъ къ нему каждую изъ данныхъ элементовъ *безъ исключения*, двойное размещеніе aa дастъ тройныя:

$aaa, aab, aac, \dots, aah, aai, aaj$;

двойное размещеніе ab дастъ тройныя:

$aba, abb, abc, \dots, abh, abi, abj$; и т. д.

Извѣстнымъ образомъ докажемъ, что, поступая такъ, ни одного тройнаго разм. мы не пропустили, т. е. что не получимъ лишнихъ разм. Число ихъ определять легко. Одно двойное размѣщеніе даетъ m тройныхъ, слѣд. m^2 двойныхъ размѣщений дадутъ $m \times m^2$ тройныхъ.

Вообще, число размѣщений r -го порядка, обо начаемое символомъ m^r , будетъ m^r . Показать это значитъ доказать, что если числ. размѣщений $r-1$ -го пор. есть m^{r-1} , то число размѣщений порядка r есть m^r . Изъ самого слѣд. и сдѣланы мы получаемъ, приписывая къ каждому размѣщенію $r-1$ -го пор. каждую изъ m буквъ; сдѣлавъ обр. одно размѣщеніе $r-1$ -го пор. дасть m размѣщений порядка r , слѣд. m^{r-1} размѣщений $r-1$ -го пор. дадутъ $m \cdot m^{r-1}$ или m^r размѣщений порядка r .

Примѣры.—1. Сколько можно написать трехзначныя числа изъ десяти цифръ 1, 2, . . . , 9?

Очевидно, столько, сколько можно сдѣлать тройныхъ размѣщений съ повтореніями изъ 9 элементовъ, т. е. 9^3 или 729.

II. Сколькими способами могутъ вскрыться 3 игральныхъ кости (костяные кубики съ нумерованными гранями)?

Очевидно, 6^3 или 216 способами.

708. Перестановки съ повтореніями. Изобразимъ m буквъ, въ числѣ которыхъ бывае a повторяется α разъ, b — β разъ, c — γ разъ и т. д., причѣмъ $\alpha + \beta + \gamma + \dots = m$, т. е. что каждая буква повторяется, или что есть и несовпадающія буквы. Группы, получаемыя отъ невозможныхъ перестановокъ въ этихъ m буквъ, называются *перестановками съ повтореніями*; число ихъ будемъ обозначать символомъ: N_m .

Обозначимъ на время число ихъ буквою x и опредѣлимъ его. Въ каждой группѣ поставимъ у α буквъ, равныхъ a , значки 1, 2, 3, . . . , α . Переставимъ эти значки всевозможными способами; такъ какъ изъ α элементовъ можно сдѣлать P_α перестановокъ, то получится новая таблица, въ которой будетъ $\alpha \cdot P_\alpha$ группъ. Эта таблица содержитъ всѣ перестановки изъ m буквъ, въ числѣ которыхъ β буквъ равны b , буквы равны c, \dots, a другія различны. Въ самъ мы дѣлѣ. 1) каждая двѣ группы этой таблицы различны, ибо если они получаются изъ одной и той же группы первоначальной таблицы, то различаются порядкомъ значковъ 1, 2, . . . , α ; а если происходятъ отъ двухъ разныхъ группъ, то отличаются порядкомъ буквъ. 2) Какая угодно перестановка изъ m буквъ, въ которой β буквъ равны b , γ равны c, \dots , остальные же буквы различны, находится въ

этой второй таблицѣ; ибо если въ этой перестановкѣ уничтожить значки 1, 2, . . . , α , то получимъ группу первой таблицы, а, по предположенію, буквы α въ этой группѣ были снабжены индексами 1, 2, . . . , α и послѣдніе переименованы всевозможными способами.

Затѣмъ, въ каждой группѣ 2-ой таблицы поставимъ у буквы β значки 1, 2, 3, . . . , β и перемѣстимъ эти значки всевозможными способами, получимъ 3-я таблица, число членовъ которой равно $\alpha \cdot P_\alpha \cdot P_\beta$. Какъ и выше, докажемъ, что эти члены суть различныя перестановки изъ m буквъ, въ числѣ которыхъ γ буквъ равны σ к т. д.

Продолжая такимъ образомъ, получимъ всѣ перестановки изъ m буквъ числомъ $\alpha \cdot P_\alpha \cdot P_\beta \cdot P_\gamma \dots$. Но когда всѣ равныя буквы замѣняются неравными, то образуются перестановки изъ m буквъ, безъ повтореній; число такихъ перестановокъ равно P_m . Итакъ:

$$\alpha \cdot P_\alpha \cdot P_\beta \cdot P_\gamma \dots = P_m, \text{ откуда } \alpha = \frac{P_m}{P_\sigma \cdot P_\beta \cdot P_\gamma \dots}, \text{ или}$$

$$N_m = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{1 \cdot 2 \dots \alpha \times 1 \cdot 2 \dots \beta \times 1 \cdot 2 \dots \gamma \times \dots}$$

Примѣры: I. Сколько можно составить пятизначныхъ чиселъ цифрами 3 и 5, изъ которыхъ первая повторяется 2 раза, вторая 3 раза?

Искомое число, очевидно, есть $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$, т.-е. 10.

II. Какъ велика сумма цифръ во всѣхъ перестановкахъ изъ цифръ 122334?

Число всѣхъ перестановокъ $= \frac{P_6}{P_2 \cdot P_2} = 180$; въ каждой перестановкѣ сумма цифръ $= 15$, слѣд. во всѣхъ перестановкахъ она $= 15 \times 180 = 2700$.

III. Въ урнѣ 10 шаровъ: 3 бѣлыхъ, 4 красныхъ, 2 черныхъ и 1 синий. Сколько можетъ быть перестановокъ изъ этихъ шаровъ?

Число искомыхъ перестановокъ $= \frac{P_{10}}{P_3 \cdot P_4 \cdot P_2} = 12600$

709. Сочетанія съ повтореніями.—Имѣя m данныхъ буквъ a, b, c, d, \dots , h, i, l , и взявъ букву a , присоединимъ къ ней поочередно всѣ буквы, не исключая и буквы a , затѣмъ къ b присоединимъ послѣдовательно всѣ слѣдующія за ней буквы и самую букву b ; къ c — всѣ за ней слѣдующія и c , и т. д. Получимъ группы, различающіяся по крайней мѣрѣ, однимъ элементомъ и называемыя сочетаніями изъ m буквъ 2-го порядка съ повтореніями.

Затѣмъ, взявъ каждое сочетаніе 2-го порядка, припишемъ къ нему букву, которою оно оканчивается и каждую изъ слѣдующихъ буквъ, составимъ группы, различающіяся по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ и образующія сочетанія изъ m элементовъ 3-го порядка съ повтореніями, и т. д.

Въ простыхъ сочетаніяхъ порядокъ k быть необходимо $\leq m$; въ случаѣ сочетаній съ повтореніями порядокъ ихъ м. б. какой угодно, т.-е. k можетъ быть $\geq m$. Напр., изъ двухъ буквъ a и b сочетанія съ повтореніями могутъ быть и 3-го, и 4-го и т. д. порядковъ; такъ полныя сочетанія 3-го пор. изъ двухъ буквъ a и b будутъ: aaa, aab, abb, bbb .

Чтобы опредѣлить число полныхъ сочетаній изъ m буквъ k -го порядка, считаемъ двумя различными способами, сколько разъ какая-нибудь опредѣленная буква, a напр., встрѣчается во всѣхъ этихъ сочетаніяхъ, и приравняемъ одинъ другому результаты счета. Обозначимъ искомое число (сочетаній знакомъ G_m^k , а

буквою x обозначимъ, сколько разъ въ нихъ встрѣчается буква a . Въ каждомъ сочетаніи находится k буквъ; а число сочетаній $= \Gamma_m^k$, сл. всѣхъ буквъ во всѣхъ сочетаніяхъ будетъ $k \Gamma_m^k$; но это же число буквъ равно mx , слѣд.

$$mx = k \Gamma_m^k, \text{ откуда } x = \frac{k \Gamma_m^k}{m}.$$

Вычеркнемъ букву a по одному разу изъ всѣхъ сочетаній, въ которыхъ она встрѣчается. Урѣзанныя такимъ образомъ сочетанія будутъ составлены изъ данныхъ m буквъ, но въ каждомъ будетъ только по $k-1$ буквъ; способомъ, не разъ уже указаннымъ, докажемъ, что совокупность этихъ урѣзанныхъ сочетаній представляетъ всю полноту сочетаній изъ m буквъ по $k-1$. Ихъ число, согласно принятой ногаціи, будетъ Γ_m^{k-1} .

Они будутъ содержать и букву a ; и чтобы выразить, сколько разъ встрѣчается въ нихъ буква a , нужно только вм. k подставить $k-1$ въ вышенайденную формулу. Найдемъ $\frac{k-1}{m} \Gamma_m^{k-1}$.

Такъ какъ буква a изъ сочетаній съ повтореніями изъ m буквъ по k была вычеркнута Γ_m^{k-1} разъ, то

$$x = \Gamma_m^{k-1} + \frac{k-1}{m} \Gamma_m^{k-1} = \frac{m+k-1}{m} \Gamma_m^{k-1}.$$

Приравнивая одно другому два выраженія для x , имѣемъ

$$\frac{k \Gamma_m^k}{m} = \frac{m+k-1}{m} \Gamma_m^{k-1}, \text{ откуда}$$

$$\Gamma_m^k = \frac{m+k-1}{k} \Gamma_m^{k-1}.$$

Подставляя сюда вмѣсто k поочередно $k, k-1, k-2, \dots, 2$, и замѣчая, что $\Gamma_m^1 = m$, найдемъ

$$\Gamma_m^k = \frac{(m+k-1)(m+k-2) \dots (m+1)m}{1 \cdot 2 \dots k}.$$

Очевидно, что $\Gamma_m^k = C_{m+k-1}^k$, и слѣдовательно, можно высказать теорему:

Число полныхъ сочетаній изъ m элементовъ k -го порядка равно числу сочетаній безъ повтореній изъ $m+k-1$ элементовъ по k .

Можно еще замѣтить, что, какъ по свойству обыкновенныхъ сочетаній, $C_{m+k-1}^k = C_{m+k-1}^{m-1}$, то

$$\Gamma_m^k = C_{m+k-1}^{m-1}.$$

Первая формула удобнѣе для случаевъ, когда $k < m-1$, вторая—въ противныхъ случаяхъ.

Нижеслѣдующее, иное, доказательство дано профессоромъ *Валецкимъ*.

Найти число сочетаній съ повтореніями изъ m буквъ a, b, c, \dots, l порядка k . Всякое такое сочетаніе м. б. изображено одночленомъ $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots l^{\lambda}$, гдѣ $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ суть m цѣлыхъ, положительныхъ или равныхъ нулю, чиселъ, которыхъ сумма $= k$. Всѣхъ сочетаній будетъ столько, сколькоими способами можно распределить k единицъ между m числами, нулевыми или положительными. Чтобы представить одно изъ такихъ распределеній, расположимъ въ рядъ $m-1$ какихъ-либо знаковъ, напр. 0; затѣмъ напишемъ единицы числа a передъ первымъ 0, единицы b въ первомъ промежуткѣ и т. д., наконецъ, единицы числа l за послѣднимъ 0; не ставя ничего, если показатель есть нуль. Такимъ образомъ получатся группы въ рядѣ: 0.110. . . 01, состоящая изъ k единицъ и $m-1$

раздѣлительныхъ знаковъ. Сочетаній столько, сколько группъ этого рода, а число этихъ группъ есть число перестановокъ изъ $m+k-1$ буквъ, въ числѣ которыхъ находится k единицъ и $m-1$ значковъ 0. Такимъ образомъ, обозначая полное число сочетаній знакомъ Γ_m^k , получимъ:

$$\Gamma_m^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \dots (1)$$

Эту формулу можно представить въ другомъ видѣ, сокративъ на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1)$; найдемъ

$$\Gamma_m^k = \frac{m(m+1)(m+2) \cdot \dots \cdot (m+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \dots (2).$$

Напр., число тройныхъ сочетаній съ повтореніями изъ 4 элементовъ будетъ $\Gamma_4^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

710. Иногда можно упрощать опредѣленіе числа сочетаній съ повтореніями при помощи соотношеній.

$$\Gamma_m^k = \Gamma_{k-1}^{m-1} \dots (3).$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи формулы (1) имѣемъ

$$\Gamma_m^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \text{ и } \Gamma_{k-1}^{m-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

а эти дроби равны.

$$\text{Напр., } \Gamma_8^{10} = \Gamma_{11}^2 = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 66.$$

711. Примѣръ. На сколько способовъ могутъ вскрыться 2, 3, . . . игральныхъ костей?

Двѣ кости могутъ вскрыться на столько способовъ, сколько существуетъ парныхъ сочетаній съ повтореніями изъ 6 элементовъ, т. е. на $\Gamma_6^2 = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$ способъ.

Три кости могутъ вскрыться на $\Gamma_6^3 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ способовъ и т. д.

ГЛАВА XLIV.

Биномъ Ньютона.

Выводъ формулы бинома Ньютона для цѣлаго положительнаго показателя.—Свойства этой формулы.—Степень полинома.—Арифметическій треугольникъ Паскаля.

712. Произведеніе биномовъ $(x+a)(x+b) \cdot \dots \cdot (x+h)(x+i)$. Прямымъ умноженіемъ находимъ:

$$1. (x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab;$$

$$2. (x + a)(x + b)(x + c) = \begin{array}{l|l} x^3 - a & x^2 + ab \\ + b & + ac \\ + c & + bc \end{array} x + abc;$$

$$3. (x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = \begin{array}{l|l|l} x^4 + a & x^3 + ab & x^2 + abc \\ + b & + ac & + abd \\ + c & + ad & + acd \\ + d & + bc & + bcd \\ & + bd & \\ & + cd & \end{array}$$

и т. д.

Внимательное рассмотрение этих произведений обнаруживает следующие законы их состава:

1) Число членовъ каждого произведенія единицею больше числа перемножаемыхъ биномовъ.

2) Каждое произведеніе расположено по убывающимъ степенямъ общей буквы x биномовъ, причемъ: показатель буквы x въ первомъ членѣ равенъ числу перемножаемыхъ биномовъ; затѣмъ показатели x идутъ постепенно уменьшаясь на 1, до послѣдняго члена, который не содержитъ буквы x , или, что тоже, содержитъ x въ нулевой степени.

3) Коэффициентъ перваго члена равенъ 1; коэф. 2-го члена равенъ суммѣ вторыхъ членовъ биномовъ, или, что тоже, суммѣ сочетаній перваго порядка изъ вторыхъ членовъ; коэф. третьяго члена равенъ суммѣ двойныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ; коэф. четвертаго члена — суммѣ тройныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ, и т. д. Наконецъ, послѣдній членъ равенъ произведенію вторыхъ членовъ всѣхъ биномовъ.

Докажемъ общность этого закона. Для этого, допустивъ, что законъ вѣренъ для $m - 1$ бинома, докажемъ, что онъ останется вѣрнымъ и для произведенія, содержащаго одинъ биномъ больше, т.-е. для m биномовъ.

Итакъ, пусть будутъ $x + a$, $x + b$, $x + c$, . . . , $x + h$, $x + i$, тѣ $m - 1$ биномовъ, для которыхъ, по допущенію, вышеуказанный законъ вѣренъ. Обозначимъ символами: S_1 — сумму вторыхъ членовъ этихъ биномовъ, S_2 — сумму двойныхъ сочетаній изъ нихъ, S_3 — сумму тройныхъ сочетаній, вообще, S_k — сумму сочетаній k -го порядка, и S_{m-1} — произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ. По допущенію, произведеніе этихъ $m - 1$ биномовъ дастъ:

$$(x + a)(x + b)(x + c) \dots (x + h)(x + i) = x^{m-1} + S_1 x^{m-2} + S_2 x^{m-3} + S_3 x^{m-4} + \dots + S_{k-1} x^{m-k} + S_k x^{m-k-1} + \dots + S_{m-1}.$$

Введя m -го множителя $x + l$, найдемъ отсюда:

$$\begin{aligned} (x + a)(x + b) \dots (x + i)(x + l) &= x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \\ &+ S_3 x^{m-3} + \dots + S_k x^{m-k} + \dots + S_{m-1} l. \end{aligned}$$

1. Видя, что показатель буквы x въ первомъ числѣ равенъ числу m перемножаемыхъ биномовъ, что въ слѣдующихъ членахъ показатели буквы x

$S_1 = a^1 + a^1 + a^1 + \dots + a^1$; причемъ слагаемыхъ здѣсь столько, сколько двойныхъ сочетаній изъ m элементовъ, т.-е. $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$; слѣдовательно,
 $S_1 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^1$.

$S_2 = a^2 + a^2 + \dots + a^2$; причемъ a^2 повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько есть тройныхъ сочетаній изъ m элементовъ, т.-е. $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; такъ что $S_2 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^2$.

Вообще, $S_k = a^k + a^k + \dots + a^k$; причемъ слагаемымъ a^k берется столько разъ, сколько есть сочетаній k -го порядка изъ m элементовъ, т.-е. $\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$; и слѣд., $S_k = \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \cdot a^k$.

Наконецъ, $S_m = a \cdot a \cdot a \dots a$, гдѣ a повторяется множителемъ m разъ; слѣд., $S_m = a^m$.

Такимъ образомъ, тождество (1) беретъ видъ:

$$(x+a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \dots \\ \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} a^k x^{m-k} + \dots + a^m.$$

Это и есть знаменитая *Ньютонова формула бинома*; пока она доказана нами для случая возвышенія бинома въ какую угодно степень *цѣлаго положительнаго* порядка. Вторая часть ея называется *разложениемъ* первой.

714. Эйлерово доказательство формулы бинома.—Приводимъ доказательство формулы разложения $(a+b)^m$, независимое отъ теоріи соединеній. Оно дано великимъ аналитикомъ XVIII вѣка Эйлеромъ. Забѣлимъ, что если въ биномѣ $a+b$ вынести за скобки a , то найдемъ

$$(a+b)^m = \left[a \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right]^m = a^m \left(1 + \frac{b}{a} \right)^m = a^m (1+x)^m,$$

положивъ $\frac{b}{a} = x$. Вопросъ приводится такимъ образомъ къ разложенію $(1+x)^m$.

Въ своемъ доказательствѣ Эйлеръ беретъ исходнымъ пунктомъ слѣдующее тождество. Взявъ произведеніе n биномовъ

$$f(x) = (1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x) \dots (1+a^nx) \dots (1),$$

подставимъ ax вмѣсто x ; найдемъ

$$f(ax) = (1+a^2x)(1+a^3x)(1+a^4x) \dots (1+a^nx) \cdot (1+a^{n+1}x);$$

а помноживъ обѣ части на $1+ax$, имѣемъ

$$(1+ax)f(ax) = (1+ax)(1+a^2x) \dots (1+a^nx) \cdot (1+a^{n+1}x),$$

Положимъ теперь $a = 1$; A_p будетъ представлять въ этомъ случаѣ произведение p дробей, изъ коихъ каждая обращается въ $\frac{0}{0}$. Но, сокращая каждую на $a - 1$ и полагая затѣмъ $a = 1$, найдемъ ихъ истинныя значенія, а именно

$$\begin{aligned} \frac{a^n - 1}{a - 1} \Big|_{a=1} &= (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) \Big|_{a=1} = \frac{n}{1}; \\ \frac{a^{n-1} - 1}{a^2 - 1} \Big|_{a=1} &= \left(\frac{a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + 1}{a + 1} \right) \Big|_{a=1} = \frac{n-1}{2}; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{a^{n-p+1} - 1}{a^p - 1} \Big|_{a=1} &= \left(\frac{a^{n-p} + a^{n-p-1} + \dots + 1}{a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + 1} \right) \Big|_{a=1} = \frac{n-p+1}{p}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно

$$A_p = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}.$$

Полагая здѣсь $p = 1, 2, 3, \dots, n$, найдемъ всѣ коэффициенты $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ разложенія (3), гдѣ первая часть, $f(x)$, есть произведение $(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x) \dots (1+a^nx)$, обращающееся при $a=1$ въ $(1+x)^n$. Такимъ образомъ, равенство (3) даетъ

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p}x^p + \dots + x^n.$$

Если подставить сюда обратно $\frac{b}{a}$ вмѣсто x , то получится выше найденное разложеніе $(a+b)^n$.

715. Свойства формулы бинома. — Формула бинома [беремъ разложеніе $(x+a)^m$] обладаетъ слѣдующими замѣчательными свойствами:

I. Члены ея расположены по убывающимъ степенямъ буквы x и по возрастающимъ буквы a , причемъ показатели буквы x идутъ, послѣдовательно уменьшаясь на 1, начиная отъ m и до нуля (въ послѣднемъ членѣ), а показатели буквы a идутъ, послѣдовательно увеличиваясь на 1, отъ 0 (въ первомъ членѣ) до m ; сумма же показателей при x и a постоянна и равна въ каждомъ членѣ показателю m степени бинома.

II. Число членовъ равно $m+1$, т.-е. единицею больше показателя бинома: это непосредственно видно изъ закона показателей.

III. Коэффициенты бинома суть:

$$1, m, \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots, \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}, \dots, m, 1,$$

т.-е. коэффициентъ перваго члена равенъ 1, а коэффициенты членовъ, начиная со втораго, суть числа сочетаній изъ m элементовъ порядка, равнаго числу предшествующихъ членовъ.

IV. Обыкновенно $(k-1)$ -й членъ, формула котораго есть

$$T_{k-1} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)k} a^k x^{m-k},$$

называется *общим членом* разложения, потому что изъ него можно получить всѣ члены разложения, начиная со 2-го, полагая k равнымъ последовательно 1, 2, 3, 4, . . . , m . Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$k = 1$, находимъ $T_2 = \frac{m}{1} a x^{m-1}$, а это есть второй членъ;

$k = 2$, $T_3 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$, т.-е. третій членъ;

$k = 3$, $T_4 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3}$, т.-е. четвертый членъ;

.

$k = m$, $T_{m+1} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots (m-1) \cdot m} a^m x^0 = a^m$; а это — последний членъ.

Такимъ образомъ для полученія изъ общаго члена — каковаго угодно члена разложения нужно только положить k = числу членовъ, предшествующихъ определяемому.

V. *Коэффициенты членовъ крайнихъ и равно-удаленныхъ отъ крайнихъ равны между собою.* Въ самомъ дѣлѣ, коэф-ты 1-го и послѣдняго члена равны 1. Затѣмъ, возьмемъ члены: $k+1$ -й отъ начала и $k+1$ -й отъ конца. По свойству III, коэффициентъ перваго изъ этихъ членовъ равенъ числу сочетаній k -го порядка изъ m элементовъ, т.-е. C_m^k . Замѣтимъ, что отъ послѣдняго до $k+1$ -го члена отъ конца включительно имѣется $k+1$ членъ, а всѣхъ членовъ $m+1$, заключаемъ что $(k+1)$ -му члену отъ конца предшествуетъ $(m+1) - (k+1)$ или $m-k$ членовъ, а потому его коэф., по пунк. III, равенъ C_m^{m-k} . Но мы знаемъ, что $C_m^k = C_m^{m-k}$ (§ 705, I).

VI. Если показатель m есть число четное и $= 2p$, то число членовъ разложения будетъ нечетное $2p+1$, а потому въ срединѣ разложения будетъ коэффициентъ не повторяющийся, съ обѣихъ сторонъ котораго коэффициенты равны и расположены въ обратномъ порядкѣ. Очевидно, въ этомъ случаѣ придется вычислить $p+1$ коэффициентъ.

Если же показатель m есть число нечетное, напр. $2p+1$, то число членовъ будетъ четное и $= 2p+2$; коэффициенты второй половины будутъ тѣже, что и въ первой, но расположены въ обратномъ порядкѣ, а въ срединѣ разложения находится рядомъ два равныхъ коэффициента. Вычислить придется половину, $(p+1)$, всѣхъ коэффициентовъ.

VII. Вычисленіе членовъ разложения слѣдуетъ вести по слѣдующему правилу. Подставивъ въ формулу $k+1$ -го члена

$$T_{k+1} = \frac{m(m-1) \dots (m-k+2)(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1) \cdot k} a^k x^{m-k} \dots (1)$$

$k-1$ вмѣсто k , на основаніи п. IV, найдемъ k -ый членъ

$$T_k = \frac{m(m-1) \dots (m-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} a^{k-1} x^{m-k+1} \dots (2)$$

Разделивъ (1) на (2), получимъ

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{m-k+1}{k} \times \frac{a}{x}, \text{ откуда } T_{k+1} = T_k \times \frac{m-k+1}{k} \times \frac{a}{x} \dots (3).$$

Итакъ: чтобы изъ k -го члена вывести $(k+1)$ -й членъ, надо коэффициентъ k -го помножить на показателя $m-k+1$ буквы x въ этомъ членѣ и разделить на число k членовъ, предшествующихъ определяемому; затѣмъ, показателя буквы a увеличить на 1, а показателя буквы x уменьшить на 1.

Примѣръ. 1) Разложить $(x+a)^7$.

Число членовъ $= 7+1=8$; поэтому вычисляемъ 4 коэффициента, а для другой половины разложения ставимъ тѣ же коэф-ты въ обратномъ порядкѣ. Найдемъ, применяя правило VII, первые четыре члена: $x^7 + 7ax^6 + \frac{7 \cdot 6}{2} a^2 x^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} a^3 x^4$, или $x^7 + 7ax^6 + 21a^2 x^5 + 35a^3 x^4$. Все разложение будетъ:

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2 x^5 + 35a^3 x^4 + 35a^4 x^3 + 21a^5 x^2 + 7a^6 x + a^7.$$

2) Разложить $(x+a)^8$.

Всѣхъ членовъ 9; вычисляемъ 5 первыхъ: $x^8 + 8ax^7 + \frac{8 \cdot 7}{2} a^2 x^6 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} a^3 x^5 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^4$, или $x^8 + 8ax^7 + 28a^2 x^6 + 56a^3 x^5 + 70a^4 x^4$. Все разложение будетъ

$$(x+a)^8 = x^8 + 8ax^7 + 28a^2 x^6 + 56a^3 x^5 + 70a^4 x^4 + 56a^5 x^3 + 28a^6 x^2 + 8a^7 x + a^8.$$

VIII.—Коэффициенты идутъ увеличиваясь до середины разложения, а затѣмъ уменьшаются.

Соотношеніе (3) пунк. VII показываетъ, что коэффициентъ $k+1$ -го члена получается изъ коэф-та k -го члена умноженіемъ на дробь $\frac{m-k+1}{k}$. Слѣд., когда этотъ множитель > 1 , коэффициентъ $(k+1)$ -й будетъ больше k -го; когда $\frac{m-k+1}{k}$ будетъ $= 1$, оба коэф-та будутъ равны; наконецъ, при $\frac{m-k+1}{k} < 1$ послѣдующій коэф-тъ будетъ $<$ предшествующаго. Опредѣленіе, при какихъ k множитель $\frac{m-k+1}{k}$ будетъ > 1 , приводится къ рѣшенію, относительно k , неравенства

$$\frac{m-k+1}{k} > 1, \text{ откуда, замѣчая, что } k > 0, \text{ имѣемъ: } k < \frac{m+1}{2}. \dots (1).$$

Различаемъ два случая: m — число четное, m — нечетное.

Первый случай.—Пусть m число четное и $= 2p$. Всѣхъ членовъ въ разложении будетъ $2p+1$; одинъ изъ нихъ занимаетъ среднее мѣсто: тотъ, передъ которымъ находится p членовъ и за которымъ слѣдуетъ p членовъ, т.е. $p+1$ -й. Подставивъ въ нер. (1) $2p$ вмѣсто m , найдемъ

$$k < p + \frac{1}{2}.$$

k есть число *целое*, и оно должно быть меньше $p + \frac{1}{2}$; это может быть при $k = 0, 1, 2, 3, \dots, p$; т.е. коэффициенты возрастают от начала до $p - 1$ -го включительно, т.е. до *средняго*, который и будет *наибольшим*. Из п. V заключаемъ, что дальнейшие коэф-ты будутъ идти уменьшаясь до конца разложения. Итакъ, въ срединѣ разложения находится *одинъ* членъ съ *наибольшими* коэффициентами.

Второй случай. Пусть m число нечетное и $m = 2p - 1$. Число членовъ разложения будетъ $2p - 2$, такъ что оно распадается на двѣ половины по $p - 1$ коэффициенту въ каждой. Равенство (1) дастъ

$$k < p - 1,$$

откуда слѣдуетъ, что для получения возрастающихъ коэффициентовъ надо давать k значенія $0, 1, 2, \dots, p$; т.е. коэффициенты идутъ возрастаю въ первой половинѣ строки. Если затѣмъ дадимъ k значеніе $p - 1$, для вычисленія перваго коэф-та второй половины разложения, то множитель $\frac{m - k + 1}{k}$ обратится въ 1; слѣд. $(p + 2)$ -я коэф. $-(p + 1)$ -му (что слѣдуетъ и изъ пун. V).

Итакъ, при m нечетномъ, въ срединѣ разложения находятся *два равные* коэффициента рядомъ, большіе остальныхъ.

IX. Сумма *всѣхъ* коэффициентовъ разложения $(x + a)^m$ всегда $= 2^m$. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ формулѣ бинома $x = a = 1$, замѣтимъ, что первая часть обратится въ 2^m ; а во второй части всѣ степени буквъ a и x обратятся въ 1, такъ что въ этой части останется сумма коэффициентовъ; именно:

$$2^m = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m-1}{2} + \binom{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + 1$$

Примѣчаніе. Замѣтивъ, что коэффициенты, начиная со второго, суть числа сочетаній изъ m элементовъ порядковъ 1-го, 2-го, \dots , m -го, и перенеся 1 въ первую часть, можемъ предыдущее равенство написать въ видѣ:

$$2^m - 1 = C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \dots + C_m^m.$$

Это значитъ, что полное число сочетаній изъ m элементовъ, порядковъ отъ 1-го до m -го, равно $2^m - 1$.

X. Разложение $(x - a)^m$ получается изъ $(x + a)^m$ подстановкою $(-a)$ вмѣсто a ; такимъ образомъ

$$(x - a)^m = [x + (-a)]^m = x^m + m(-a)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(-a)^2 x^{m-2} + \dots + (-a)^m = x^m - m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} - \dots + (-1)^m a^m.$$

Очевидно, всѣ члены съ четными степенями $(-a)$ дадутъ знакъ $+$, съ нечетными же знакъ $-$; поэтому знаки разложения чередуются. Последнему члену при m четномъ предшествуетъ $(=)$, при m нечетномъ $(-)$. Общій членъ будетъ

$$T_{k+1} = \pm \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} a^k x^{m-k},$$

гдѣ нужно брать знак $+$ при k четномъ, и $-$ при k нечетномъ. Но если замѣтить, что $a^k = (-1)^k \cdot a^k$, откуда $(-a)^k = (-1)^k \cdot a^k$ и что это произведение само собою принимаетъ знак $(+)$ при k четномъ и $(-)$ при нечетномъ k , то, очевидно, целесообразнѣе дать общему члену видъ

$$T_{k+1} = +(-1)^k \cdot \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \cdot a^k x^{m-k},$$

подъ которымъ онъ самъ собою принимаетъ надлежащій знакъ соответственно всякому частному значенію k .—Подобно этому и послѣднему члену, $\pm a^m$, целесообразнѣе дать видъ: $+(-1)^m \cdot a^m$.

Такъ, общій членъ разложенія $(1-x)^m$ будетъ

$$T_{k+1} = (-1)^k \cdot \frac{m \cdot m-1 \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} x^k.$$

XI. Если въ формулѣ (а) положить $x = a = 1$, то она дастъ

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

или, собравъ положительные члены въ одной части, а отриц. въ другой:

$$1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = m \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

т-е. *сумма коэффициентовъ нечетныхъ мѣстъ равна суммѣ коэффициентовъ четныхъ мѣстъ.*

Примѣчаніе. Написавъ послѣднее равенство въ видѣ

$$1 + C_m^2 + C_m^4 + C_m^6 + \dots = C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \dots,$$

заключаемъ: если изъ m предметовъ составить сочетанія всѣхъ порядковъ отъ 1-го до m -го включительно, то число сочетаній, въ составъ которыхъ входитъ нечетное число предметовъ, единичею больше числа сочетаній четнаго порядка.

✓ **716. Задача I.**—Разложить $(7a^3b - 3ab^3)^5$.

Положивъ $7a^3b = u$, $3ab^3 = v$, имѣемъ:

$$(u-v)^5 = u^5 - 5vu^4 + \frac{5 \cdot 4}{2} v^2 u^3 - \frac{5 \cdot 4}{2} v^3 u^2 + 5v^4 u - v^5.$$

Подставивъ вмѣсто u и v ихъ величины и выполнивъ всѣ вычисленія, найдемъ:

$$(7a^3b - 3ab^3)^5 = 16807a^{15}b^5 - 36015a^{12}b^6 + 30870a^9b^7 - 13230a^6b^8 + 2835a^3b^9 - 243a^0b^{10}.$$

Задача II. Найти седьмой членъ разложенія $(a^3 + 3x^5)^{10}$?

Искомый членъ $= C_{10}^6 \cdot (3x^5)^6 \cdot (a^3)^4 = 19779228 x^{30} a^{12}$.

Задача III. Найти 12-й членъ разложенія $(2 - a^3)^{15}$.

Искомый членъ $= C_{15}^{11} (-a^3)^{11} \cdot 2^4 = C_{15}^{11} \cdot 16 \cdot (-a^{33}) = -21840a^{33}$.

✓ **Задача IV.** Найти коэффициент при x^{18} въ разложеніи $(ax^4 - bx^2)^9$

Данное выр. = $[ax^4(1 - \frac{b}{ax^2})]^9 = a^9 x^{36} (1 - \frac{b}{ax^2})^9$, и какъ $a^9 x^{36}$ будетъ множителемъ каждаго члена разложенія $(1 - \frac{b}{ax^2})^9$, то нужно найти въ этомъ разложеніи коэффициентъ члена, содержащаго $\frac{1}{x^{18}}$, или $(\frac{1}{x^2})^9$, т.-е. 7-го чл. Такимъ образомъ, искомый коэффициентъ = $a^9 \cdot C_9^6 \cdot (\frac{b}{a})^6 = 84a^3 b^6$.

✓ **Задача V.** Найти коэффициентъ при x^r въ разложеніи $(x - \frac{1}{x^2})^m$.

Пусть x^r встрѣчается въ $k + 1$ -мъ членѣ. Этотъ членъ =

$$= C_m^k \cdot x^{m-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = (-1)^k \cdot C_m^k \cdot x^{m-3k};$$

но въ немъ должно быть x^r , слѣд. $m - 3k = r$, откуда $k = \frac{m-r}{3}$. Итакъ,

искомый коэффициентъ = $(-1)^{\frac{m-r}{3}} \cdot C_m^{\frac{m-r}{3}}$, что можно представить въ формѣ

$$(-1)^{\frac{m-r}{3}} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \frac{m-r}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \frac{2m-r}{3}}$$

✓ **Задача VI.** Найти численно-наибольшій членъ въ разложеніи $(x + a)^n$.
 $k + 1$ -ый членъ получается изъ k -го умноженіемъ послѣдняго на

$$\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x}, \text{ т.-е. на } \left(\frac{n+1}{k} - 1\right) \cdot \frac{a}{x}.$$

Множитель $\frac{n+1}{k} - 1$, очевидно, уменьшается по мѣрѣ возрастанія k ; слѣд. и численное значеніе $\left(\frac{n+1}{k} - 1\right) \cdot \frac{a}{x}$ уменьшается при возрастаніи k , а потому $k + 1$ -ый чл. не всегда будетъ больше k -го. Если $\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x}$ при нѣкоторомъ k будетъ меньше 1, то $k + 1$ -й чл. будетъ меньше k -го. Слѣд., чтобы k -й членъ былъ численно большій, необходимо должно быть

$$\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{n-(k-1)+1}{k-1} \cdot \frac{a}{x} > 1,$$

т.-е.

$$k > \frac{n+1}{1 + \frac{x}{a}} \quad \text{и} \quad k < \frac{n+1}{1 + \frac{x}{a}} + 1.$$

Если k будетъ = $\frac{n+1}{1 + \frac{x}{a}}$, тогда будетъ $\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x} = 1$ и слѣд. будетъ не

одинъ наиб. члена, а два, k -ый и $k + 1$ -ый, которые будутъ равны между собою.

Такъ какъ мы ищемъ наибольшій по численному значенію членъ, то наше разсужденіе одинаково примѣнимо и къ разложенію $(x - a)^n$, такъ что въ част-

нихъ примѣрахъ нѣтъ надобности обращать вниманія на знакъ второго члена бинома. (Амо собою разумѣется, что удобнѣе каждый примѣръ рѣшать независимо отъ общихъ формулъ.)

Примѣръ 1-й. *Найти наибольшій членъ разложенія $(1 + 4x)^8$, если $x = \frac{1}{3}$.*

k -ый членъ будетъ наибольшимъ, если будетъ $\frac{T_{k+1}}{T_k} < 1$ и $\frac{T_k}{T_{k-1}} > 1$.

Такъ какъ

$$T_{k+1} = \frac{8-k+1}{k} \cdot 4x \cdot T_k \quad \text{и} \quad T_k = \frac{8-(k-1)+1}{(k-1)} \cdot 4x \cdot T_{k-1},$$

то д. б. удовлетворены неравенства

$$\frac{9-k}{k} \cdot \frac{4}{3} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{10-k}{k-1} \cdot \frac{4}{3} > 1,$$

изъ которыхъ найдемъ: $\frac{43}{7} > k > \frac{36}{7}$. Следовательно, наибольшій членъ будетъ шестой. Величина его =

$$C_8^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = C_8^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{57344}{243}.$$

Примѣръ 2-й. *Найти наибольшій членъ разложенія $(3 - 2x)^9$, если $x = 1$.*

$$T_{k+1} = \frac{9-k+1}{k} \cdot \frac{2x}{3} \times T_k, \text{ численно,}$$

$$T_k = \frac{9-(k-1)+1}{k-1} \cdot \frac{2x}{3} \times T_{k-1}, \text{ численно.}$$

Должно быть

$$\frac{10-k}{k} \cdot \frac{2}{3} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{11-k}{k-1} \cdot \frac{2}{3} > 1,$$

откуда $5 > k > 4$. Но при $k = 4$, $T_{k+1} = T_k$; сл. въ данномъ случаѣ два члена, 4-й и 5-й, численно равны, больше остальныхъ.

Ихъ общая величина =

$$C_9^4 \cdot (2)^4 \cdot 3^5 = 84 \times 8 \cdot 729 = 489888.$$

717. Приложение. Теорема Эйлера и Фермата.

1. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА: *если p есть число первоначальное, а m — какое-угодно цѣлое число, то разность $m^p - m$ дѣлится на p .*

Если p — число первоначальное, то коэффициенты разложенія $(x + a)^p$ суть цѣлыя числа, содержащія (кромѣ 1-го и послѣдняго членовъ) множителя. p Въ самомъ дѣлѣ, представляя числа сочетаній, коэффициенты необходимо суть числа цѣлыя; сверхъ того, число p , будучи первымъ, не входитъ въ знаменатели $1, 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, \dots, 1 \cdot 2 \dots (p-1)$ коэффициентовъ.

Такимъ образомъ, имѣемъ право написать

$$m^p = [1 + (m-1)]^p = 1 + \text{крат. } p + (m-1)^p,$$

откуда, вычитая по m , имѣемъ:

$$m^p - m = (m-1)^p - (m-1) + \text{кр. } p;$$

и слѣдовательно

$$\begin{aligned} m^p - m &= (m-1)^p - (m-1) + \text{кр. } p \\ &= (m-2)^p - (m-2) + \text{кр. } p \\ &= \dots = 1^p - 1 + \text{кр. } p = \text{кр. } p, \end{aligned}$$

и теорема доказана.

II. Теорема Фермата есть простое слѣдствіе теоремы Эйлера и выражается такъ: *если первоначальное число p не дѣлитъ числа m , то оно дѣлитъ $m^{p-1} - 1$.*

Въ самомъ дѣлѣ, найденное равенство $m^p - m = \text{кр. } p$ можно переписать такъ:

$$m(m^{p-1} - 1) = \text{кр. } p,$$

откуда прямо видно, что если p не дѣлитъ числа m , то, будучи первымъ, оно должно дѣлать другого множителя $m^{p-1} - 1$.

718. Степень полинома. Практический приемъ для разложенія степени полинома заключается въ томъ, что въ выражении $a + b + c + \dots + m$ разсматриваютъ $b + c + \dots$ какъ одну букву, и по формулѣ бинома разлагаютъ $[a + b + c + \dots]^m$. Въ разложеніи войдутъ различныя степени $(b + c + \dots)^r$; надъ этимъ выражениемъ оперируютъ такимъ же точно образомъ, разсматривая $(c + d + \dots)$ какъ одну букву, продолжая такимъ образомъ, получаютъ требуемое разложение.

Отыщемъ общій членъ разложенія $(a + b + c + d + \dots)^m$. Положивъ $b + c + d + \dots = r$, имѣемъ $(a + b + c + d + \dots)^m = (a + r)^m = (x + a)^m$. Обозначивъ этотъ общій членъ буквою X , имѣемъ:

$$X = \frac{m(m-1) \dots (m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} a^r x^{m-r},$$

или

$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{1 \cdot 2 \dots r \cdot 1 \cdot 2 \dots (m-r)} a^r x^{m-r} \dots (1).$$

Здѣсь $x^{m-r} = (b + c + d + \dots)^{m-r} = (b + y)^{m-r}$ ($y = b + c + d + \dots$), полагая $c + d + \dots = q$.

Разложение $(y + b)^{m-r}$ содержитъ $m-r+1$ членовъ, называя общій членъ его, содержащій a^r , буквою Y , можемъ этому члену, согласно (1), дать видъ

$$Y = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-r)}{1 \cdot 2 \dots r' \cdot 1 \cdot 2 \dots (m-r-r')} \cdot b^{r'} y^{m-r-r'}.$$

Подставивъ въ (1) на мѣсто x^{m-r} общій членъ Y этого выраженія, найдемъ

$$X = \frac{1 \cdot 2 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \dots (m-r)}{1 \cdot 2 \dots r \cdot 1 \cdot 2 \dots (m-r) \cdot 1 \cdot 2 \dots r' \cdot 1 \cdot 2 \dots (m-r-r')} \cdot a^r b^{r'} y^{m-r-r'},$$

или, сокративъ коэффициенты на $1 \cdot 2 \dots (m-r)$:

$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{1 \cdot 2 \dots r \cdot 1 \cdot 2 \dots r' \cdot 1 \cdot 2 \dots (m-r-r')} \cdot a^r b^{r'} y^{m-r-r'} \dots (2).$$

Выраженіе это представляетъ всѣ тѣ члены искомага разложенія, которые содержатъ a^r и $b^{r'}$. Въ немъ $y^{m-r-r'} = (c + d + e + \dots)^{m-r-r'} = (z + e)^{m-r-r'}$, полагая $z = c + d + \dots$.

Разложение $(z + e)^{m-r-r'}$ имѣетъ $m-r-r'+1$ членовъ; называя общій его членъ, тотъ, передъ которымъ находится r'' членовъ, буквою Z , получимъ

$$Z = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-r-r')}{1 \cdot 2 \dots r'' \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-r-r'-r'')} \cdot a^r b^{r'} z^{m-r-r'-r''}.$$

Заменивъ во (2) выражение $y^{m-r-r'}$ его общими членами Z , имѣемъ

$$X = \frac{1.2 \dots m.1.2 \dots (m-r-r')}{1.2 \dots r.1.2 \dots r'.1.2 \dots r''.1.2 \dots (m-r-r'-r'')} \cdot a^r b^{r'} c^{r''} z^{m-r-r'-r''}$$

или, по сокращеніи:

$$X = \frac{1.2.3 \dots m}{1.2 \dots r.1.2 \dots r'.1.2 \dots r''.1.2 \dots (m-r-r-r'')} \cdot a^r b^{r'} c^{r''} z^{m-r-r'-r''}$$

и т. д.

Если бы полиномъ имѣлъ только 4 члена, то былъ бы $z=d$, и если обозначить $m-r-r-r'$ буквою r'' , то общій членъ разложения $(a+b+c+d)^m$ былъ бы

$$X = \frac{1.2.3 \dots m}{1.2 \dots r.1.2 \dots r'.1.2 \dots r''.1.2 \dots r'''} a^r b^{r'} c^{r''} d^{r'''},$$

гдѣ $r'' = m-r-r'-r'$ или $r+r+r'+r''' = m$.

Удовольшись произведеіи $1.2 \dots k$ принимать $=1$, когда $k=0$, можно изъ X получить все члены разложения $(a+b+c+d)^m$, поставляя вмѣсто r, r', r'', r''' послѣдовательно все положительныя цѣлыя числа, удовлетворяющія условию $r+r'+r''+r'''=m$.

Для получения перваго члена, полагаемъ $r=m$, и слѣд. $r'=r''=r'''=0$, вследствие чего все произведеніе $1.2 \dots r.1.2 \dots r'$ и $1.2 \dots r''$ обратятся въ 1; найдемъ

$$X = \frac{1.2 \dots m}{1.2 \dots m.1.1.1} a^m b^0 c^0 d^0 = a^m$$

Желая найти члены, содержащіе a^{m-1} , нужно положить $r=m-1$ и слѣд. $r'+r''+r'''=1$. При этомъ получится столько членовъ, сколько способами можно удовлетворить уравненію $r'+r''+r'''=1$ цѣлыми положительными числами со включеніемъ нуля. Очевидно, этому уравненію удовлетворимъ, и давая поочередно каждому слагаемому $=1$, и при этомъ каждое изъ остальныхъ двухъ равнымъ 0. Такимъ образомъ

1. При $r=m-1$ беремъ $r'=1$ и $r''=r'''=0$, что дастъ

$$X = \frac{1.2 \dots m}{1.2 \dots (m-1).1.1.1} a^{m-1} b^1 c^0 d^0 = m a^{m-1} b;$$

2. При $r=m-1$ беремъ $r''=1$ и $r'=r'''=0$ откуда,

$$X = \frac{1.2 \dots m}{1.2 \dots (m-1).1.1.1} a^{m-1} b^0 c^1 d^0 = m a^{m-1} c;$$

3. Наконецъ, при $r=m-1$, взявъ $r'''=1$ и $r'=r''=0$, имѣемъ

$$X = \frac{1.2 \dots m}{1.2 \dots (m-1).1.1.1} a^{m-1} b^0 c^0 d^1 = m a^{m-1} d.$$

Желая найти члены, содержащіе a^{m-2} , должны въ общемъ членѣ положить $r=m-2$, и слѣд. $r'+r''+r'''=2$. Послѣднему уравненію можно удовлетворить 6 способами:

1. $r'=2$ и $r=r''=r'''=0$;
2. $r''=2$ и $r'=r=r'''=0$;
3. $r'''=2$ и $r'=r=r''=0$;
4. $r'=1, r''=1$ и $r=r'''=0$;
5. $r'=r''=1$ и $r=r'''=0$;
6. $r'=r'''=1$ и $r=r''=0$.

Такимъ образомъ найдемъ члены:

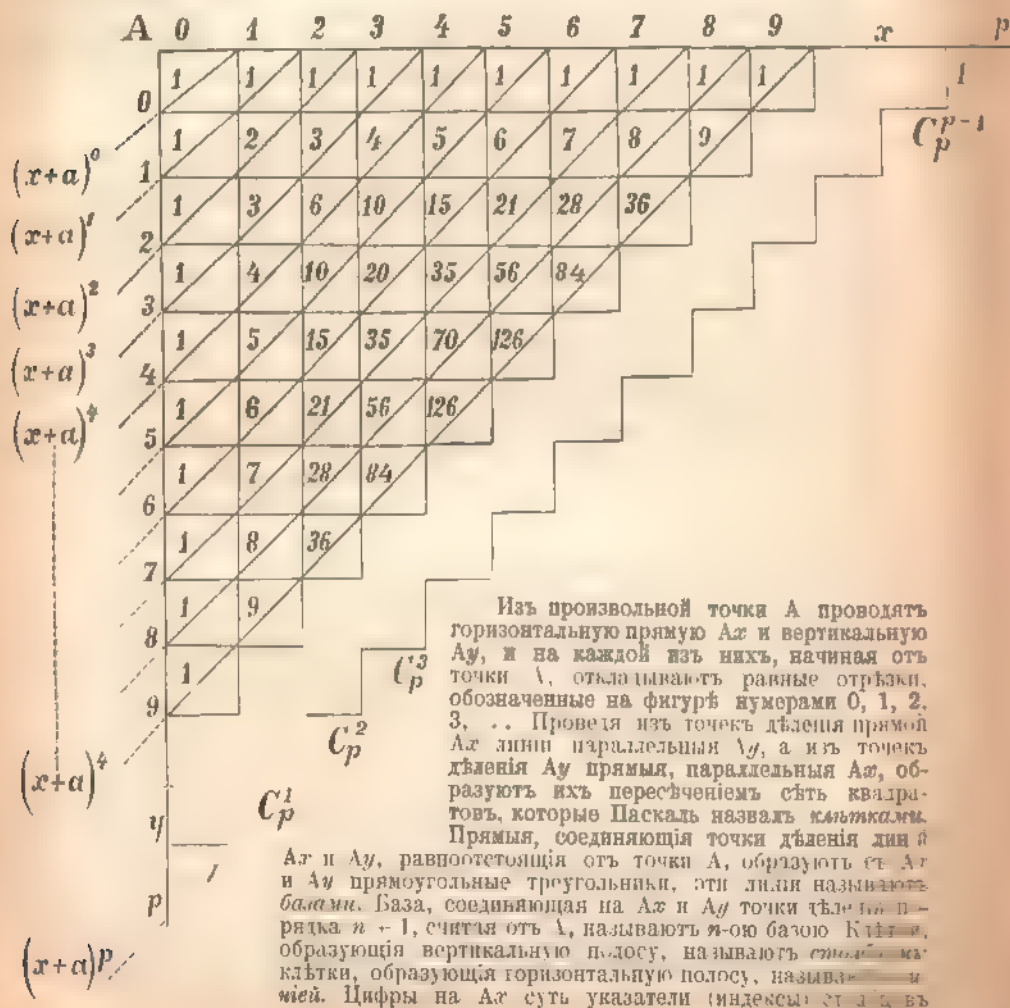
$$1. X = \frac{1.2.3 \dots m}{1.2 \dots (m-2).1.2.1.1} a^{m-2} b^2 c^0 d^0 = \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2.$$

$$2. X = \frac{1.2 \dots m}{1.2 \dots (m-2).1.1.2.1} a^{m-2} b^0 c^2 d^0 = \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} c^2$$

3. $X = \frac{1 \cdot 2 \dots m}{1 \cdot 2 \dots (m-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-2} b^0 c^0 d^2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} d^2$.
4. $X = \frac{1 \cdot 2 \dots m}{1 \cdot 2 \dots (m-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-2} b^1 c^1 d^0 = m(m-1) a^{m-2} b c$.
5. $X = \frac{1 \cdot 2 \dots m}{1 \cdot 2 \dots (m-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-1} b^1 c^0 d^1 = m(m-1) a^{m-2} b d$.
6. $X = \frac{1 \cdot 2 \dots m}{1 \cdot 2 \dots (m-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-2} b^0 c^1 d^1 = m(m-1) a^{m-2} c d$.

Арифметический треугольник Паскаля.

719. Таблицы, известной под именем *арифметического треугольника Паскаля*, дают различные расположения; мы укажем то, которое принято было самим Паскалемъ.



индексной, первый, второй... и цифры на *Ау* суть указатели линий. Самую таблицу составляют, руководясь слѣдующимъ правиломъ.

Правило построения таблицы. Число въ какой угодно клеткѣ *C* получаютъ сложениемъ чиселъ, стоящихъ въ клеткахъ *C'* и *C''*, прилежащихъ непосредственно къ *C*, одна — сверху, другая — слева отъ *C*; т.-е. $C = C' + C''$.

$$\begin{array}{r} C' \\ \hline C \quad C'' \end{array}$$

Таблица чиселъ, такимъ образомъ составленныхъ, и образуетъ арифметическій треугольникъ Паскаля. Отсюда прямо слѣдуетъ, что числа, написанныя въ двухъ клеткахъ, лежащихъ на одной и той же базѣ, въ равныхъ удаленіяхъ отъ ея концовъ, равны между собою.

Фигурныя числа. Числа, находящіяся въ клеткахъ линіи съ индексомъ *p*, называются *фигурными числами порядка p*. Говя, фигурныя числа нулевого порядка суть 1, 1, 1, ...; фигурныя числа 1-го порядка суть 1, 2, 3, 4, ...; 2-го порядка: 1, 3, 6, 10, ...; и т. д.

m-ое фигурное число порядка *p* будемъ обозначать символомъ F_m^p ; это число написано на линіи подъ номеромъ *p*, въ столбцѣ подъ номеромъ *m*—1, на базѣ подъ номеромъ *m* + *p* — 1.

По закону составления треугольника Паскаля имѣемъ соотношение

$$F_m^p = F_{m-1}^{p-1} + F_{m-2}^{p-1} \dots (1).$$

Примѣчаніе. Легко видѣть, что $F_m^0 = 1$, каково бы ни было *m*; и $F_1^p = 1$, каково бы ни было *p*.

Свойства фигурныхъ чиселъ.

720. ТѢОРЕМА. *m*-ое фигурное число порядка *p* равно суммѣ *m* первыхъ фигурныхъ чиселъ порядка *p*—1.

Складывая соотношенія, указываемыя равенствомъ (1):

$$F_m^p = F_{m-1}^{p-1} + F_{m-2}^{p-1}, \quad F_{m-1}^p = F_{m-2}^{p-1} + F_{m-3}^{p-1}, \dots, \quad F_2^p = F_1^{p-1} + F_1^{p-1}$$

и замѣчая, что $F_1^p = 1 = F_1^{p-1}$, имѣемъ

$$F_m^p = F_{m-1}^{p-1} + F_{m-2}^{p-1} + \dots + F_2^{p-1} + F_1^{p-1} \dots (2).$$

721. Выраженіе фигурнаго числа F_m^p чрезъ *m* и *p*. — Чтобы выразить фигурное число F_m^p чрезъ *m* и *p*, докажемъ слѣдующую лемму Паскаля.

Два фигурныхъ числа F_m^p и F_{m+1}^{p+1} , стоящихъ въ двухъ смежныхъ клеткахъ одной и той же базы порядка *m* + *p* — 1, связаны соотношеніемъ

$$\frac{F_m^p}{F_{m+1}^{p+1}} = \frac{p+1}{m+1}.$$

Это соотношеніе вѣрно для клетокъ на базѣ съ индексомъ 1, ибо числа въ двухъ клеткахъ на этой базѣ суть $1 = F_1^1$ и $1 = F_2^0$, такъ что въ самомъ дѣлѣ $\frac{F_2^0}{F_1^1} = 1$.

Слѣдовательно, теорема будетъ доказана, разъ мы докажемъ, что если свойство это имѣетъ мѣсто для базы съ индексомъ $m + p - 2$, то оно имѣетъ мѣсто и для базы съ индексомъ $m + p - 1$. Возьмемъ на базѣ индекса $m + p - 2$ три смежныя клѣтки A', B', C' , расположенныя на линияхъ съ индексами $p-1, p, p+1$ и въ столбцахъ съ индексами $m-1, m-2, m-3$. Фигурныя числа, находящіяся въ этихъ клѣткахъ, суть $F_{m-1}^{p-1}, F_{m-1}^p, F_{m-2}^{p+1}$.

$$\begin{array}{ccc} & A' & \\ & F_{m-1}^{p-1} & \\ B' & & \\ & F_{m-1}^p & F_m^p & A \\ C' & & & \\ & F_{m-2}^{p+1} & F_{m-1}^{p+1} & B \end{array}$$

По допущенію, имѣемъ

$$\frac{F_m^{p-1}}{F_{m-1}^{p-1}} = \frac{p}{m-1}, \quad \frac{F_{m-1}^p}{F_{m-2}^{p+1}} = \frac{p+1}{m-2},$$

откуда

$$\frac{F_m^{p-1} + F_{m-1}^p}{F_{m-1}^{p-1}} = \frac{m+p-1}{m-1}, \quad \frac{F_{m-1}^p}{F_{m-1}^{p-1} + F_{m-2}^{p+1}} = \frac{p+1}{m+p-1},$$

или

$$\frac{F_m^p}{F_{m-1}^p} = \frac{m+p-1}{m-1}, \quad \frac{F_{m-1}^p}{F_{m-1}^{p-1}} = \frac{p+1}{m+p-1}.$$

Перемножая, найдемъ:

$$\frac{F_m^p}{F_{m-1}^{p-1}} = \frac{p+1}{m-1} \cdot \dots \cdot (3).$$

Но числа F_m^p и F_{m-1}^{p+1} написаны въ смежныхъ клѣткахъ A и B базы индекса $m + p - 1$; первая принадлежитъ къ клѣткамъ A', B' , а вторая къ B', C' . Такимъ образомъ, лемма доказана.

Написавъ соотношеніе (3) въ формѣ

$$F_{m-2}^{p+2} = \frac{p+1}{m-1-\alpha} \cdot F_{m-1-\alpha}^{p-2}$$

и подставляя вмѣсто α числа $0, 1, 2, \dots, m-2$, найдемъ

$$\begin{aligned} F_m^p &= \frac{p+1}{m-1} \cdot F_{m-1}^{p-1} \\ F_{m-1}^{p+1} &= \frac{p+2}{m-2} \cdot F_{m-2}^{p-2} \\ &\dots \dots \dots \\ F_2^{m+p-2} &= \frac{m+p-1}{1} \cdot F_1^{m+p-1}. \end{aligned}$$

Перемноживъ почленно эти равенства и замѣтивъ, что $F_1^{m+p-1} = 1$, имѣемъ формулу

$$F_m^p = \frac{(p+1)(p+2) \dots (m+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \dots (4),$$

что можно написать еще такъ:

$$F_m^p = \frac{m(m-1) \dots (m+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \dots (5),$$

полагая $p \geq 0$.

Изъ этой формулы имѣемъ

$$F_m^0 = 1; F_m^1 = \frac{m}{1}; F_m^2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}; F_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \dots$$

722. Приложенія арифметическаго треугольника. — Укажемъ важѣйшія приложенія арифметическаго треугольника.

I. Обыкновенныя сочетанія. Числа, стоящія на базѣ съ индексами m и n столбца съ индексами $1, 2, 3, \dots$, представляютъ числа обыкновенныхъ сочетаній изъ m буквъ, взятыхъ, соответственно, по одной, по две, по три, и т. д.

Теорема вѣрна для базы съ индексомъ 1; слѣд. она будетъ доказана, размы докажемъ, что если она вѣрна для индекса $m-1$, то будетъ вѣрна и для индекса m .

Пусть будутъ двѣ смежныя кѣтки a и b , взятые на базѣ съ индексомъ $m-1$, и находящіяся въ столбцахъ съ указателями p и $p-1$. По допущенію, числа, написанныя въ кѣткахъ a и b , суть C_{m-1}^p и C_{m-1}^{p-1} (гдѣ C означаетъ число сочетаній). Съ другой стороны, по закону построения треугольника Паскаля, число x , стоящее въ кѣткѣ c , прилежащей и къ a , и къ b , и расположенной на базѣ съ указателемъ m , удовлетворяетъ равенству

$$x = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-1}^p.$$

Но, по § 705, II, сумма чиселъ, написанныхъ во второй части соотношенія, равна C_m^p ; слѣд. $x = C_m^p$, и теорема доказана.

Формула для C_m^p . — Кѣтка c , въ которой написано число C_m^p , находится на базѣ индекса m и въ столбцѣ индекса p , слѣд. на линіи индекса $m-p$. Заключаемъ, что

$$C_m^p = F_{m-p}^{m-p} = \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p}.$$

II. Сочетанія съ повтореніями. — Лемма. Число полныхъ сочетаній изъ m буквъ по p равно числу полныхъ сочетаній изъ $m-1$ буквъ по p , + число полныхъ сочетаній изъ m буквъ по $p-1$.

Въ самомъ дѣлѣ, полныя сочетанія изъ m буквъ a, b, c, \dots, l по p можно разбить на двѣ группы: на группу сочетаній, содержащихъ опредѣленную букву, a напр., и на группу, этой буквы не содержащихъ.

Число сочетаній первой группы равно F_{m-1}^{p-1} , потому что для составленія ихъ нужно сначала составить полныя сочетанія изъ m буквъ по $p-1$, а потомъ къ каждому приписать букву a . Число же сочетаній второй группы, очевидно, есть число полныхъ сочетаній изъ $m-1$ буквъ b, c, \dots, l взятыхъ по p , или F_{m-1}^p . Итакъ

$$F_m^p = F_{m-1}^{p-1} + F_{m-1}^p.$$

Но совершенно такое же соотношеніе связываетъ фигур. числа $F_m^p, F_{m-1}^{p-1}, F_{m-1}^p$; сверхъ того, легко видѣть, что $F_m^1 = F_m^1$ и $F_m^2 = F_m^2$; слѣдовательно

$$F_m^p = F_m^p.$$

умножимъ на $x + a$, то получимъ

$$(x + a)^{m-1} = 1 + x^{m-1} + (1 + A_1)a x^{m-2} + (A_1 + A_2)a^2 x^{m-3} + \dots + A_m a^{m-1}.$$

Так. обр. коэф-ты второго разложения выводятся изъ коэффициентовъ перваго по закону составления ариметич. треугольника. Но числа на базѣ индекса 1 суть коэффициенты $x = a^1$; слѣд-на числа базѣ индекса 2 суть коэф-ты $(x + a)^2$, и вообще, числа базѣ индекса m суть коэф-ты $(x + a)^m$, расположеннаго по нисходящимъ степенямъ x .

Число этой базы, стоящее въ клеткѣ колонны индекса p , есть C_m^p ; слѣдоват., общій членъ разложения $(x + a)^m$ есть $C_m^p a^p x^{m-p}$.

723. Примѣчаніе. Теоріей соединений занимались уже индійскіе математики; въ алгебрѣ *Баскари* (1114) даны правильныя формулы для опредѣленія числа различныхъ соединений. Формулы числа размѣщений и сочетаній позднѣе были вторично найдены *Галилеемъ* (1564—1642). Ариметическій треугольникъ былъ извѣстенъ уже китайскимъ математикамъ XI столѣтія, а затѣмъ вновь найденъ былъ *Паскалемъ* въ XVIII столѣтіи (1623—1662). Формула бинома дана *Ньютономъ* въ 1676 году. Она вырѣзана на гробницѣ Ньютона въ Вестминстерскомъ аббатствѣ.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

ТЕОРІЯ РЯДОВЪ И ЛОГАРИТМОВЪ.

ГЛАВА XLV.

Прогрессія арифметическая.—Общій членъ.—Сумма членовъ.—Вставка средних арифметическихъ.—Безконечная прогрессія.—Опрежденіе суммы одинаковыхъ степеней членовъ арифметической прогрессіи.—Приложенія

724. Опрежденіе. *Арифметической прогрессіей* наз. рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое получается изъ предыдущаго прибавленіемъ постояннаго, положительнаго или отрицательнаго, количества, называемаго *разностью* прогрессіи. Очевидно, что когда разность положительна, члены будутъ возрастать, и прогрессія наз. *возрастающею*; когда разность отрицательна, члены идутъ уменьшаясь, и прогрессія наз. *убывающею*. Слово прогрессія обозначается знакомъ \vdash ; члены прогрессіи отдѣляются одинъ отъ другого точкою. Такъ:

$\vdash 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . . .$ есть прогрессія возрастающая; разность ея $= 3$.

$\vdash 5 . 2 . -1 . -4 . -7 . . .$ есть прогр. убывающая; разность ея $= -3$.

Для полученія разности надо изъ какого-нибудь члена вычесть предшествующій.

Когда число членовъ прогрессіи ограниченное, она наз. *конечною*; при неограниченномъ числѣ членовъ—*безконечною*.

725. Каждые три смежные члена арифм. прогрессіи составляютъ непрерывную арифметическую пропорцію. Пусть дана прогрессія въ общемъ видѣ

$$\vdash a . b . c . d . e . . . , \text{ а разность ея } r.$$

По опредѣленію прогрессіи: $c - b = r$ и $d - c = r$, откуда

$$d - c = c - b;$$

смежные члены b, c, d , составляютъ непрерывную арифметическую пропорцію.

726. Теорема. *Общій членъ.*— n -й членъ прогрессіи называется общимъ членомъ. Пусть дана прогрессія

$$\vdash a . b . c . d . . . r . s . t . u . . . (1),$$

въ которой u есть n -й членъ, а разность $-\delta$. По опредѣленію прогрессіи имѣемъ:

$$b = a + \delta, c = b + \delta, d = c + \delta, \dots, s = r + \delta, t = s + \delta, u = t + \delta.$$

Складывая эти равенства, находимъ:

$$b + c + d + \dots + s + t + u = a + b + c + \dots + r + s + t + (n-1)\delta;$$

а отнявъ отъ обѣихъ частей по $b + c + \dots + s + t$, получаемъ:

$$u = a + (n-1)\delta.$$

Итакъ: *общій членъ прогрессіи равенъ первому, сложенному съ разностью, помноженною на число предшествующихъ членовъ.*

Примѣры: 1. Найти двадцатый членъ прогрессіи:

$$\div 7.3.-1\dots$$

Здѣсь $a = 7$, $\delta = -4$, $n = 20$. Слѣд.

$$u = 7 + (20-1) \cdot (-4) = 7 + 19 \cdot (-4) = -69.$$

2. Найти величину n -го нечетнаго числа.

Нечетныя числа образуютъ арифм. прогрессію, въ которой $a = 1$, $\delta = 2$; слѣд. n -е нечетное число $= 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$.

3. Пространства, проходимыя свободно-падающимъ тѣломъ въ первую, вторую, . . . секунду, образуютъ арифметич. прогр., первый членъ которой $= \frac{1}{2}g$, а разность $= g$. Найти пространство, пробываемое въ n -ю секунду?

$$\text{Это пространство} = \frac{1}{2}g + (n-1)g = (2n-1) \cdot \frac{g}{2}.$$

727. ТЕОРЕМА. *Во всякой конечной арифметической прогрессіи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ двухъ другихъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ.*

Пусть имѣемъ прогрессію объ n членахъ:

$$\div a. b. c. d. \dots x. \dots y. \dots k. r. t. u,$$

разность которой $-\delta$; пусть, кромѣ того, членъ x имѣетъ передъ собою p членовъ, и пусть p членовъ слѣдуютъ за y . По формулѣ общаго члена имѣемъ:

$$x = a + p \cdot \delta \dots (1).$$

Написавъ прогрессію въ обратномъ порядкѣ:

$$\div u. / r. k. \dots y. \dots x. \dots d. c. b. a,$$

замѣчаемъ, что ея разность будетъ $(-\delta)$; въ ней передъ членомъ y находится p членовъ, и потому

$$y = u + p \cdot (-\delta) \dots (2).$$

Складывая равенства (1) и (2), получаемъ:

$$x + y = a + u.$$

Примѣчаніе. Можно бы было членъ y выразить и изъ начальной прогрессіи, принявъ въ ней y за первый членъ; въ такомъ случаѣ члену u предшествовало бы p членовъ, и потому $u = y + p\delta$, откуда: $y = u - p\delta$, выраженіе, одинаковое съ (2).

728. ТЕОРЕМА. Сумма членовъ конечной арифметической прогрессіи равна полусуммѣ крайнихъ, помноженной на число членовъ.

Взявъ прогрессію $a, b, c, d, \dots, h, k, i, u$ обѣ n членахъ и назвавъ ея сумму буквою S , имѣемъ

$$S = a + b + c + d + \dots + h + k + i + u \dots (1).$$

Написавъ слагаемыя въ обратномъ порядкѣ, имѣемъ:

$$S = u + i + k + h + \dots + d + c + b + a \dots (2)$$

Складывая (1) съ (2), получаемъ:

$$\begin{aligned} 2S &= (a + u) + (b + i) + (c + k) + (d + h) + \dots \\ &\quad \dots + (h + d) + (k + c) + (i + b) + (u + a). \end{aligned}$$

Во вторыхъ, третьихъ и т. д. скобкахъ имѣемъ суммы членовъ, равноотстоящихъ отъ крайнихъ; по предыдущей теоремѣ, каждая такая сумма $= (a + u)$, слѣд. вторая часть равенства содержитъ слагаемое $(a + u)$, повторенное n разъ, в потому

$$2S = (a + u) \cdot n, \text{ откуда } S = \frac{(a + u) \cdot n}{2}.$$

Примѣчаніе. Подставивъ вмѣсто u выраженіе $a + (n - 1)\delta$, можемъ этой формулѣ дать видъ

$$S = \frac{2a + (n - 1) \cdot \delta}{2} \cdot n.$$

Примѣры: I. *Найти сумму n первыхъ натуральныхъ чиселъ.* Эти числа образуютъ прогрессію $1, 2, 3, \dots, (n - 1), n$, въ которой первый членъ $= 1$, разность $= 1$, число членовъ $= n$; а потому

$$S = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}.$$

II. *Найти сумму первыхъ n нечетныхъ чиселъ.*

Выше мы видѣли, что n -ое нечетное число $= 2n - 1$; потому вопросъ приводится къ нахожденію суммы членовъ прогрессіи

$$\div 1, 3, 5, \dots, (2n - 1),$$

въ которой первый членъ $= 1$, разность $= 2$, послѣдній членъ $= 2n - 1$, число членовъ $= n$. Такимъ образомъ

$$S = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2.$$

Итакъ: сумма n первыхъ нечетныхъ чиселъ равна квадрату числа этихъ чиселъ.

Докажемъ, что обратно: если сумма членовъ арифметической прогрессіи равна квадрату числа этихъ членовъ, каково бы оно ни было, то прогрессія есть рядъ нечетныхъ чиселъ.

Въ самомъ дѣлѣ, каково бы ни было n , должно быть

$$\frac{2a + (n-1)\delta}{2} \cdot n = n^2,$$

или, располагая по степенямъ n :

$$(2 - \delta)n^2 + (\delta - 2a)n = 0.$$

Такъ какъ полиномъ первой части долженъ быть тождественно равенъ нулю, то должны вѣсть:

$$2 - \delta = 0 \quad \text{и} \quad \delta - 2a = 0, \quad \text{откуда} \quad \delta = 2, \quad 2a = \delta;$$

или:

$$a = 1 \quad \text{и} \quad \delta = 2, \quad \text{т.-е. рядъ будетъ } 1, 3, 5, 7, \dots$$

729. Вставка среднихъ арифметическихъ между двумя данными числами.

Между двумя данными числами a и b вставить m среднихъ арифметическихъ значить составить арифметическую прогрессію объ $m + 2$ членахъ, которой a и b были бы крайними членами. Очевидно, вопросъ приводится къ нахожденію разности δ прогрессіи. Такъ какъ члену b предшествуетъ $m + 1$ членовъ, то

$$b = a + (m + 1) \cdot \delta, \quad \text{откуда} \quad \delta = \frac{b - a}{m + 1}.$$

Такимъ образомъ прогрессія будетъ

$$\div a \cdot \left(a + \frac{b-a}{m+1}\right) \cdot \left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{m+1}\right) \cdot \left(a + 3 \cdot \frac{b-a}{m+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(a + m \cdot \frac{b-a}{m+1}\right) \cdot b.$$

Примѣръ. Между 5 и 32 вставить 8 среднихъ арифметическихъ.

Разность будетъ $\frac{32-5}{9}$, или 3; слѣд. имѣемъ прогрессію

$$\div 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 20 \cdot 23 \cdot 26 \cdot 29 \cdot 32.$$

730. ТЕОРЕМА.—Если въ прогрессіи $a, b, c, d, \dots, r, t, u$ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ вставить одинаковое число m среднихъ арифметическихъ, то данные члены вмѣстѣ съ вставленными составятъ одну сплошную прогрессію

$$\div a, \alpha, \beta, \dots, \lambda, b, \alpha', \beta', \dots, \lambda', c, \alpha'', \beta'', \dots, \lambda'', d, \dots, t, \alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \dots, \lambda^{(n)}, u.$$

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ частныя прогрессіи, такимъ образомъ составленныя

$$\div a, \alpha, \beta, \dots, \lambda, b; \quad \div b, \alpha', \beta', \dots, \lambda', c; \quad \dots \quad \div t, \alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \dots, \lambda^{(n)}, u,$$

последовательно имѣютъ разности

$$\frac{b-a}{m-1}, \frac{c-b}{m-1}, \frac{d-c}{m-1}, \dots, \frac{u-t}{m-1};$$

по $b-a=c-b=d-c=\dots=u-t$, по опредѣленію прогрессіи, слѣд-
ствѣ эти отдѣльныя прогрессіи имѣютъ одинаковую разность. А какъ, при этомъ,
последній членъ одной служитъ первымъ членомъ слѣдующей, то совокупность
всѣхъ прогрессій составляетъ одну сплошную прогрессію.

731. ТЕОРЕМА. Во всякой безконечной возрастающей арифметиче-
ской прогрессіи члены приближаются къ $+\infty$, а въ убывающей къ $-\infty$.

1. Если буквою u обозначимъ n -й членъ, то требуется доказать, что всегда
можно найти такое цѣлое число n , что u будетъ больше всякаго произвольно
взятаго количества M , т.-е. что для n всегда можно найти цѣлое значеніе, удо-
влетворяющее неравенству: $a + \delta(n-1) > M$. . . (1). Въ самомъ дѣлѣ, пере-
неся a во вторую часть и дѣля на положит. число δ , имѣемъ

$$n-1 > \frac{M-a}{\delta}, \text{ откуда } n > 1 + \frac{M-a}{\delta}.$$

Каково бы ни было M , всегда $\frac{M-a}{\delta}$ можно выразить цѣлымъ или дроб-
нымъ числомъ; найдя цѣлую часть формулы $1 + \frac{M-a}{\delta}$ и взявъ для n цѣлое
число, большее ея, тѣмъ самымъ удовлетворимъ неравенству (1).

Примѣръ. Съ какаго мѣста члены прогрессіи : 5 . 8 . 11 . . .
становятся больше 10000?

По предыдущему должно быть $n > 1 + \frac{10000-5}{3}$, или $n > 3332 \frac{2}{3}$; слѣд-
члены становятся больше 10000, начиная съ 3333-го.

2. Если прогрессія будетъ убывающая, т.-е. $\delta < 0$, то всегда можно найти
въ прогрессіи такой членъ u , который былъ бы меньше произвольно взятой
величины M , т.-е. всегда можно найти цѣлое число n , удовлетворяющее нера-
венству $a + (n-1)\delta < M$. Въ самомъ дѣлѣ, неравенство дасть $(n-1)\delta < M-a$,
откуда, раздѣливъ на δ и переѣмливъ смыслъ неравенства, имѣемъ

$$n-1 > \frac{M-a}{\delta}, \text{ а отсюда } n > 1 + \frac{M-a}{\delta}.$$

Взявъ для n цѣлое число, большее $1 + \frac{M-a}{\delta}$, удовлетворимъ неравенству.

**732. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, относящихся къ арифметическимъ
прогрессіямъ.**

Во всякой арифметической прогрессіи фигурируетъ 5 количествъ a , u , δ , n , s ,
связанныхъ двумя уравненіями:

$$u = a + (n-1) \cdot \delta \quad . \quad . \quad (1) \quad s = \frac{(a+u)n}{2} \quad . \quad . \quad (2);$$

Слѣдовательно, всегда можно найти два изъ этихъ количествъ, когда осталь-
ныя три будутъ даны; а потому можно предложить столько различныхъ задачъ,
сколько существуетъ сочетаній изъ пяти элементовъ по два, т.-е. C_5^2 или 10

задачъ. Эти сочетанія суть: *аи, аѢ, ап, аs, иѢ, ин, ис, Ѣп, Ѣs, ns*; в слѣд-
задачи таковы:

Данныя.	Искомыя.
1. <i>а, Ѣ, п</i>	<i>и, s</i>
2. <i>и, Ѣ, п</i>	<i>а, s</i>
3. <i>а, и, п</i>	<i>Ѣ, s</i>
4. <i>а, и, Ѣ</i>	<i>и, s</i>
5. <i>s, Ѣ, п</i>	<i>а, и</i>
6. <i>s, и, п</i>	<i>а, Ѣ</i>
7. <i>s, а, п</i>	<i>и, Ѣ</i>
8. <i>s, и, Ѣ</i>	<i>а, п</i>
9. <i>s, а, Ѣ</i>	<i>и, п</i>
10. <i>s, а, и</i>	<i>Ѣ, п.</i>

Изъ числа этихъ задачъ только 8-я и 9-я приводятъ къ квадратному ур—нію, остальные рѣшаются ур—ми 1-й степени.

733. Задача I. *Сколько нужно взять членовъ въ арифметической прогрессіи, которой 1-й членъ есть 16, а разность 8, чтобы сумма членовъ составила 1840?*

Имѣетъ ур—нія

$$u = 16 + (n - 1) \cdot 8 \text{ и } 1840 = \frac{(16 + u)n}{2}.$$

Исключая изъ этихъ ур—ній *и*, находимъ ур—ніе

$$(1) \quad 1840 = \frac{[2 \cdot 16 + (n - 1) \cdot 8]n}{2}, \text{ или } n^2 + 3n - 460 = 0.$$

Рѣшая это ур—ніе, находимъ корни: $n' = 20$, $n'' = -23$. Заключаемъ, что нужно взять 20 членовъ. Прогрессія будетъ

$\therefore 16.24.32.40.48.56.64.72.80.88.96.104.112.120.128.136.144.152.160.168.$

Отрицательный корень. Подставивъ въ ур. (1) — *n* вмѣсто *n*, получимъ:

$$1840 = \frac{[2 \cdot 16 + (n + 1) \cdot (-8)]n}{2}, \text{ или } 1840 = \frac{[2 \cdot (-16) + (n + 1) \cdot 8]n}{2},$$

$$\text{или} \quad 1840 = \frac{[2 \cdot (-8) + (n - 1) \cdot 8]n}{2},$$

ур—ніе, положительный корень котораго = 23. Заключаемъ, что, взявъ первымъ членомъ прогрессіи (—8) вмѣсто 16, разность сохранивъ ту же, а число членовъ увеличивъ на 3, получимъ сумму, равную 1840. И действительно, сумма 23 членовъ прогрессіи

$\therefore -8.0.8.16.24 \dots 168$

равна 1840, ибо эта прогрессія сравнительно съ предыдущей имѣетъ три лиш-

нихъ члена: $-8,0$ и $+\frac{1}{4}$, дающимъ въ суммѣ 0 , а остальные члены — тѣ же, что и въ предыдущемъ рядѣ.

734. Задача II. Изъ А выезжаетъ курьеръ и проезжаетъ въ первый день 10 миль, а въ каждый слѣдующій $\frac{1}{4}$ -ю милю больше. Спустя 3 дня, другой курьеръ, поѣхавъ по тому же пути какъ и первый, выезжаетъ изъ города В, расположеннаго передъ городомъ А, въ 40 миль отъ послѣдняго. Онъ проезжаетъ въ первый день 7 миль, а въ каждый слѣдующій день $\frac{2}{3}$ мили больше. Черезъ сколько дней послѣ выезда перваго оба курьера встрѣятся?

Рѣшеніе Штурма. Пусть искомое число дней будетъ x . Путь, пройденный 1-мъ курьеромъ, есть сумма членовъ арифм. прогр., которой крайніе члены суть 10 и $10 + \frac{x-1}{4}$, т.-е. $(20 + \frac{x-1}{4}) \cdot \frac{x}{2}$, или $\frac{(79+x)x}{8}$. Второй курьеръ находится въ дорогѣ, до встрѣчи съ первымъ, $x-3$ дня, и проезжаетъ $[14 + \frac{(x-4) \cdot 2}{3}] \cdot \frac{x-3}{2}$, или $\frac{(17+x)(x-3)}{3}$ миль.

Ур—ніе задачи есть

$$(1) \quad \frac{(79+x)x}{8} - \frac{(17+x)(x-3)}{3} = 40 = 0, \text{ или } (2) \quad 5x^2 - 125x + 552 = 0.$$

Рѣшивъ ур—ніе, найдемъ: $x' = 5,72 \dots$, $x'' = 19,27 \dots$

Но, приводя задачу къ ур—нію, мы предполагали, что x — число цѣлое; сл. найденныя рѣшенія не отвѣчаютъ на предложенный вопросъ. Тѣмъ не менѣе, можно показать, что цѣлыя части 5 и 19 корней означаютъ, что были двѣ встрѣчи, первая по истеченіи 5, вторая 19-ти дней.

Во-первыхъ, замѣтимъ, что если буквою α обозначить путь, сдѣланный первымъ курьеромъ, и буквою β — путь, пройденный вторымъ, увеличенный на 40 миль, полагая, что первый курьеръ находится въ пути цѣлое число x , а второй — цѣлое число $x-3$ дней, то имѣемъ тождественно

$$(3) \quad 5x^2 - 125x + 552 = 24(\beta - \alpha).$$

Это, очевидно, слѣдуетъ изъ того, что ур. (2) было выведено изъ (1) перемѣною знаковъ у всѣхъ членовъ и умноженіемъ ихъ на 24.

Подставимъ теперь въ 1-ую часть ур. (2) вмѣсто x сперва 5, потомъ 6; такъ какъ меньшій корень 5,72 . . . содержится между этими числами, то результатъ первой подстановки будетъ положительный, второй — отрицательный. Но, въ силу тождества (3), разность $\beta - \alpha$ всегда имѣетъ одинаковый знакъ съ триномомъ $5x^2 - 125x + 552$; слѣд. въ концѣ пятаго дня $\alpha < \beta$, а въ концѣ шестого $\beta < \alpha$. Итакъ, первая встрѣча, какъ и было сказано, имѣла мѣсто между пятымъ и шестымъ днемъ. Подобнымъ образомъ докажемъ, что вторая встрѣча имѣла мѣсто черезъ 19 дней. Возможность этой второй встрѣчи легко понять, ибо второй курьеръ, увеличивая свою скорость болѣе перваго, встрѣтитъ его, будучи сначала порегаивъ первымъ. Это подтверждается изслѣдованіемъ, въ концѣ сколькихъ дней оба курьера имѣютъ одинаковую скорость: найдемъ число дней 13, содержащееся между 5 и 19.

Можно, даѣе, опредѣлить дробь, которая слѣдуетъ придать къ числамъ 5 и 19, для нахождения точнаго времени встрѣчъ, предполагая, что скорость курьеровъ не измѣняется въ теченіе цѣлаго дня. Опредѣлимъ, напр., время второй встрѣчи.

Чтобы найти промежутокъ, раздѣляющій курьеровъ по истеченіи 19 дней, достаточно, въ силу тождества (3), подставить въ первую часть ур. (2) 19 вмѣсто x и раздѣлить результатъ на 24. Найдемъ $(-\frac{3}{4})$; знакъ $(-)$ показываетъ, что въ началѣ 19-го дня курьеръ В не догналъ еще курьера А. Но скорости А и В въ теченіе 19-го дня суть $10 + \frac{18}{4}$ и $7 + \frac{15 \times 2}{3}$, или $\frac{29}{2}$ и 17; слѣд., если обозначимъ буквою y искомую часть дня, то для опредѣленія y получимъ ур-ніе $17y - \frac{3}{4} + \frac{29}{2}y$, откуда $y = 0,3$; слѣд. вторая встрѣча имѣла мѣсто въ концѣ 19^а, 3.

735. Задача. III. Въ двухъ арифметическихъ прогрессіяхъ

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 \dots \text{ и } \div 3 . 7 . 11 . 15 \dots$$

закрывающихся, каждая, по 100 членовъ, сколько находится общихъ членовъ?

Членъ порядка x въ первой прогрессіи есть $2 + 3(x - 1)$, или $3x - 1$; членъ порядка y во второй равенъ $3 + 4(y - 1)$, или $4y - 1$; чтобы эти члены были равны, необходимо, чтобы было $3x = 4y$. Вопросъ приводится къ нахожденію цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, меньшихъ 100, удовлетворяющихъ неопредѣленному ур-нію $3x = 4y$. Выводя изъ него x , находимъ $x = y + \frac{1}{3}y$; слѣд. $\frac{y}{3}$ должны равняться нѣкоторому цѣлому k , откуда $y = 3k$, и слѣд. $x = 4k$. Но какъ x должно быть не болѣе 100, то k можетъ получать только значенія: 1, 2, 3, ..., 25. заключаемъ, что обѣ прогрессіи содержатъ 25 общихъ членовъ.

736. Задача IV. Найти условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы три данныя числа А, В, С были членами порядка m, p, q одной и той же арифметической прогрессіи.

Обозначая буквами x и y первый членъ и разность прогрессіи, о которой говорится въ условіи, необходимо и достаточно, чтобы ур-нія

$$A = x + (m - 1)y, \quad B = x + (p - 1)y, \quad C = x + (q - 1)y$$

удовлетворялись одними и тѣми же значеніями x и y ; другими словами, искомое условіе есть результатъ исключенія x и y изъ этихъ трехъ ур-ній. Имѣемъ

$$A - B = (m - p)y, \quad B - C = (p - q)y,$$

и исключивъ y , найдемъ

$$(A - B)(p - q) = (B - C)(m - p), \text{ или } (p - q)A + (q - m)B + (m - p)C = 0;$$

это и есть искомое условіе.

737. ЗАДАЧА V.—Найти сумму одинаковых степеней членов арифметической прогрессии.

Пусть имеем прогрессию a, b, c, d, \dots, k, l , разность которой $=\delta$, а число членов $n+1$, и пусть требуется найти сумму m -х степеней ее членов.— По свойству прогрессии имеем:

$$b = a + \delta, \quad c = b + \delta, \quad d = c + \delta, \dots, l = k + \delta.$$

Возводя все эти равенства в $m+1$ -ю степень, по формуле бинома Ньютона имеем:

$$\begin{aligned} b^{m+1} &= (a + \delta)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m\delta + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} a^{m-1}\delta^2 + \\ &\quad + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-2}\delta^3 + \dots + \delta^{m+1} \\ c^{m+1} &= (b + \delta)^{m+1} = b^{m+1} + (m+1)b^m\delta + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} b^{m-1}\delta^2 + \\ &\quad + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^{m-2}\delta^3 + \dots + \delta^{m+1} \\ d^{m+1} &= (c + \delta)^{m+1} = c^{m+1} + (m+1)c^m\delta + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} c^{m-1}\delta^2 + \\ &\quad + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^{m-2}\delta^3 + \dots + \delta^{m+1} \\ &\dots \dots \dots \\ l^{m+1} &= (k + \delta)^{m+1} = k^{m+1} + (m+1)k^m\delta + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} k^{m-1}\delta^2 + \\ &\quad + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^{m-2}\delta^3 + \dots + \delta^{m+1} \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, замечая при этом, что члены $b^{m+1}, c^{m+1}, d^{m+1}, \dots, k^{m+1}$ общие соседним частям, взаимно уничтожаются, и полагая для краткости

$$\begin{aligned} a^m + b^m + c^m + \dots + k^m &= S_m; \quad a^{m+1} + b^{m+1} + \dots + l^{m+1} = S_{m+1}; \\ a^{m-2} + b^{m-2} + \dots + k^{m-2} &= S_{m-2}, \dots; \quad a + b + c + \dots + k = S_1, \end{aligned}$$

найдемъ

$$\begin{aligned} l^{m+1} &= a^{m+1} + (m+1)\delta \cdot S_m + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} \delta^2 \cdot S_{m-1} + \\ &\quad + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta^3 \cdot S_{m-2} + \dots + (m+1)\delta \cdot S_1 + n\delta^{m+1} \dots (1) \end{aligned}$$

Выражая отсюда S_m , находимъ:

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{l^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\delta} - \frac{m}{2} \cdot \delta \cdot S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3} \delta^2 \cdot S_{m-2} - \\ &\quad - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \delta^3 \cdot S_{m-3} - \dots - S_1 - \frac{n}{m+1} \delta \dots (2). \end{aligned}$$

Помощью этой формулы можно найти S_m , если будутъ известны суммы $S_{m-1}, S_{m-2}, \dots, S_1$. Прилагая эту формулу, нужно помнить, что число членов второй части равно $m+1$.

S_1 есть сумма членов самой прогрессии и выражение ее известно. Зная S_1 и полагая $m=2$, найдемъ S_2 . Зная S_1 и S_2 , и полагая $m=3$, найдемъ S_3 , и т. д.

Сумма одинаковых степеней натурального ряда. — Положив $a = 1$, $\varepsilon = 1$, $l = n + 1$, обратим нашу прогрессию въ рядъ первыхъ $n + 1$ натуральныхъ чиселъ: $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot (n + 1)$. Въ этомъ рядѣ будетъ

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m; \quad S_{m-1} = 1^{m-1} + 2^{m-1} + 3^{m-1} + \dots + n^{m-1};$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2; \quad S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Формула (2) приметъ видъ

$$S_m = \frac{(n+1)^{m+1} - 1}{(m+1)} - \frac{m}{2} \cdot S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3} \cdot S_{m-2} -$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} S_{m-3} - \dots - S_1 - \frac{n}{m+1} \dots (3).$$

1 Положивъ $m = 1$, и замѣтивъ, что рядъ будетъ имѣть 2 члена, получимъ:

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{1}{2} \cdot S_0. \text{ Но } S_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n;$$

слѣдовательно

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{(n+1)}{2} - \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}. \quad (A)$$

результатъ, найденный нами въ § 728.

2. Положивъ $m = 2$, находимъ:

$$S_2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - S_1 - \frac{1}{3} \cdot S_0. \text{ Подставляя величины, найденныя для } S_0 \text{ и } S_1,$$

получимъ

$$S_2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3} - \frac{(n+1)n}{2} - \frac{n}{3} = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)}{3} - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)^2 - 1]}{3}$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \dots (B)$$

Такое выраженіе суммы квадратовъ первыхъ n натуральныхъ чиселъ, извѣстное подъ именемъ *формулы Архимеда*.

3. Положивъ $m = 3$, найдемъ:

$$S_3 = \frac{(n+1)^4 - 1}{4} - \frac{3}{2} S_2 - S_1 - \frac{1}{4} S_0. \text{ Подставляя выраженія, найденныя для } S_2, S_1, S_0, \text{ получимъ:}$$

$$S_3 = \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{1}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{2n(n+1)}{4} - \frac{n}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{(n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n}{4} = \frac{(n+1)[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n]}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)^3 - (2n+1)(n+1)]}{4} - \frac{(n+1)(n+1)[n^2 + 2n + 1 - 2n - 1]}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} =$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = S_1^2 \dots (C).$$

Такимъ образомъ: *сумма кубовъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ равна квадрату суммы этихъ же чиселъ.*

4. Подобнымъ образомъ нашли бы

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \dots (D)$$

$$S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \dots (E)$$

и т. д.

738. Предѣлъ S_{m+1}^{m+1} (формула Шлеммизга).— Положивъ въ равенствѣ (1) $a=1$, $\delta=1$, $l=n$, имѣемъ:

$$n^{m+1} = 1 + (m+1)S_m + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} \cdot S_{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} S_{m-2} + \dots + (m+1)S_1 + n.$$

Если бы перенесли всѣ члены, исключая второго, въ первую часть, то явля бы въ ней полиномъ $m+1$ -й степени относительно n , такъ что сумма S_m m -хъ степеней первыхъ n чиселъ есть цѣлая функция $m+1$ й степени стности n , разсматриваемая какъ переменное. Такимъ образомъ, полиномы S_{m-1} , S_{m-2} . . . суть функции отъ n степени m -й, $m-1$ -й, . . . Слѣд., раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на n^{m+1} , замѣтимъ, что всѣ дроби

$$\frac{S_{m-1}}{n^{m+1}}, \frac{S_{m-2}}{n^m}, \frac{S_{m-3}}{n^{m-1}}, \dots$$

обратятся въ нуль при $n \rightarrow \infty$, ибо степень числителя отн. n каждой изъ нихъ ниже степени знаменателя.

Значить, въ предѣлѣ, при $n = \infty$, равенство дастъ

$$1 = (m+1) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_m}{n^{m+1}}, \text{ откуда } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

Напр., по этой теоремѣ имѣемъ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_4}{n^5} = \frac{1}{5}$, и т. д.

739. Приложение I.— *Вычисленіе кучъ ядеръ.* Въ настоящее время въ артиллеріи употребляются ядра двухъ родовъ сферическія — для гладкихъ орудій, и цилиндрико-коническія — для наръзныхъ. Тѣ и другія складываютъ въ арсеналахъ въ кучи различныхъ формъ; займемся вычисленіемъ числа ядеръ, заключающихся въ такихъ кучахъ.

1. *Опредѣлить число ядеръ пирамидальной кучи съ квадратнымъ основаніемъ.*— Сферическія ядра въ этого рода кучахъ складываютъ слѣдующимъ образомъ. На землѣ кладутъ ядра рядами, образующими квадратный слой, въ каждой сторонѣ котораго n ядеръ; на немъ помѣщаютъ въ промежуткахъ между ядрами другой квадратный слой, содержащій $n-1$ ядеръ въ каждой своей сторонѣ, и т. д. до верхняго слоя, въ которомъ находится одно ядро. Такимъ образомъ число ядеръ въ кучѣ будетъ =

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2,$$

т. е. суммѣ квадратовъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ, или, по формулѣ (B):

$$X = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \dots (a).$$

Усѣченная квадратная пирамида. — Если съ этой кучи снять нѣсколько ядеръ, взявъ сперва верхнее ядро, затѣмъ ядра (4) слѣдующаго слоя и т. д., то если снято будетъ p слоевъ, получится квадратная усѣченная пирамида, въ основаніи которой n^2 ядеръ, а въ верхнемъ слой $(p+1)^2$. Число снятыхъ ядеръ получится изъ (a), гдѣ надо n замѣнить буквою p . Число ядеръ оставшихся

$$X' = \frac{n(n+1)(2n+1) - p(p+1)(2p+1)}{6} = \frac{(n-p)[2p^2 + p(2n+3) + (n+1)(2n+1)]}{6}.$$

Положивъ $p=0$, найдемъ формулу (а).

П. *Найти число ядеръ пирамиды съ треугольнымъ основанием.* — Основаніемъ кучи служитъ равносторонній Δ ; въ прочежутья его положены ядра, образующія другой равносторонній Δ , котораго каждая сторона содержитъ однимъ ядромъ меньше, и т. д.; наконецъ, верхній слой состоитъ изъ одного ядра.

Пусть нижній слой содержитъ въ каждой сторонѣ n ядеръ; онъ будетъ состоять изъ n рядовъ, изъ которыхъ въ первомъ будетъ 1 ядро, во второмъ 2, въ третьемъ 3 . . . , въ n -мъ n ядеръ. Следоват. число всѣхъ ядеръ нижняго слоя $= 1 + 2 + 3 + \dots + n$, или, по формулѣ (А), $\frac{n(n+1)}{2}$, или $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. Полагая въ этой формулѣ n послѣдовательно равнымъ 1, 2, 3, . . . , n , найдемъ:

$$\text{число ядеръ 1-го слоя} = \frac{1}{2} + \frac{1^2}{2}$$

$$\text{„ „ 2-го „} = \frac{2}{2} + \frac{2^2}{2}$$

$$\text{„ „ 3-го „} = \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2}$$

.....

$$\text{„ „ } n\text{-го „} = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}; \text{ слѣд. число всѣхъ ядеръ кучи}$$

$$Y = \frac{1}{2}(1 + 2 + 3 + \dots + n) + \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2);$$

или, по формуламъ (А) и (В):

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \dots (\beta).$$

Усѣченная треугольная куча. — Снявъ p слоевъ сверху, получимъ усѣченную треугольную пирамиду, содержащую въ верхнемъ ребрѣ $(p+1)$ ядро. По формулѣ (β) найдемъ число ядеръ въ ней

$$Y' = \frac{(n-p)[p^2 + p(n-3) + (n+1)(n+2)]}{6}.$$

III. *Найти число ядеръ кучи съ прямоугольнымъ основанием.* — Пусть меньшая сторона основанія содержитъ n ядеръ, большая $n+p$. Замѣтимъ, что число ядеръ въ пзмѣренныхъ слоевъ будетъ всегда уменьшаться на 1, при переходѣ отъ одного слоя къ другому. Слѣд. разность между числами шаровъ въ двухъ сторонахъ каждаго слоя всегда будетъ p . Верхній слой состоитъ изъ одного ряда, имѣющаго $p+1$ ядро.

Число ядеръ нижняго слоя будетъ

$$n(n+p), \quad \text{или} \quad n^2 + pn.$$

Полагая n послѣдовательно равнымъ 1, 2, 3, . . . , n , найдемъ числа ядеръ во всѣхъ слояхъ:

$$1^2 + p \cdot 1$$

$$2^2 + p \cdot 2$$

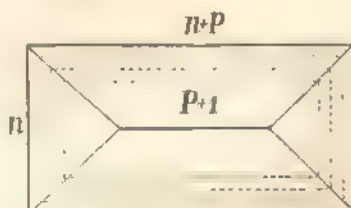
$$3^2 + p \cdot 3$$

.....

.....

$$(n-1)^2 + p(n-1)$$

$$n^2 + p \cdot n;$$



Черт. 153.

след. число всех ядер кучи

$$Z = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) + p(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n),$$

или

$$Z = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + p \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6} \dots (7)$$

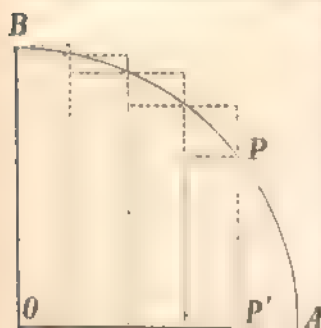
Обыкновенно дают число ядер сторон основания; пусть $n + p = m$, формула примет вид

$$Z = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

IV. *Куча цилиндроконических ядер* — В основании кучи находится прямоугольник, в одной стороне которого (меньшей) n ядер, в другой p . В виду формы ядер, над этим основанием можно расположить прямоугольный слой с p ядрами в одной стороне, $(n-1)$ в другой, и т. д. Число U ядер будет:

$$U = pn + p(n-1) + p(n-2) + \dots + p \cdot 2 + p \cdot 1 + p \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

740. Приложение II. — *Определение объема шара и его частей*. — Рассмотрим



Черт. 154.

шаров. слой, которого одна половина пусть будет с большим кругом, такой слой мы получим, взяв на дуге АВ произвольную точку Р, спустив из нее перпендикуляр РР' на радиус ОА и заставив фигуру ОВРР' сделать полный оборот около ОА, как оси. Разделим ОР = h на произвольное число n равных частей, из точек деления проведем перпендикуляры к ОА до встречи с дугою, и на каждой из них и на отрезках построим прямоугольники: получим ряд описанных и ряд вписанных прямоугольников. При обращении фигуры около ОА, перпендикуляры образуют тело, состоящее из n цилиндров, объем которого будет ближе объема слоя, второе с — ставить тело, которого объем меньше слоя.

Для вычисления объемов обоих тел, описанного и вписанного, обозначим радиус шара буквою R. Радиусы оснований описанных цилиндров будут:

$$R, \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2}, \sqrt{R^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2}, \sqrt{R^2 - \left(\frac{3h}{n}\right)^2}, \dots, \sqrt{R^2 - \left[\frac{(n-1)h}{n}\right]^2}.$$

Радиусы оснований вписанных цилиндров будут:

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2}, \sqrt{R^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2}, \sqrt{R^2 - \left(\frac{3h}{n}\right)^2}, \dots, \sqrt{R^2 - \left(\frac{nh}{n}\right)^2}.$$

Объем описанного тела будет:

$$W = \pi R^2 \cdot \frac{h}{n} + \pi \left[R^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} + \pi \left[R^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} + \dots + \pi \left[R^2 - \left[\frac{(n-1)h}{n}\right]^2 \right] \cdot \frac{h}{n},$$

или, в виду того, что числом слагаемых есть n :

$$W = \pi R^2 h - \pi \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} \cdot h^3.$$

Для объема вписанного тела таким же образом найдем:

$$w = \left[R^2 - \left(\frac{h}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} + \left[R^2 - \left(\frac{2h}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} + \left[R^2 - \left(\frac{3h}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} + \dots + \left[R^2 - \left(\frac{nh}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n},$$

или
$$w = \pi R^2 h - \pi \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} \cdot h^3.$$

Отсюда находим; $W - w = \frac{1}{n} \cdot h^3$, слѣд. при неограниченномъ увеличеніи n разность между обѣими объемами м. б. сдѣлана безконечно малюю; а потому, на основ. Теоремы I, § 183, заключаемъ, что объемъ слоя есть общій предѣлъ переменныхъ W и w . Итакъ, назвавъ объемъ слоя буквою U , имѣемъ

$$U = \lim \left\{ \pi R^2 h - \pi \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} \cdot h^3 \right\}.$$

Такъ какъ первый членъ $\pi R^2 h$ есть величина постоянная, то задача сводится къ опредѣленію $\lim \left[\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right]_{n \rightarrow \infty}$, который, какъ извѣстно равенъ $\frac{1}{3}$.

Итакъ:
$$U = \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h^3 = \pi h \left[R^2 - \frac{h^2}{3} \right] \dots (1).$$

При помощи этой формулы можно опредѣлить и объемъ такого слоя, котораго ни ось, ни основаніе не есть большой кругъ. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ центра описаннаго перпендикуляры h и h' на основаніи такого слоя, то, полагая $h > h'$, можемъ разсматривать данный слой U какъ разность двухъ слоевъ перваго рода; поэтому

$$U' = \pi \left[R^2 - \frac{1}{3} h'^2 \right] h' - \pi \left[R^2 - \frac{1}{3} h^2 \right] h'',$$

что легко привести (введя радиусы оснований и высоту слоя) къ обыкновенной формулѣ объема слоя

Если въ формулѣ (1) положимъ $h=R$, найдемъ объемъ полушара $U' = \frac{2}{3} \pi R^3$, а отсюда объемъ цѣлаго шара: $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Вычтя изъ объема полушара объемъ слоя (1), найдемъ объемъ сферическаго сегмента: $\frac{2}{3} \pi R^3 - \pi \left[R^2 - \frac{1}{3} h^2 \right] h \dots (2)$. Отсюда получимъ обыкновенно даваемую въ геометріи формулу объема сегмента, если введемъ его высоту $H=R-h$ отсюда $h=R-H$, а подставивъ во (2), найдемъ $\pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right)$.

Для вычисленія объема шароваго сектора, разсматриваемъ его какъ сумму сегмента и конуса: назвавъ высоту сегмента буквою H , находимъ для высоты конуса $R-H$, а для радиуса его основанія $\sqrt{R^2 - (R-H)^2}$, такъ что объемъ сектора будетъ $= \pi R - \frac{H}{3} \left[H^2 + \frac{2}{3} R^2 - (R-H)^2 \right] (R-H)$, или, по упрощеніи, $\frac{2}{3} \pi R^2 H$.

Такимъ образомъ формула (1) рѣшаетъ вполне вопросъ о вычисленіи объемовъ шара и его частей.

ГЛАВА XLVI.

Прогрессія геометрическая.—Общій членъ.—Вставка среднихъ геометрическихъ.—Сумма членовъ конечной прогрессіи. Леммы о степеняхъ и корняхъ. Суммирование безконечныхъ геометрическихъ прогрессій.

741. Опредѣленіе.—*Геометрической прогрессіей* наз. рядъ чиселъ. изъ которыхъ каждое равно предыдущему, умноженному на постоянное количество, называемое *знаменателемъ прогрессіи*. Когда абсолютная величина членовъ идетъ увеличиваясь, прогрессія называется *возрастающею*; если же абсолютная величина членовъ идетъ убывая, прогрессія наз. *убывающею*. Очевидно, въ возрастающей прогрессіи абсолютная величина знаменателя больше 1, въ убывающей она меньше единицы. Для полученія знаменателя прогрессіи надо какой-нибудь членъ раздѣлить на предыдущій. Слово прогрессія обозначается знаком \div ; между членами прогрессіи ставятъ знак $:$. Такъ,

$\div 2 : 6 : 18 : 54 : \dots$ есть возрастающая прогр. съ знаменателемъ 3;

$\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \dots$ есть убывающая прогрессія съ знаменателемъ $\frac{1}{3}$.

Общій видъ геометрической прогрессіи будетъ

$$\div a : b : c : d : \dots r : t : u : \dots (1)$$

знаменатель обыкновенно обозначаютъ буквою q .

Каждые три смежныя члена прогрессіи составляютъ непрерывную краткую пропорцію. Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію геометрической прогрессіи: $c = bq$ и $d = cq$, откуда, раздѣливъ первое равенство на второе, имѣемъ $c : d = b : c$.

742. Теорема. Общій (n-й) членъ.—Пусть въ прогрессіи (1) § 741 членъ u будетъ n -й; по опредѣленію прогрессіи, имѣемъ:

$$b = aq, \quad c = bq, \quad d = cq, \quad \dots, \quad t = rq, \quad u = tq.$$

Перемножая почленно эти $(n-1)$ равенствъ и сокращая обѣ части на $b \cdot c \cdot \dots \cdot t$, найдемъ

$$u = aq^{n-1},$$

т.е. *каждый членъ прогрессіи равенъ первому, помноженному на знаменателя прогрессіи въ степени числа предшествующихъ членовъ.*

Такъ, найдемъ, что 9-й чл. прогрессіи $\div 1 : 3 : 9 : 27 : \dots$ будетъ $= 1 \times 3^8$, или 6561. Восьмой членъ $\div 3 : \frac{3}{2} : \dots$ равенъ $3 \times (\frac{1}{2})^7 = \frac{3}{128}$.

743. Задача. *Найти условіе, при которомъ три данныя числа А, В, С представляютъ члены порядковъ m , n , p одной и той же геометрической прогрессіи?*

Обозначивъ первый членъ этой прогрессіи буквою x , а знаменателя буквою y , имѣемъ ur —я

$$A = xy^{m-1}, \quad B = xy^{n-1}, \quad C = xy^{p-1}.$$

Три ур—нія вообще не могут быть удовлетворены одними и теми же значениями x и y ; поэтому, чтобы найти искомое условие, нужно выразить, что существует общее этимъ ур—нмъ рѣшеніе, т.-е. *исключить* x и y . Для исключения x дѣлимъ почленно первое ур. на второе, а второе на третье:

$$\frac{A}{B} = y^{m-n}, \quad \frac{B}{C} = y^{n-p}.$$

Возвышая первое изъ этихъ ур—ній въ степень $n-p$, а второе въ степень $m-n$, имѣемъ:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{n-p} = y^{(m-n)(n-p)}, \quad \left(\frac{B}{C}\right)^{m-n} = y^{(m-n)(n-p)},$$

откуда

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{n-p} = \left(\frac{B}{C}\right)^{m-n}, \quad \text{или } A^{n-p} \times B^{p-m} \times C^{m-n} = 1:$$

это и есть требуемое условие.

744. Вставка среднихъ геометрическихъ между двумя данными числами.

Вставить m среднихъ геометрическихъ или пропорціональныхъ между двумя данными числами a и b значитъ найти m такихъ чиселъ, которыя между собою и съ данными составляли бы геометрическую прогрессию. Пусть q будетъ неизвѣстный знаменатель этой прогрессіи; послѣднему члену b предшествуетъ $m+1$ членъ, а потому

$$b = aq^{m+1}, \quad \text{откуда } q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Такимъ образомъ искомая прогрессія будетъ

$$\therefore a : a \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a \sqrt[m+1]{\frac{b^2}{a^2}} : a \sqrt[m+1]{\frac{b^3}{a^3}} : \dots : b.$$

Примѣръ Вставить 3 среднихъ геометрич. между 4 и 64. Знаменатель $q = \sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$; искомыя средніе члены суть: 4×2 , 4×2^2 и 4×2^3 , или 8, 16 и 32.

745. ТЕОРЕМА.—*Если между послѣдовательными членами геометрической прогрессіи вставить одинаковое число среднихъ, то полученныя частныя прогрессіи составятъ одну сплошную прогрессию.*

Пусть данная прогрессія будетъ $\therefore a : b : c : \dots : r : t : u$, и пусть между каждыми двумя послѣдовательными членами вставлено m среднихъ геометрическихъ; отдѣльныя прогрессіи $\therefore a : \alpha : \beta : \dots : \lambda : b$; $\therefore b : \alpha' : \beta' : \dots : \lambda' : c$; $\therefore c : t : \alpha^{(n)} : \dots : \lambda^{(n)} : u$ имѣютъ соответственно знаменатели

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \quad \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}, \quad \dots, \quad \sqrt[m+1]{\frac{u}{t}};$$

по $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \dots = \frac{u}{t} = q$, гдѣ q —знаменатель данной прогрессіи; слѣд. всѣ эти прогрессіи имѣютъ общаго знаменателя; и какъ послѣдній членъ одной слу-

жить первым членом следующей, то всё прогрессии въ совокупности составляютъ одну сплошную прогрессию.

746. Теорема.— *Во всякой геометрической прогрессии произведение крайних членовъ равно произведению двухъ другихъ, равно удаленныхъ отъ крайнихъ.*

Пусть въ прогрессии $\div a : b : \dots : x : \dots : y : \dots : t : u$ члену x предшествуетъ и за членомъ y слѣдуетъ p членовъ; въ такомъ случаѣ: $x = aq^p$. . . (1). Въ прогрессии, начинающейся членомъ y и кончающейся членомъ u , имѣемъ $u = yq^p$, откуда $y = \frac{u}{q^p}$. . . (2). Перемноживъ (1) и (2) даетъ $xu = au$, что и т. д.

747. Сумма членовъ конечной геометрической прогрессии.

Пусть дана прогрессия $\div a : b : c : d : \dots : r : t : u$, содержащая n членовъ, съ знаменателемъ q ; сумму членовъ назовемъ S . По свойству геом. прогр. имѣемъ

$$b = aq, \quad c = bq, \quad d = cq, \quad \dots, \quad t = rq, \quad u = tq.$$

Складывая почленно эти равенства, находимъ:

$$b + c + d + \dots + t + u = (a + b + c + \dots + r + t)q.$$

Первая часть этого равенства есть сумма S безъ перваго члена a , т.-е. $S - a$, выраженіе въ скобкахъ есть сумма членовъ безъ послѣдняго, т.-е. $S - u$; слѣд. равенству можно дать видъ

$$S - a = (S - u)q \quad \text{или} \quad S - a = Sq - uq;$$

рѣшивъ это ур. относительно S , найдемъ

$$S = \frac{uq - a}{q - 1} \dots (1),$$

т.-е. чтобы найти сумму членовъ геометрической прогрессии, нужно: послѣдній членъ умножить на знаменателя, изъ произведенія вычесть первый членъ, и раздѣлить остатокъ на разность между знаменателемъ и единицей.

Если въ формулѣ (1) замѣнить u его величиною aq^{n-1} , то S приметъ видъ

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \dots (2)$$

Въ этой формѣ справедливость формулы очевидна; въ самомъ дѣлѣ, по закону частнаго отъ дѣленія $x^n - a^n$ на $x - a$, имѣемъ

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1,$$

а умноживъ обѣ части на a , найдемъ въ первой части формулу (2), а во второй: $a + aq + \dots + aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1}$; но эта сумма есть ничто иное какъ сумма членовъ самой прогрессии.

Другой приемъ. Называя сумму членовъ прогрессіи буквою S , имѣемъ

$$S = a + b + c + \dots + r + t + u \dots (3)$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на q , находимъ:

$$Sq = aq + bq + cq + \dots + rq + tq + uq \dots (4)$$

Но, по опредѣленію прогрессіи, $b = aq$, $c = bq$, \dots , $t = rq$, $u = tq$; слѣд. (3) можно написать въ видѣ:

$$S = a + aq + bq + \dots + rq + tq \dots (5)$$

Вычитая (5) изъ (4) замѣчаемъ, что всѣ члены уничтожаются, за исключеніемъ члена uq въ (4) и a въ (5); такъ что

$$Sq - S = uq - a, \text{ или } S(q - 1) = uq - a,$$

откуда

$$S = \frac{uq - a}{q - 1}.$$

Примѣры: I. *Найти сумму 6 членовъ прогрессіи, которой первый членъ = 7, а послѣдній 700000?*

Знаменатель q опредѣляется изъ уравненія $700000 = 7 \cdot q^5$, откуда $q = 10$; слѣд.

$$S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 7 \cdot \frac{10^6 - 1}{10 - 1} = 7 \cdot \frac{1000000 - 1}{10 - 1} = 7 \cdot \frac{999999}{9} = 777777.$$

II. *Найти сумму 10 первыхъ членовъ геометрической прогрессіи, которой первый членъ = $\frac{1}{2}$, а знаменатель $\frac{1}{10}$?*

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{10} - 1}, \text{ или, помноживъ числителя и знам. на } (-10^{10});$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{10} - 1}{10^{10} - 1} = \frac{1}{2} \cdot 1, 111 \dots 111 = 0, 555 \dots 555.$$

Безконечныя геометрическія прогрессіи.

748. Изученіе безконечныхъ геометрическихъ прогрессій требуетъ предварительнаго доказательства слѣдующихъ теоремъ о степеняхъ; къ нимъ присоединяемъ и соответственныя теоремы о корняхъ.

749. Лемма I. *Послѣдовательныя цѣлыя положительныя степени положительнаго числа, большаго 1, возрастаютъ съ увеличеніемъ показателя и могутъ быть сдѣланы больше всякой данной величины.*

Пусть будетъ $a > 1$; смыслъ неравенства не измѣнится отъ умноженія неравенства на положительное число; такимъ образомъ послѣдовательно найдемъ:

$$a^2 > a, a^3 > a^2, a^4 > a^3 \text{ и т. д., вообще } a^{m+1} > a^m;$$

откуда видно, что степени въ самомъ дѣлѣ возрастаютъ съ увеличеніемъ показателя. Но если доказано, что количество идетъ возрастаая, то отсюда еще нельзя заключить, что оно можетъ быть сдѣлано какъ угодно большимъ: это еще должно быть доказано. Очевидно, будетъ доказано, что a^m м. б. сдѣлано какъ угодно большимъ, если докажемъ, что для показателя m всегда можно найти такую величину, при которой будетъ $a^m > K$, гдѣ K — заданное количество. Пусть a превышаетъ единицу на α , т.-е. $a = 1 + \alpha$. Такъ какъ $\alpha > 1$, то умноженіе на a поведетъ къ увеличенію, и получится рядъ неравенствъ

$$\begin{aligned} a - 1 &= \alpha \\ a^2 - a &> \alpha \\ a^3 - a^2 &> \alpha \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ a^{m-1} - a^{m-2} &> \alpha \\ a^m - a^{m-1} &> \alpha, \end{aligned}$$

откуда, складывая, найдемъ

$$a^m - 1 > \alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha + \alpha, \text{ или } a^m - 1 > m\alpha,$$

откуда

$$a^m > 1 + m\alpha.$$

Очевидно отсюда, что a^m будетъ больше K , если будетъ

$$1 + m\alpha > K,$$

откуда

$$m > \frac{K-1}{\alpha};$$

по очевидно, что каково бы ни было a , всегда можно найти для m такое значеніе, которое будетъ больше $\frac{K-1}{\alpha}$.

Примѣръ. При какомъ значеніи m количество $(1,001)^m$ будетъ больше 1000?

$$\text{При } m > \frac{1000-1}{0,001}, \text{ т.-е. при } m > 999000.$$

750. Лемма II *Последовательныя цѣлыя положительныя степени числа a , меньшаго 1, идутъ уменьшаяся съ увеличеніемъ показателя и могутъ быть сдѣланы какъ угодно близкими къ нулю.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства $a < 1$, получаемъ: $a^2 < a$, $a^3 < a^2, \dots$, $a^{m+1} < a^m$, т.-е. степени становятся тѣмъ меньше, чѣмъ показатель больше. Затѣмъ, число меньшее 1 можно представить въ видѣ $\frac{1}{1+\alpha}$; желая опредѣлить степень, въ которую нужно возвысить $\frac{1}{1+\alpha}$, чтобы эта степень была меньше заданнаго числа δ , полагаемъ

$$\frac{1}{(1+\alpha)^m} < \delta, \text{ откуда } (1+\alpha)^m > \frac{1}{\delta},$$

а по предыдущей леммѣ, это неравенство всегда м. б. удовлетворено.

751. Лемма III. Корни целого положительнаго порядка из числа большаго 1 уменьшаются съ возрастаниемъ показателя и могутъ быть сдѣланы какъ угодно близкими къ 1, оставаясь, однако же, всегда большими 1, и никогда не дѣлаясь равными ей или меньшими ея.

Пусть $a > 1$; надо доказать, что

$$1. \sqrt[m]{a} < \sqrt{a}; \sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a}; \sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a}; \dots; \sqrt[m-1]{a} < \sqrt[m]{a}.$$

$$2. \sqrt[m]{a} \text{ не можетъ быть ни } =, \text{ ни } < 1.$$

$$3. \text{Разность } \sqrt[m]{a} - 1 \text{ м. б. сдѣлана } < \text{всякой, какъ угодно малой, величины.}$$

Для доказательства первой части теоремы приведемъ корни $\sqrt[m+1]{a}$ и $\sqrt[m]{a}$ къ общему показателю: найдемъ: $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m(m-1)]{a^{m-1}}$, и $\sqrt[m-1]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^m}$. По первой леммѣ, $a^{m+1} > a^m$, а слѣд. и $\sqrt[m(m+1)]{a^m} > \sqrt[m(m-1)]{a^{m-1}}$ или $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m+1]{a}$.

Затѣмъ, положивъ $\sqrt[m]{a} = 1$ и возвысивъ обѣ части въ m -ую степень, нашли бы $a = 1$, что противно условію $a > 1$. Допустимъ, что $\sqrt[m]{a} < 1$, нашли бы такіе же образомъ: $a < 1$, что опять противорѣчитъ условію. Итакъ, $\sqrt[m]{a} > 1$.

Докажемъ теперь, что для m всегда можно найти такое значеніе, при которомъ $\sqrt[m]{a}$ будетъ какъ угодно мало разниться отъ 1. Обозначивъ буквою δ очень малое положительное число, будемъ имѣть биномъ $1 + \delta$, весьма мало разнящійся отъ 1, но все-таки большій ей. Въ леммѣ I мы доказали, что всегда можно найти такое значеніе для m , при которомъ будетъ $(1 + \delta)^m > K$, гдѣ K какъ угодно велико; слѣд. какую бы величину ни имѣло a , всегда можно дать m значеніе, при которомъ будетъ $(1 + \delta)^m > a$, откуда $1 + \delta > \sqrt[m]{a}$. Съ другой стороны доказано, что $\sqrt[m]{a} > 1$, такъ что $\sqrt[m]{a}$ заключается между двумя количествами 1 и $1 + \delta$, разность между которыми δ м. б. какъ угодно малы; а потому и разность $\sqrt[m]{a} - 1$ тѣмъ болѣе м. б. сдѣлана какъ угодно малою.

752. Лемма IV. Корни целого положительнаго порядка изъ числа меньшаго 1 увеличиваются съ увеличеніемъ показателя, оставаясь всегда < 1 , къ которой они могутъ быть сдѣланы какъ угодно близкими.

Для доказательства, что $\sqrt[m+1]{a} > \sqrt[m]{a}$, приведемъ эти корни къ общему показателю; найдемъ: $\sqrt[m+1]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^m}$, $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m(m-1)]{a^{m-1}}$. Но $a < 1$, слѣд. $a^m > a^{m+1}$ (лем. II), а потому $\sqrt[m(m+1)]{a^m}$ или $\sqrt[m+1]{a}$ больше $\sqrt[m(m-1)]{a^{m-1}}$ или $\sqrt[m]{a}$: т.-е. корни увеличиваются съ увеличеніемъ показателя. Затѣмъ, допустимъ, что $\sqrt[m]{a} = 1$, нашли бы, что $a = 1$; допустимъ, что $\sqrt[m]{a} > 1$ нашли бы, что $a > 1$: тотъ и другой выводъ противорѣчитъ условію $a < 1$. Но, оставаясь всегда < 1 , $\sqrt[m]{a}$ м. б. сдѣланъ какъ угодно близкимъ къ 1. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ буквою δ какъ угодно малое положит. количество, будемъ имѣть: $1 - \delta < 1$. Поэтому можно выбрать для m такое значеніе, при которомъ, въ силу леммы II, будетъ $(1 - \delta)^m < a$, откуда $1 - \delta < \sqrt[m]{a}$, или $1 - \sqrt[m]{a} < \delta$, какъ бы δ ни было мало.

753. Теорема. Въ безконечно-возрастающей геометрической прогрессіи абсолютная величина членовъ приближается къ ∞ , а въ убывающей—къ 0.

Будемъ разсматривать абсолютныя величины членовъ прогрессии, (условившись обозначать абсол. значеніе количества x знакомъ $[x]$):

$$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \dots : aq^n : \dots$$

Пусть $[q]$ будетъ > 1 . Въ силу леммы I, съ приближеніемъ n къ ∞ , и $[q^n]$ приближается къ ∞ , поэтому для n всегда можетъ быть найдено такое значеніе, при которомъ будетъ $[q^n] > \left[\frac{A}{a}\right]$, гдѣ A какъ угодно большое число; а изъ этого неравенства: $[aq^n] > [A]$, т.-е. съ приближеніемъ n къ ∞ , абсолютная величина членовъ прогрессіи приближается къ ∞ .

Если, теперь, q будетъ положительно, то и q^n будетъ положительно, слѣд. при $a > 0$ всѣ члены прогрессіи положительны, а потому величина ихъ приближается къ $+\infty$; при $a < 0$, они отрицательны и приближаются къ $-\infty$.

Пусть, затѣмъ, будетъ $[q] < 1$; на основаніи леммы II, при возрастаніи n до ∞ , $[q^n]$ приближается къ 0, поэтому всегда можно дать n такое значеніе, что будетъ $[q^n] < \left[\frac{a}{A}\right]$, гдѣ A какъ угодно мало; а отсюда $[aq^n] < A$, т.-е. $[aq^n]$, съ приближеніемъ n къ ∞ , приближается къ 0.

Если, теперь, $q > 0$, то и $q^n > 0$, слѣд.: если $a > 0$, то члены прогрессіи приближаются къ 0, оставаясь положительными; при $a < 0$ они приближаются къ 0, будучи отрицательны.

754. ТЕОРЕМА. Сумма членовъ возрастающей прогрессіи, при неограниченномъ возрастаніи числа членовъ, приближается къ $\pm \infty$, а убывающей — къ постоянной величинѣ $\frac{a}{1-q}$.

Для суммы n членовъ мы имѣемъ формулу $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, которую можно представить въ видѣ

$$S = \frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1} \dots (1).$$

I. $q > 1$.—Первый членъ, какъ функція n , измѣняется съ измѣненіемъ числа членовъ, второй же, не содержа n , есть количество постоянное; измѣненіе суммы зависитъ, поэтому, отъ перваго члена. Мы доказали, что въ возрастающей прогрессіи съ положительнымъ знаменателемъ, величина aq^n , съ приближеніемъ n къ ∞ , приближается къ $+\infty$ при $a > 0$, и къ $-\infty$ при $a < 0$; а потому и первый членъ, знаменатель котораго конеченъ и положителенъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и S , приближается къ $+\infty$ при $a > 0$, и къ $-\infty$ при $a < 0$.

II. Если $q < 1$, то при $n = \infty$ количество aq^n , а сл. и $\frac{aq^n}{q-1}$ имѣетъ предѣломъ 0, а слѣд. сумма S имѣетъ предѣломъ $-\frac{a}{q-1}$ или $\frac{a}{1-q}$. Итакъ, при $q < 1$.

$$\lim S = \frac{a}{1-q},$$

т.-е. предѣлъ суммы членовъ безконечно-убывающей прогрессіи равенъ первому члену, дѣленному на 1 безъ знаменателя прогрессіи.

Это предложеніе можно доказать обратнымъ способомъ, раздѣливъ a на $1-q$: частное будетъ имѣть неограниченное число членовъ, ибо одночленъ не дѣлится

безъ остатка на многочленъ, а члены его будутъ слѣдовать закону геометрической прогрессіи. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\begin{array}{r} a \\ \cdot aq \\ \cdot aq^2 \\ \cdot aq^3 \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} 1-q \\ aq \\ aq^2 \\ aq^3 \dots \end{array}$$

III. Пусть $q = +1$. Взявъ конечную (объ n членахъ) прогрессію, имѣемъ: $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$; положивъ $q = +1$, найдемъ $S = \frac{0}{0}$.

Для раскрытія неопредѣленности, замѣчаемъ, что

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1), \text{ слѣд.}$$

$$S = \frac{a(q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)}{q - 1};$$

отсюда видно, что неопредѣленность — кажущаяся и зависитъ отъ присутствія въ числ. и знамен. общаго множителя $q - 1$, обращающагося въ 0 при $q = 1$. Сокративъ на $q - 1$, и положивъ потомъ $q = 1$, получимъ:

$$S = a \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ разъ}} = an.$$

Этотъ результатъ можно было предвидѣть; въ самомъ дѣлѣ, при $q = 1$ сумма $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$ обращается въ $a + a + a + \dots + a$, или въ an .

Если, теперь, положить $n = \infty$, то будетъ: $S = a \cdot \infty$, т.-е. $S = +\infty$ при $a > 0$, и $S = -\infty$ при $a < 0$.

IV. q — отрицательное. — Если въ равенствѣ

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

перемѣнить q на $-q$, отъ чего только нечетныя степени q перемѣняютъ знакъ, то получится выраженіе для суммы прогрессіи съ отрицательнымъ знаменателемъ:

$$a - aq + aq^2 - aq^3 + \dots + aq^{n-1} = \frac{\pm aq^n - a}{-q - 1} = \mp \frac{aq^n}{q + 1} - \frac{a}{q + 1}.$$

Заключаемъ, что:

1) При q большеемъ 1, по абсолютной величинѣ, и при $n = \infty$ членъ $\mp \frac{aq^n}{q + 1} \rightarrow \pm \infty$, слѣд. и $S = \mp \infty$.

2) При $q < 1$, по абсолютной величинѣ, и при $n = \infty$, будетъ $aq^n = 0$, и слѣд. $S = \frac{a}{1 + q}$.

3) При $q = 1$, по абс. вел., $S = \mp \frac{a + a}{2}$, и слѣд. S равно или 0 (при четномъ числѣ членовъ) или a (при нечетномъ числѣ членовъ). Въ этомъ случаѣ прогрессія представляетъ *рядъ колеблющійся*.

755. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, относящихся къ геометрическимъ прогрессіямъ.

Такъ какъ между пятью количествами a , u , n , q , s фигурирующими во всякой геометрич. прогрессіи, существуетъ только 2 различныхъ соотношенія

$$u = aq^{n-1} \dots (1) \quad S = \frac{uq - a}{q - 1} \dots (2)$$

то, какъ скоро даны 3 изъ этихъ количествъ, остальные опредѣляются изъ указанныхъ ур-ній. Какъ и въ случаѣ арифметической прогрессіи, можно предложить здѣсь 10 задачъ, изъ которыхъ рѣшимъ только 2 слѣдующія:

Задача I. Вычислить a и u по даннымъ s , q и n .

Исключая u изъ ур-ній (1) и (2), находимъ:

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}, \quad \text{откуда} \quad a = S \times \frac{q - 1}{q^n - 1};$$

подставляя эту величину въ ур. (2), получаемъ:

$$u = S \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - 1} \cdot q^{n-1}.$$

Задача II. Вычислить q и s , зная a , u , n .

Изъ (1) находимъ:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}};$$

подстановка во (2) даетъ:

$$S = \frac{a \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} - 1} = \frac{a \sqrt[n-1]{u} - a \sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

Задача III. Найти генератрису данной періодической дроби.

1. Пусть чистая періодическая дробь $f = 0,3737 \dots$: ее можно представить въ видѣ

$$f = \frac{37}{100} + \frac{37}{100^2} + \frac{37}{100^3} + \dots$$

Слѣд. f есть предѣлъ суммы членовъ безконечно-убывающей геометрической прогрессіи, которой $q = \frac{1}{100}$ и $a = \frac{37}{100}$. Потому

$$f = \frac{\frac{37}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{37}{99};$$

результатъ, известный изъ арифметики.

2. Возьмемъ сѣшанную періодическую дробь $f = 0.32(745)$. Ее можно написать въ формѣ

$$f = \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 1000} + \frac{745}{100 \times 1000^2} + \frac{745}{100 \times 1000^3} + \dots$$

$$= \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 1000} \left[1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \dots \right].$$

Рядъ въ скобкахъ есть сумма членовъ безконечно-убывающей геометр. прогр., въ которой $a = 1$, $q = \frac{1}{1000}$; рядъ этотъ равенъ, слѣдовательно,

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1000}{999}; \text{ а потому}$$

$$f = \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 999} = \frac{32 \times 999 + 745}{1000 \times 999}.$$

Замѣнивъ въ числителѣ 999 разностью $1000 - 1$, находимъ

$$f = \frac{32000 + 32 - 745}{100 \times 999} = \frac{32745 - 32}{99900}.$$

откуда прямо слѣдуетъ извѣстное изъ ариметики правило.

Задача IV. Часовая и минутная стрѣлки показываютъ полдень. Въ которомъ часу встрѣтятся онѣ снова?

Примемъ за единицу времени часъ, а за 1 дѣиы окружность циферблата. Черезъ часъ минутная стрѣлка возвратится къ цифрѣ XII, а часовая пройдетъ $\frac{1}{12}$ циферблата; слѣд. минутная стрѣлка должна пройти эту $\frac{1}{12}$ циферблата, но въ это время часовая, движущаяся въ 12 разъ медленнѣе минутной, пройдетъ $\frac{1}{12}$ отъ $\frac{1}{12}$ циферблата, или $\frac{1}{12^2}$ его. Слѣд. минутная стрѣлка должна пройти эту послѣднюю долю циферблата, но въ теченіе этого времени часовая пройдетъ еще $\frac{1}{12^3}$; и т. д. Итакъ, минутная стрѣлка, чтобы догнать часовую, должна отъ полудня пройти путь: $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \dots$ представляющійся подъ видомъ безконечно-убывающей геом. прогрессіи, первый членъ которой $= 1$, а знаменатель $\frac{1}{12}$. Предѣлъ этой суммы есть $\frac{1}{1 - \frac{1}{12}}$, или $\frac{12}{11}$. Такъ какъ минутная

стрѣлка единицу пути (циферблатъ) проводитъ въ 1 часъ, то $\frac{12}{11}$ этого пути пройдетъ въ $1 \text{ ч.} \times \frac{12}{11} = 1 \text{ ч.} 5 \text{ ж.} 27 \frac{3}{11} \text{ с.}$

Задача V. Соединяя середины сторонъ квадрата, получаютъ вписанный квадратъ; въ этотъ квадратъ, соединяя середины его сторонъ, вписываютъ новый квадратъ, и т. д. Предполагая, что эта операція продолжается неограниченное число разъ, найти предѣлъ суммы площадей всѣхъ этихъ квадратовъ.

Пусть сторона данного квадрата будет a ; площади последовательных квадратов будутъ: $a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}, \dots$. Сумма ихъ будетъ

$$S = a^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right).$$

Пределъ суммы прогрессии въ скобкахъ $= \frac{1}{1-2} = 2$; слѣд. $S = 2a^2$.

Задача VI. Число 195 раздѣлить на 3 части, которыя составляли бы геометрическую прогрессию, которой третій членъ былъ бы больше перваго на 120.

Пусть первый членъ будетъ x , а знаменатель прогрессии q ; имѣемъ два уравненія

$$x + xq + xq^2 = 195, \quad xq^2 - x = 120,$$

которыя можно представить въ видѣ

$$x(1 + q + q^2) = 195, \quad x(q^2 - 1) = 120.$$

Раздѣливъ первое на второе, исключимъ x , и получимъ квадратное уравненіе $5q^2 - 8q - 21 = 0$, откуда: $q' = 3, \quad q'' = -\frac{7}{5}$. Подставляя вмѣсто q въ ур. $x(q^2 - 1) = 120$ сперва 3, потомъ $-\frac{7}{5}$, найдемъ: $x' = 15, \quad x'' = 125$. Искомыя рѣшенія будутъ:

$$\div 15 : 45 : 135; \quad \div 125 : -175 : +245.$$

ГЛАВА XLVII.

О рядахъ вообще; опредѣленія. Суммирование конечныхъ рядовъ. — Суммирование безконечныхъ рядовъ — О сходимости рядовъ — Перемноженіе рядовъ.

756. Опредѣленія. *Рядомъ* называется рядъ количествъ, изъ которыхъ каждое получается изъ предшествующаго по одному и тому же закону. Такъ, арифметическая прогрессія есть рядъ, законъ котораго состоитъ въ томъ, что каждое количество составляется изъ предшествующаго приложеніемъ къ нему постояннаго количества. Геометрическая прогрессія есть рядъ, законъ котораго состоитъ въ томъ, что каждый членъ образуется изъ предшествующаго умноженіемъ на постоянное количество.

Количества, составляющія рядъ, называются *членами* ряда; ихъ обозначаютъ въ общемъ видѣ такъ: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$. Членъ, которому предшествуетъ $n - 1$ членовъ, т.-е. n -ый членъ, u_n , называется *общимъ членомъ* ряда. Давая въ алгебраическомъ выраженіи общаго члена u_n буквы n значенія 1, 2, 3, ... получимъ последовательно всѣ члены ряда, начиная съ перваго.

Сумму n членовъ ряда обозначаютъ буквою S_n ; т. е.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n.$$

Рядъ называется *конечнымъ*, если онъ состоитъ изъ конечнаго числа членовъ; и *бесконечнымъ*, если число членовъ бесконечно. Если сумма n членовъ ряда, по мѣрѣ приближенія n къ ∞ , стремится къ опредѣленному конечному предѣлу S , то бесконечный рядъ называется *сходящимся*, а S его *суммою*; если же сумма S_n , по мѣрѣ приближенія n къ ∞ , сама приближается къ бесконечности, то бесконечный рядъ наз. *расходящимся*; само собою разумѣется, что о суммѣ такого ряда не можетъ быть и рѣчи. Можетъ, наконецъ, случиться, что по мѣрѣ приближенія n къ ∞ , сумма ряда не возрастаетъ до ∞ , но и не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу; такие ряды называютъ *полуходящими* или *колеблющимися*; ихъ причисляютъ къ расходящимся.

Такъ, мы видѣли, что бесконечная геометрическая прогрессія, которой знаменатель есть положительная или отрицательная правильная дробь $(-1 < q < +1)$,

имѣетъ конечную и опредѣленную сумму $\frac{a}{1-q}$; такая прогрессія представляетъ, поэтому, примѣръ *сходящагося* ряда. Если же знаменатель безк. геом. прогрессіи, по абсолютной величинѣ, больше 1, т. е. если $q > +1$, или $q < -1$, то сумма прогрессіи будетъ равна $\pm\infty$, и сл. прогрессія представляетъ въ этомъ случаѣ рядъ *расходящійся*. При $q = -1$, прогрессія также есть рядъ расходящійся. Наконецъ, если $q = +1$, то прогрессія беретъ видъ

$$\therefore a : -a : +a : -a : \dots$$

Сумма ея въ этомъ случаѣ равна или 0, или a , смотря по тому, беремъ ли четное, или нечетное число членовъ; такъ что, по мѣрѣ приближенія n къ ∞ , сумма членовъ не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу: однимъ словомъ, при $q = -1$, прогрессія есть рядъ *колеблющійся*.

Одинъ изъ важнѣйшихъ вопросовъ, представляющихся въ теоріи рядовъ, относится къ суммированію рядовъ. *Суммировать рядъ* значитъ найти сумму его членовъ, не вычисляя въ отдѣльности каждаго члена. Для рѣшенія этого вопроса не существуетъ общихъ правилъ, и сама задача возможна лишь въ исключительныхъ случаяхъ. Въ предшествующихъ главахъ мы имѣли примѣры суммированія членовъ арифметической и геометрической прогрессіи и одинаковыхъ степеней членовъ первой. Приводимъ еще нѣсколько примѣровъ.

757. Суммирование конечныхъ рядовъ.—Когда рядъ разлагается на прогрессіи, то формулы суммы прогрессій и дадутъ возможность суммировать рядъ.

Примѣръ I.—Найти сумму n членовъ ряда

$$6 + 66 + 666 + 6666 + 66666 + \dots$$

$$1\text{-й членъ} = 6 \times 1$$

$$2\text{-й } " = 6 \times 10 + 6$$

$$3\text{-й } " = 6 \times 10^2 + 6 \times 10 + 6$$

$$4\text{-й } " = 6 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 6 \times 10 + 6$$

$$\dots$$

$$n\text{-й членъ} = 6 \times 10^{n-1} + 6 \times 10^{n-2} + 6 \times 10^{n-3} + \dots + 6 \times 10 + 6.$$

Суммируя вертикальные столбцы, какъ геометрическія прогрессіи, находимъ

$$\begin{aligned} S &= \frac{6(10^n - 1)}{10 - 1} + \frac{6(10^{n-1} - 1)}{10 - 1} + \frac{6(10^{n-2} - 1)}{10 - 1} + \dots + \frac{6(10 - 1)}{10 - 1} \\ &= \frac{6}{10 - 1} [10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10] - \frac{6n}{10 - 1} \\ &= \frac{60}{(10 - 1)^2} \cdot (10^n - 1) - \frac{6n}{10 - 1}. \end{aligned}$$

Ряды геометрическіе.—Пусть даны числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$. Вытягивая каждое число изъ слѣдующаго за нимъ, получимъ числа

$$\beta - \alpha, \gamma - \beta, \delta - \gamma, \epsilon - \delta, \dots$$

называемыя *первыми разностями* данныхъ чиселъ. Обозначая эти разности буквами $\beta', \gamma', \delta', \dots$, вычтемъ каждое число изъ слѣдующаго за нимъ; найдемъ

$$\beta' = \beta' - \alpha, \gamma' = \gamma' - \beta, \delta' = \delta' - \gamma, \dots$$

Числа эти называются *вторыми разностями* данныхъ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Обозначая эти новыя разности буквами $\gamma', \delta', \epsilon', \dots$ составимъ *третьи разности*:

$$\gamma' = \gamma' - \beta', \delta' = \delta' - \gamma', \dots$$

и т. д. Если первыя разности $\beta' = \alpha, \gamma' = \beta, \dots$ постоянны, то говорятъ, что числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ образуютъ *прогрессию перваго порядка*: таковы прогрессии арифметическія. Если только вторыя разности дѣлаются постоянными, прогрессія называется — *второго порядка*. Вообще, *прогрессіей n -ю порядка* называютъ рядъ чиселъ, которыхъ n -ныя разности постоянны.

Напр., числа 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84 образуютъ прогрессию 3-го порядка, потому что третьи разности постоянны. Въ самомъ дѣлѣ:

Первыя разности суть . . . 3, 6, 10, 15, 21, 28;

вторыя разности . . . 3, 4, 5, 6, 7;

третьи разности . . . 1, 1, 1, 1.

Геометрически́мъ рядомъ называютъ рядъ чиселъ, получаемыхъ отъ почленного перемноженія геометрической прогрессіи на прогрессию опредѣленнаго порядка.

Примѣръ II. — Суммировать n членовъ ряда

$$S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + \dots + na^{n-1} \dots (1)$$

Это есть рядъ геометрическій, полученный отъ почленного перемноженія геометрической прогрессіи 1, a, a^2, a^3, \dots на прогрессию 1-го порядка 1, 2, 3, 4, ...

Помноживъ обѣ части равенства (1) на a , имѣемъ

$$aS = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + \dots + (n-1)a^{n-1} + na^n \dots (2)$$

Вычтя изъ (2) равенство (1), имѣемъ:

$$(a-1)S = -[1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^{n-1}] + na^n,$$

или

$$(a-1)S = na^n - \frac{a^n - 1}{a - 1},$$

откуда

$$S = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n - 1}{(a-1)^2} \dots (3)$$

Примѣненіе. — Положивъ $a = -1$ въ предложенномъ рядѣ, имѣемъ

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots \pm n.$$

Формула (3) прямо даетъ

$$S = \pm \frac{n}{2} + \frac{(1 \pm 1)}{4},$$

причемъ верхній знакъ относится къ случаю n нечетнаго, нижній къ случаю n четнаго.

Примѣръ III. Суммировать рядъ (n членовъ):

$$S = 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + \dots + \frac{n}{2}(n+1)a^{n-1}.$$

Умноживъ обѣ части на a и вычтя предложенный рядъ, имѣемъ

$$(a-1)S = \frac{n}{2} (n+1)a^n - [1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + na^{n-1}] \dots (1)$$

Положивъ $S' = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + na^{n-1}$, по предыдущему имѣемъ $S' = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n-1}{(a-1)^2}$. Заменявъ въ (1) S его величиною, находимъ

$$(a-1)S = \frac{n}{2} (n+1)a^n - \frac{na^n}{a-1} + \frac{a^n-1}{(a-1)^2},$$

откуда

$$S = \frac{n(n+1)a^n}{2(a-1)} - \frac{2na^n}{2(a-1)^2} + \frac{2(a^n-1)}{2(a-1)^2}.$$

Приложеніе.—Положивъ $a = -1$, получимъ

$$S = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - \dots + \frac{n}{2} (n+1),$$

и формула суммы дастъ для этого ряда

$$S = \frac{\pm n(n+1)}{4} + \frac{\pi}{4} \pm \frac{(1 \pm 1)}{8}.$$

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что всегда можно найти сумму данного числа членъ въ геометрическомъ рядѣ порядка m , полагая, что знаменатель геометрической прогрессіи есть a' .

Если всѣ члены положительны, достаточно вычесть сумму S этого ряда изъ произведенія $a'S$; остатокъ $(a'-1)S$ будетъ содержать новый геометрический рядъ S порядка $m-1$. Вычтя эту сумму S' изъ произведенія $a'S'$, получимъ остатокъ $(a'-1)S'$, который будетъ содержать новый геометрический рядъ S порядка $m-2$. Продолжаемъ такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока дойдемъ до геом. ряда, котораго разности постоянны, т.-е. до геометрической прогрессіи въ собственномъ смыслѣ, сумма которой известна. Это дастъ возможность опредѣлить сумму S' ряда перваго порядка, а слѣд. сумму S' втораго порядка и, наконецъ, S .

Приводимъ еще примѣры суммированія нѣкоторыхъ рядовъ.

Примѣръ IV.—Суммировать n членовъ ряда Лейбница

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Замѣтивъ, что n -ый членъ ч. б. представленъ въ видѣ

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

полагаемъ въ этомъ равенствѣ $n = 1, 2, 3, \dots, n$, такимъ образомъ всѣ члены разложимъ на разности, и дадимъ ряду видъ:

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Замѣчая, что второй членъ каждой разности уничтожается съ первымъ членомъ слѣдующей, найдемъ, что останутся только крайніе члены; а потому

$$S = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Примѣръ V. — Найдти сумму n членовъ ряда.

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Попытаемся разложить общій членъ на 2 члена, употребляя для этого способъ неопределенныхъ коэффициентовъ; для этого полагаемъ тождество

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)},$$

въ которомъ A и B не зависятъ отъ n . Освободивъ отъ знаменателя, получаемъ тождество $1 = (n+2)A + nB$, или

$$(A+B)n + (2A-1) = 0, \text{ откуда: } A = \frac{1}{2} \text{ и } B = -\frac{1}{2}. \text{ Слѣд.}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $n=1, 2, 3, \dots, n$, представимъ каждыя членъ въ формѣ разности и дадимъ ряду видъ:

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right] + \dots + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right],$$

откуда, какъ и предыдущемъ примѣрѣ, имѣемъ:

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right].$$

Примѣръ VI. — Суммировать n членовъ

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2-1}.$$

Общій членъ $\frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right]$. Полагая послѣдовательно $n=1, 2, 3, \dots, n$, дадимъ первому члену видъ $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right]$, второму видъ $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right]$, третьему видъ $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right]$, и т. д. Сумма ряда будетъ

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Члены, начиная съ $\frac{1}{3}$, до $\frac{1}{n}$, взаимно уничтожаются; такъ что

$$S = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right].$$

Примѣръ VII. — Дана арифметическая прогрессія съ разностью r :

$$a, b, c, d, \dots, h, k, l.$$

1) Найдти сумму $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \dots + \frac{1}{hk} + \frac{1}{kl}$, или $\sum \frac{1}{ab}$?

Имѣемъ

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= \frac{b-a}{ab} = \frac{r}{ab} \\ \frac{1}{b} - \frac{1}{c} &= \frac{c-b}{bc} = \frac{r}{bc} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{k} - \frac{1}{l} &= \frac{l-k}{kl} = \frac{r}{kl}\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, находимъ: $\frac{1}{a} - \frac{1}{l} = r \sum \frac{1}{ab}$, откуда

$$\sum \frac{1}{ab} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{l} \right].$$

Эта формула дает простое средство суммированія ряда примѣра IV, стоитъ только положить $a=1$, $r=1$, $l=n+1$, и тотчас находимъ

$$S = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Найти сумму $\frac{1}{abc} + \frac{1}{bcd} + \dots + \frac{1}{hkl}$, или, короче, $\sum \frac{1}{abc}$?

Имѣемъ:

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} &= \frac{bc-ba}{ab^2c} = \frac{2r}{abc} \\ \frac{1}{bc} - \frac{1}{cd} &= \frac{cd-bc}{bc^2d} = \frac{2r}{bcd} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{hk} - \frac{1}{kl} &= \frac{kl-hk}{hk^2l} = \frac{2r}{hkl}.\end{aligned}$$

Складывая, найдемъ: $\frac{1}{ab} - \frac{1}{kl} = 2r \sum \frac{1}{abc}$, откуда

$$\sum \frac{1}{abc} = \frac{1}{2r} \left[\frac{1}{ab} - \frac{1}{kl} \right].$$

По этой формулѣ легко суммировать рядъ примѣра V; положивъ $a=1$, $b=2$, $k=n+1$, $l=n+2$, тотчас имѣемъ:

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right].$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$\sum \frac{1}{abcd} = \frac{1}{3r} \left[\frac{1}{abc} - \frac{1}{hkl} \right], \text{ и т. д.}$$

3. Можно вывести аналогичныя формулы для суммы произведеній послѣдовательныхъ членовъ арифметической прогрессии.

Называя a_0 членъ, предшествующій a , и l_0 — слѣдующіе за l , имѣемъ:

$$\begin{aligned}b - a_0 &= 2r, \text{ откуда умножая на } a, \quad ab - a_0a = 2ra \\ c - a &= 2r, \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad bc - ab = 2rb \\ d - b &= 2r, \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad cd - bc = 2rc \\ &\dots\dots\dots \\ l_0 - k &= 2r, \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad ll_0 - kl = 2rl.\end{aligned}$$

Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$ есть сходящійся, то онъ имѣетъ конечную сумму S . Въ такомъ случаѣ, назвавъ черезъ S_{n-1} и S_n суммы первыхъ $n-1$ и n членовъ, замѣчаемъ, что по мѣрѣ приближенія n къ ∞ , обѣ суммы стремятся къ предѣлу S , т. е.

$$\lim S_n = S, \quad \lim S_{n-1} = S,$$

откуда, вычитая, находимъ $\lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$; или, какъ разность предѣловъ равна предѣлу разности переменныхъ, то $\lim (S_n - S_{n-1}) = 0$; но $S_n - S_{n-1} = u_n$, слѣд. въ сходящемся рядѣ

$$\lim (u_n) = 0.$$

Иначе: если въ ряду положительныхъ членовъ члены, хотя и уменьшаются, но не стремятся къ нулю, такой рядъ никогда не можетъ быть сходящимся. Въ самомъ дѣлѣ, если все члены будутъ больше нѣкоторой конечной величины ε , то

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots > \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \dots$$

Вторая часть, содержитъ безконечное число конечныхъ слагаемыхъ, безконечно велика; тѣмъ болѣе, свойство это принадлежитъ лѣвой части, которая больше правой; слѣд. рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ расходится.

Итакъ, *необходимое условие сходимости ряда* состоитъ въ томъ, чтобы члены его неограниченно уменьшались, приближаясь къ нулю. Но одного этого условия, по крайнѣй мѣрѣ, для рядовъ съ положительными членами, еще *недостаточно*. Въ самомъ дѣлѣ, есть такіе ряды, члены которыхъ хотя и приближаются къ нулю, но сумма ряда не имѣетъ конечной величины. Это можно видѣть изъ слѣдующихъ примѣровъ.

1. Члены ряда $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$ стремятся къ нулю, ибо при $n = \infty$, $\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$. Не смотря на это, данный рядъ — расходящійся. въ самомъ дѣлѣ, назвавъ сумму n членовъ его черезъ S_n , имѣемъ

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

т. е. $S_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, или $S_n > \sqrt{n}$, откуда, при $n = \infty$, имѣемъ $\lim S_n = \infty$ — значить, рядъ — расходящійся.

2. Для другого примѣра возьмемъ такъ называемый *гармоническій* рядъ, члены котораго суть обратныя величины чиселъ натурального ряда.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

Члены его стремятся къ нулю, ибо $\lim \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$; и однако, это — рядъ *расходящійся*. Въ самомъ дѣлѣ, если взять n членовъ изъ n -мъ, то сумма $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ больше $\frac{1}{2n}$, вѣроятъ n разъ, т. е. больше $\frac{1}{2}$. Слѣд. если сгруппировать члены ряда такъ:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \dots$$

то видно, что эта сумма больше

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

но послѣдняя сумма — ∞ , слѣд. и гармонич. рядъ — безспорно расходящійся.

Итакъ, одного приближенія членовъ къ нулю недостаточно для сходимости ряда. Отсюда—необходимость указанія признаковъ, по которымъ можно бы было отличать сходящіеся ряды отъ расходящихся. Укажемъ простѣйшіе изъ этихъ признаковъ, различая случаи: 1) рядовъ, члены которыхъ имѣютъ одинаковый знакъ; 2) рядовъ, у которыхъ знаки членовъ мѣняются.

Признаки сходимости знакопостоянныхъ рядовъ.

760. ТЕОРЕМА Д'АЛАМБЕРА.— I. Если въ ряду положительныхъ членовъ

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$$

съ возрастаніемъ n членъ u_n приближается къ нулю, а отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ къ предѣлу α , меньшему 1, то рядъ будетъ сходящимся.

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ правильную дробь q , которая заключалась бы между α и 1 ($\alpha < q < 1$). По условію, отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ приближается къ такому предѣлу α , который меньше q ; но это возможно не иначе, какъ только тогда, когда съ нѣкотораго мѣста ряда отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ сдѣлается и будетъ оставаться $< q$. Значитъ, съ этого мѣста будутъ справедливы неравенства

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < q, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < q, \quad \frac{u_{n+4}}{u_{n+3}} < q, \dots$$

Умножая обѣ части каждаго неравенства на положительнаго знаменателя, мы этимъ не измѣнимъ смысла неравенствъ и найдемъ

$$u_{n+2} < q \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+3} < q \cdot u_{n+2}; \quad u_{n+4} < q \cdot u_{n+3}; \dots$$

Замѣняя во второмъ неравенствѣ u_{n+2} болѣею величиною $q u_{n+1}$, въ третьемъ u_{n+3} болѣеимъ количествомъ $q^2 \cdot u_{n+1}$, . . . мы не нарушимъ смысла неравенствъ, и найдемъ

$$u_{n+2} < q \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+3} < q^2 \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+4} < q^3 \cdot u_{n+1}; \dots$$

Сложивъ эти неравенства и прибавивъ къ обѣимъ частямъ u_{n+1} , имѣемъ

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+1}(1 + q + q^2 + q^3 + \dots).$$

Первая часть есть сумма ряда, слѣдующая за n -мъ членомъ и называемая *остаткомъ* ряда, обозначимъ ее чрезъ r_n . Безконечный рядъ въ скобкахъ есть сумма членовъ безконечно-убывающей геометрич. прогрессии (ибо $q < 1$), равная конечной величинѣ $\frac{1}{1-q}$; такимъ образомъ получаемъ

$$r_n < \frac{u_{n+1}}{1-q}.$$

Сумма S данного ряда состоитъ изъ $S_n + r_n$, гдѣ S_n есть конечная величина, какъ сумма конечнаго числа конечныхъ слагаемыхъ. Значитъ

$$S < S_n + \frac{u_{n+1}}{1-q},$$

т. е. сумма данного ряда меньше конечной положительной величины, а потому сама есть величина конечная, а данный рядъ — сходящійся.

II. Если въ ряду положительныхъ членовъ отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ съ возрастаніемъ n , приближается къ предѣлу $\alpha > 1$, то рядъ есть расходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ между a и 1 нѣкоторую неправильную дробь q , т.-е. $a > q > 1$. По условію, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ приближается къ такому предѣлу a , который больше q ; но чтобы это было возможно, необходимо, чтобы съ нѣкотораго мѣста ряда сказанное отношение сдѣлалось и оставалось больше q . Съ этого мѣста, слѣд., возникнутъ отношенія, большія q , а потому будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > q; \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > q; \quad \frac{u_{n+4}}{u_{n+3}} > q, \dots$$

Изъ нихъ имѣемъ

$$u_{n+2} > q \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+3} > q \cdot u_{n+2}; \quad u_{n+4} > q \cdot u_{n+3}; \dots$$

а отсюда

$$u_{n+3} > q \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+4} > q^2 \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+5} > q^3 \cdot u_{n+1}; \dots$$

Складывая и прибавляя къ обѣимъ частямъ u_n , имѣемъ

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots > u_{n+1} (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)$$

Обозначивъ сумму первыхъ n членовъ ряда чрезъ S_n , и прибавъ къ обѣимъ частямъ это количество, получимъ

$$S_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots > S_n + u_{n+1} (1 + q + q^2 + \dots)$$

Первая часть представляетъ сумму всего ряда; затѣмъ, $q > 1$, и слѣд. $1 + q + q^2 + \dots = \infty$; неравенство означаетъ, такимъ образомъ, что данный рядъ — расходящійся.

Примѣняя эту теорему, должно составить отношеніе общаго члена къ предыдущему и найти предѣлъ этого отношенія при $n = \infty$. Если окажется, что этотъ предѣлъ < 1 , заключаемъ, что данный рядъ есть сходящійся; если предѣлъ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ при $n = \infty$ будетъ > 1 , рядъ будетъ расходящійся. Если же окажется, что $\lim \left[\frac{u_{n+1}}{u_n} \right]_{n=\infty} = 1$, наши теоремы ничего не рѣшаютъ относительно сходимости

ряда, ибо первыя доказательства — въ томъ, что съ опредѣленнаго мѣста отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ должно *оставаться* меньше или больше 1, что предположеніе уже не находитъ себѣ мѣста, когда сказанное отношеніе имѣетъ предѣломъ самую 1, и потому въ послѣднемъ случаѣ рядъ м. б. какъ сходящимся, такъ и расходящимся. Вопросъ рѣшается въ этомъ случаѣ другими признаками.

Во всякомъ случаѣ, если отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится къ 1, оставаясь съ нѣкотораго мѣста ряда постоянно *больше* 1-цы, то рядъ будетъ *расходящійся*. Въ самомъ дѣлѣ, члены ряда начнутъ, наконецъ, постоянно возрастать, и общій членъ не будетъ имѣть предѣломъ нуль.

761. Примеры. 1. *Исследовать въ отношеніи сходимости рядъ*

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots$$

въ которомъ предполагается $x > 0$. Имѣемъ

$$u_n = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)};$$

слѣд. $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{x}{n+1}$; но при всякомъ конечномъ x дробь $\frac{x}{n+1}$ обращается въ 0 при $n = \infty$. Заключаемъ, что рядъ сходится при всякомъ опредѣленномъ конечномъ x . Но не лишнее — прямо удостовѣриться въ сходимости ряда, ибо

съ первого взгляда может показаться, что при несколько значительной величинѣ x , напр., при $x = 10$, рядъ — какъ будто бы расходящійся, ибо имѣемъ $1 + 10 + 1 + 50 + \frac{500}{3} + \dots$. Но хотя вначалѣ члены ряда идутъ возрастающіе, все-таки произойдетъ сходящійся, какъ въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ разсмотрѣніемъ. Въ § 340 мы имѣли:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k < \left(\frac{x}{1}\right)^k.$$

Произвольное цѣлое положительное число k выберемъ такъ, чтобы $1/k < x$, или $k > x^2$, и разложимъ рядъ на двѣ части:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^{k-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} + \frac{x^k}{1 \cdot 2 \dots k} + \frac{x^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \frac{x^{k+2}}{1 \cdot 2 \dots (k+2)} + \dots$$

Первая часть есть конечный рядъ и имѣетъ конечную сумму, вторая часть — меньше

$$\left(\frac{x}{1}\right)^k + \left(\frac{x}{1}\right)^{k+1} + \left(\frac{x}{1}\right)^{k+2} + \dots \\ = \left(\frac{x}{1}\right)^k + \left(\frac{x}{1}\right)^{k+1} + \left(\frac{x}{1}\right)^{k+2} + \dots$$

т. е. меньше суммы геометрич. прогрессіи, представляющей восходящій степени правильной дроби $\frac{x}{1}$. Слѣд. данный рядъ съ мѣста $k > x^2$ сходитъ (или сходящійся геометрической прогрессіи, а слѣд. есть беспрерывно сходящійся рядъ).

II. Въ рядѣ

$$1 - 1 \cdot x + 1 \cdot 2 \cdot x^2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^4 - \dots$$

имѣемъ $\frac{u_n}{u_{n-1}} = (n-1)x$. Пределъ этого произведенія, при $n = \infty$, бесконечно, при всякомъ значеніи x , отличномъ отъ нуля; если же $x = 0$, рядъ не существуетъ (ибо пріобрѣтаетъ къ 1). Слѣд. если рядъ существуетъ, то онъ всегда — расходящійся.

III. Въ рядѣ

$$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \dots + \frac{1}{1 \cdot n} - \frac{1}{1 \cdot n+1} + \dots$$

$$\lim \left(\frac{1}{1 \cdot n} - \frac{1}{1 \cdot n+1} \right) = \lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Слѣдующей теоремой вопросъ о сходимости ряда не рѣшается, но если замѣтимъ, что члены данного ряда соотвѣтственно больше (начиная со 2-го члена) членами гармонич. ряда, заведомо расходящагося, то расходящійся характеръ ряда становится внѣ всякаго сомнѣнія.

IV. Въ рядѣ

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^n}{n} - \dots$$

при $x < 0$, $\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-1}}{n-1} - x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$; слѣд. пределъ этого отношенія при

$n = \infty$, равенъ x . заключаемъ, что при $x > 1$ рядъ — расходящійся, при $x < 1$ — сходящійся; при $x = 1$ — сомнѣніе. Но, замѣтивъ, что въ послѣднемъ случаѣ рядъ обращается въ гармоническій, заключаемъ, что и при $x = 1$ онъ расходящійся.

762. Въ послѣднихъ двухъ примѣрахъ для рѣшенія вопроса о сходимости въ сомнительномъ случаѣ приходилось прибѣгать къ сравненію даннаго ряда съ другимъ, сходящимъ или расходящимъ котораго уже извѣстна.

При сравненіи двухъ рядовъ, въ которыхъ члены положительны, можно пользоваться слѣдующею теоремою.

Пусть всѣ члены ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$

положительны и идутъ, постепенно уменьшаясь, въ такомъ случаѣ, очевидно, имѣемъ соотношенія

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ 2u_2 &= 2u_2 \\ 4u_3 &< 2u_2 + 2u_4 \\ 8u_3 &< 2u_2 + 2u_4 + 2u_7 + 2u_8 \\ 16u_{10} &< 2u_2 + 2u_{10} + 2u_{11} + \dots + 2u_{16} \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Складывая, имѣемъ

$$u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 8u_3 + 16u_{10} + \dots < 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots) = u_1 \dots (1).$$

Если первоначальный рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ сходится, то сумма его конечна, а слѣд. правая часть (1) есть также величина конечная; слѣд., лѣвая и правая конечна, а потому производный рядъ $u_1 + 2u_2 + 4u_3 + \dots$ сходится, если сходится первоначальный.

Раздѣливъ (1) на 2 и придавъ къ обѣимъ частямъ $\frac{1}{2} u_1$, дадимъ неравенству (1) видъ:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots < \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} (u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 8u_3 + \dots)$$

Если производный рядъ расхочитъ, то, какъ члены его положительны, сумма его будетъ $-\infty$, тѣмъ болѣе будетъ безконечна сумма первонач. ряда т.-е. если производный рядъ — расходящійся, то и начальный таковъ же,

Далѣе, очевидно, имѣютъ мѣсто неравенства

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ 2u_2 &> u_2 + u_2 \\ 4u_3 &> u_3 + u_3 + u_3 + u_3 \\ 8u_3 &> u_3 + u_3 + u_3 + \dots + u_{15} \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

откуда сложениемъ находимъ:

$$u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 8u_3 + \dots > u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$

Изъ этого неравенства заключаемъ: 1) если начальный рядъ расхочитъ, то тѣмъ болѣе расхочитъ производный, и 2) если производный сходитъ, то сходитъ и начальный.

Результатомъ соединенія этихъ четырехъ предложеній является:

ТЕОРЕМА КОШИ. Два безконечные ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \text{ и } u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 8u_3 + \dots$$

сходятся или расходятся одновременно.

Таким образом о сходимости или расхождении начального ряда можно судить по сходимости или расхождению производного.

763. Одним из замечательных приложений этой теоремы является исследование сходимости ряда

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n+1)^k} + \dots$$

В данном случае, отношение $u_{n+1} : u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^k$; предельно, при $n \rightarrow \infty$, есть 1; сомнительно относительно сходимости ряда. Производный ряд будет:

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \dots = 1 + 2^{1-k} + 4^{1-k} + 8^{1-k} + 16^{1-k} + \dots \\ = 1 + 2^{1-k} + (2^{1-k})^2 + (2^{1-k})^3 + \dots$$

Но это есть геометрическая прогрессия с знаменателем 2^{1-k} ; для сходимости ее необходимо, чтобы знаменатель был < 1 , т. е. чтобы 2^{1-k} или $\frac{2^{1-k}}{2^k} < 1$, т. е. $k > 1$; во всех других случаях прогрессия расходится. По теореме Коши, и данный ряд будет сходящимся при $k > 1$, и расходящимся при $k < 1$. Отсюда, напр., прямо видно, что из четырех рядов:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad (1) \quad \frac{1}{1\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots \quad (2)$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (3) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (4)$$

два первые — сходящиеся, последние два — расходящиеся, между тем как для всех $\lim (u_{n+1} : u_n) = 1$.

Сомнение, оставляемое теоремою д'Аламбера, можно иногда разрешать при помощи следующей теоремы.

764. *ТЕОРЕМА ДЮГАМЕЛЯ. Ряд $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$ члены которого постепенно уменьшаются, будет сходящимся, если ряд $S' = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$ сходящийся, и, начиная с некоторого члена, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$.*

Наоборот, первый ряд будет расходящимся, если второй расходится, и отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

В самом деле, если ряд S' сходится, то из неравенства $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ находим

$$u_{n+1} < v_{n+1} \frac{u_n}{v_n} \quad \text{и} \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n},$$

отсюда

$$u_{n+2} < v_{n+2} \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}, \quad u_{n+3} < v_{n+3} \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}}, \dots$$

$$\text{и} \quad \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} < \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n}, \quad \frac{u_{n+3}}{v_{n+3}} < \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} < \frac{u_n}{v_n}, \dots$$

Следовательно

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots < \frac{u_n}{v_n} (v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \dots)$$

а это значит, что остатки R_n первого ряда меньше произведения остатка R'_n второго на $\frac{n}{n}$. Если ряд S сходящийся, то R'_n стремится к нулю, а потому из последнего неравенства заключаем, что и R_n стремится к нулю, и что слѣд. ряд S — сходящийся.

Если ряд S' расходящийся, то условие $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$ поведетъ къ неравенствамъ, отличающимся отъ вышеписанныхъ смысломъ; такимъ образомъ, найдемъ, что $R_n > R'_n \cdot \frac{n}{n}$. Но если S' — рядъ расходящийся, то остатокъ R'_n не стремится къ нулю, а потому и R_n не стремится къ нулю, слѣд. S есть строка расходящаяся. Напр., для ряда

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} + \dots$$

найдемъ, что $u_{n+1} : u_n = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$, и слѣд. при $n = \infty$ даетъ 1. Но сравни-

вая этотъ рядъ съ гармоническимъ, заведомо расходящимся, для котораго отношение соответствующихъ членовъ есть $\frac{n+1}{n+2}$, находимъ: $\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{n+1}{n+2}$, а потому заключаемъ, что взятый рядъ — расходящийся.

Ряды знакопеременные.

765. ТЕОРЕМА. Когда знаки членовъ чередуются (+, —, +, —, ...), то рядъ будетъ стоящийся, если съ некоторою мѣстою члены его неопредѣленно уменьшаются, приближаясь къ нулю, т.-е. если $\lim u_n = 0$ при $n = \infty$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть съ опредѣленнаго мѣста $n = k$, каждый членъ больше слѣдующаго за нимъ, т.-е.

$$u_k > u_{k+1} > u_{k+2} > u_{k+3} \dots$$

и кромѣ того $\lim u_n = 0$. Обозначимъ буквами R_1, R_2, R_3, \dots величины:

$$\begin{aligned} R_1 &= u_k \\ R_2 &= u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}) \\ R_3 &= u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}) - (u_{k+2} - u_{k+3}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Замѣчая, что всѣ разности въ скобкахъ положительны, имѣемъ

$$R_1 > R_2 > R_3 > R_4 \dots (1)$$

Съ другой стороны, положивъ

$$\begin{aligned} R_2 &= (u_k - u_{k+1}) \\ R_3 &= (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}) \\ R_4 &= (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}) + (u_{k+4} - u_{k+5}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

имѣемъ:

$$R_2 < R_3 < R_4 < R_5 \dots (2)$$

Наконецъ, для неопредѣленно возрастающаго m

$$\lim (R_{2m-1} - R_{2m}) = \lim u_{k+2m-1} = 0 \dots (3)$$

Итакъ, если съ мѣста k (съ котораго члены идутъ убывая) брать суммы нечетнаго числа членовъ, в суммы четнаго числа членовъ, то изъ (3) прямо слѣдуетъ, что эти суммы, R_{2m-1} и R_{2m} , приближаются къ некоторому общему предѣлу R ; причемъ суммы R_{2m-1} приближаются къ нему, постепенно уменьшаясь, суммы R_{2m} постепенно увеличиваясь. Затѣмъ, обиди ихъ предѣлъ R , во первыхъ, положительный, какъ непосредственно ясно изъ неравенствъ (2), а во-вторыхъ, буди онъ, въ силу неравенства (3), меньше каждой изъ величинъ R_1, R_2, \dots , онъ представлялъ бы опредѣленную конечную величину. Въ слѣдствіе ур-нія $R = \lim R_{2m-1} = \lim R_{2m}$:

$$R = u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \dots$$

а слѣд. при данныхъ условіяхъ рядъ $u_k - u_{k+1} + \dots$ сходящійся, а потому сходится и первоначальный рядъ

$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^{k-1} u_{k-1} + (-1)^k (u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \dots)$,
и теорема доказана.

Такъ, напр., рядъ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ сходящійся, а сумма его содержится между слѣдующими, болѣе и болѣе приближающимися числами

$$\begin{aligned} 1 & \text{ и } 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & \text{ и } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} & \text{ и } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ & \text{и т. д.} \end{aligned}$$

766. ТЕОРЕМА. Для сходимости ряда, въ которомъ знаки членовъ измѣняются по какому угодно закону, достаточно, чтобы рядъ оставался сходящимся по переменѣ всѣхъ знаковъ на $+$.

Въ самомъ дѣлѣ, абсолютная величина суммы втораго ряда, очевидно, больше, нежели перваго, такъ какъ во второмъ всѣ члены положительны, а въ данномъ некоторые изъ этихъ членовъ отрицательны. Но, по условію, сумма втораго ряда конечна, слѣд. и сумма даннаго конечна, т.е. данный рядъ — сходящійся.

Слѣд. о сходимости даннаго ряда можно судить, применяя къ произвольному ряду вышенайденные признаки сходимости для рядовъ съ положительными членами.

767. Условная и безусловная сходимость. Нередко приходится встрѣчаться съ такого рода мнѣніемъ, что предположеніе, имѣющее силу для *вскаго* конечнаго числа величинъ, должно оставаться вѣрнымъ и въ томъ случаѣ, когда число величинъ дѣлается безконечнымъ. Первый, доказательно убѣдившій въ несостоятельности такого принципа, былъ Лейбень-Гурикелъ (въ 1837 г.). Онъ показалъ, что предположеніе о неизмѣняемости суммы отъ переменъ мѣстъ слагаемыхъ, вообще, неправо для безконечнаго числа слагаемыхъ. Примеръ его былъ слѣдующій. Возьмемъ рядъ

$$\sigma = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad (I)$$

и сгруппируемъ его члены по четыре:

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) + \dots \end{aligned}$$

гдѣ общая группа есть n -ая. Такимъ образомъ сумма σ равна суммѣ значеній,

принимаемых n -ю группою, если въ ней давать n всё цѣлыя значенія отъ 1 до ∞ , т.-е.

$$s = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \dots \right) \quad (1)$$

Затѣмъ, въ суммѣ (1) переставимъ члены такъ, чтобы на двама положительными слѣдовало отрицательный; получимъ рядъ

$$s = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots \quad (2)$$

и сгруппируемъ его члены по три:

$$s = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \right) + \dots \\ \dots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) + \dots$$

гдѣ общая группа есть n -ая. Сумму s можно сокращенно представить въ видѣ

$$s = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) \dots \quad (3)$$

Наконецъ, сгруппировавъ члены ряда (1) по два, не измѣняя ихъ порядка, получимъ

$$s = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) + \dots$$

гдѣ общая группа есть n ая. Эту сумму можно представить въ видѣ

$$s = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

Вычитаніе даетъ:

$$\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

Если въ этомъ тождествѣ положить послѣдовательно $n = 1, 2, 3, \dots, n$, сложить результаты и перейти къ предѣлу $n = \infty$, то получится

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) \\ = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$$

или $s = \frac{1}{2} s$, откуда $s = \frac{3}{2} s$, т.-е. суммы s и s различны.

Отсюда вытекаетъ необходимость различать два рода сходящихся рядовъ: ряды *условно-сходящиеся*, когда сумма ихъ зависитъ отъ порядка членовъ, и *безусловно-сходящиеся*, если сумма остается всегда одинаковою, какъ ни переставлять члены. А отсюда задача объ опредѣленіи признаковъ безусловной сходимости.

Пусть будетъ U_n сумма нѣкотораго n -членнаго ряда:

$$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} \dots \quad (1)$$

и пусть предѣлъ U_n при $n = \infty$ будетъ опредѣленная конечная величина U , слѣд.

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots (2)$$

т.-е. имѣется рядъ сходящійся. Узнать, будетъ ли новый бесконечный рядъ

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots (3)$$

отличающійся отъ перваго только перестановкою членовъ, имѣть ту же сумму U ? Возьмемъ въ новомъ ряду p первыхъ членовъ и положимъ

$$V_p = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{p-1} \dots (4)$$

Можно взять p настолько большимъ, чтобы всѣ n членовъ суммы U_n содержались въ суммѣ V_p . Кроме того, пусть въ V_p будетъ еще $p - n$ членовъ, совокупность которыхъ

$$u_q + u_r + u_s + \dots$$

будетъ имѣть индексы q, r, s, \dots больше $n - 1$. Поэтому

$$V_p - U_n = u_q + u_r + u_s + \dots$$

а слѣд., при неограниченномъ возрастаніи n и p

$$\lim V_p - U = \lim (u_q + u_r + u_s + \dots).$$

Чтобы рядъ $v_0 + v_1 + v_2 + \dots$ имѣлъ сумму U , должно быть: $\lim V_p = U$, а слѣд. должно быть

$$\lim (u_q + u_r + u_s + \dots) = 0 \dots (5)$$

Это и есть признакъ безусловной сходимости ряда (2).

Можно найти другую форму такимъ путемъ. Если рядъ (2) съ опредѣленнаго мѣста содержать только положительные члены, то можно n взять настолько большимъ, чтобы въ U_n — ни

$$U - U_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

справа находящіеся члены всѣ были положительны; сумма $u_n + u_{n+1} + \dots$ есть такъ называемый *остатокъ* ряда и имѣетъ предѣломъ нуль, ибо при $n = \infty$ лѣвая часть обращается въ $U - \lim U_n$ т.-е. въ нуль.

Далѣе, что касается суммы $u_q + u_r + \dots$, число членовъ которой $= p - n$, а каждый индексъ $> n - 1$, то какъ всѣ члены положительны, имѣемъ

$$0 < u_q + u_r + u_s + \dots < u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

слѣд. при n и p приближающихся къ ∞ :

$$\lim (u_q + u_r + u_s + \dots) = 0;$$

слѣд. при взятомъ предположеніи рядъ сходится безусловно.

Когда первоначальный рядъ содержать члены, частью положительные, частью отрицательные, и вѣтъ такого мѣста, начиная съ котораго шли бы члены одинаковаго знака, къ такому ряду приведенныя заключенія неприменимы, и сходимость въ этомъ случаѣ возможна только условная.

Но въ частномъ предположеніи, что рядъ остается сходящимся, если вѣсто его членовъ взять ихъ абсолютныя значенія, можно далѣе вести изслѣдованіе. Обозначая абсолютныя величины членовъ скобками, пусть рядъ

$$[u_0] + [u_1] + [u_2] + \dots$$

будетъ сходящійся. По предыдущему

$$\lim \{ [u_q] + [u_r] + [u_s] + \dots \} = 0,$$

т. е. абсолютное значение суммы $u_q + u_r + \dots$ м. б. сделано как угодно малым. Отсюда же прямо слѣдуетъ, что $u_q + u_r + \dots$ также имѣетъ предѣлъ нуль, а слѣд. рядъ безусловно сходится. Отсюда

768. ТЕОРЕМА ШЕЙБЕРГА.—Безконечный рядъ сходится безусловно, если отбросить сходимость и тогда, когда все члены его замѣнимъ ихъ абсолютными значеніями.

Этимъ объясняется, почему рядъ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ оказался лишь условно сходящимся; въ самомъ дѣлѣ, рядъ изъ абсолютныхъ значеній его членовъ—расходящійся.

769. Перемноженіе рядовъ.—ТЕОРЕМА.—Если имѣемъ два сходящихся ряда

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \dots, \quad V = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

постоянные, или знакпеременные, но въ послѣднемъ случаѣ такіе, что оба, или, по крайней мѣрѣ, одинъ, напр. U , остаются сходящимися послѣ записи — или +; то доказать, что произведеніе UV выражается безконечнымъ рядомъ

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n + \dots$$

члены котораго составляются по слѣдующему закону:

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1 v_1 \\ w_2 &= u_1 v_2 + u_2 v_1 \\ w_3 &= u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\text{вообще } w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1$$

т. е. что n -ый членъ произведенія равенъ суммѣ произведеній первыхъ n членовъ ряда U на первые n членовъ ряда V , взятыхъ въ обратномъ порядкѣ.

Доказать, что UV выражается безконечнымъ рядомъ $w_1 + w_2 + \dots$ значитъ доказать, что UV есть предѣлъ, къ которому приближается сумма n членовъ:

$$W_n = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$$

при неограниченномъ возрастаніи n . Для этого составимъ разность между суммою W_n и произведеніемъ двухъ суммъ

$$U_p = u_1 + u_2 + \dots + u_p \quad \text{и} \quad V_q = v_1 + v_2 + \dots + v_q,$$

такъ $p < q$ и, причѣмъ: если n четное, то $p = q = \frac{n}{2}$, а при n нечетномъ $p = \frac{n-1}{2}$, $q = \frac{n+1}{2}$. Все члены произведенія $U_p V_q$ содержатся въ суммѣ W_n , ибо въ произведеніи $U_p V_q$ индексы при u и v не болѣе p и q . Вынеся въ W_n за скобки u_1, u_2, \dots, u_n , можемъ эту сумму представить въ видѣ

$$\begin{aligned} W_n &= u_1(v_1 + v_2 + \dots + v_q + v_{q+1} + \dots + v_n) \\ &\quad + u_2(v_1 + v_2 + \dots + v_q + v_{q+1} + \dots + v_{n-1}) \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad + u_p(v_1 + v_2 + \dots + v_q + v_{q+1}) \\ &\quad + u_{p+1}(v_1 + v_2 + \dots + v_q) + \dots + u_n v_1. \end{aligned}$$

Составивъ произведеніе $U_p V_q$ и вынеся также за скобки u_1, u_2, \dots имѣемъ:

$$\begin{aligned} U_p V_q &= u_1(v_1 + v_2 + \dots + v_q) + u_2(v_1 + v_2 + \dots + v_q) + \dots \\ &\quad \dots + u_p(v_1 + v_2 + \dots + v_q). \end{aligned}$$

Вычтя это произведение из W_n , находим:

$$W_n - U_p V_q = u_1(v_{q-1} + \dots + v_n) + u_2(v_{q-1} + \dots + v_{n-1}) + \dots + u_{p-1}v_{q+1} + u_{p+1}(v_1 + v_2 + \dots + v_q) - u_{p-2}(v_1 + v_2 + \dots + v_{q-1}) - \dots - u_n v_1$$

При увеличении n до бесконечности, неограниченно возрастают и p и q . Так как ряд V сходящийся, то его общий член v_{q+1} и суммы $v_{q-1} + \dots + v_n$, $v_{q+1} + \dots + v_{n-1}$, ... стремятся к нулю; а суммы первых членов $v_1 + v_2 + \dots + v_p$, ..., v_1 будут конечны. Подставив вместо первых сумм положительную бесконечно малую величину α , большую каждой из них, а вторые суммы заменив положительной величиной λ , также большею каждой из них, найдем, что вторая часть последнего равенства будет меньше

$$\alpha(u_1 + u_2 + \dots + u_p) + \lambda(u_{p-1} + \dots + u_n)$$

Но ряд U сходящийся и, по условию, не теряет сходимости и после замены его членов их абсолютными значениями, то сумма $u_1 + u_2 + \dots + u_p$, будучи меньше суммы абсолютных значений своих членов, будет меньше некоторого конечного положительного количества B , а остаток этого ряда $u_{p+1} + \dots + u_n$ сделается меньше некоторой положит. бесконечно малой β . Итак, при достаточно большом n будет

$$W_n - U_p V_q < B + A\beta,$$

т.е. наша разность м. б. сделана как угодно малою; а потому въ предѣлѣ, при $n = \infty$, $\lim (W_n - U_p V_q) = 0$, или $W = UV$.

ГЛАВА XLVIII.

Распространение формулы бинома Ньютона на всякого действительного показателя.—Остаток биномиального ряда.—Приложения.

770. Формула возвышения бинома въ степень, доказанная для показателя цѣлаго положительнаго, можетъ быть распространена на какой угодно показатель. Замѣтивъ, что $(a + b)^m$ достаточно разсматривать только при неравныхъ a и b , потому что при $a = b$ эта степень приводится къ одночлену $2^m a^m$, образуемъ ее вынесениемъ a за скобки въ биномѣ $a + b$; какъ показано въ § 714.

найдемъ: $(a + b)^m = a^m (1 + x)^m$, полагая $\frac{b}{a} = x$. Вопросъ приводится такимъ образомъ къ разложению $(1 + x)^m$.

Когда показатель m —число цѣлое и положительное, мы имѣли при всякомъ x конечный рядъ

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} x^k + \dots + x^m,$$

содержащий $m + 1$ членовъ. Коэффициенты при степеняхъ x представляютъ числа сочетаний изъ m элементовъ по 1, по 2, ..., по k , Условившись обозначать эти числа буквою m съ индексами 1, 2, 3, ..., т.е.

$$\frac{m}{1} = (m)_1; \quad \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = (m)_2; \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = (m)_3, \text{ вообще}$$

$$\frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = (m)_k \dots (1)$$

можем короче написать разложение въ формѣ:

$$(1+x)^m = 1 + (m)_1 x + (m)_2 x^2 + (m)_3 x^3 + \dots + (m)_{k-1} x^{k-1} + \dots + (m)_n x^n \dots \quad (2).$$

Сравнивается: если m не есть цѣлое положительное число то можно ли представить $(1+x)^m$ въ видѣ ряда, расположеннаго по восходящимъ степенямъ буквы x , съ коэффициентами закона, выражаемаго формулою (1)?

Здѣсь прежде всего замѣчаемъ, что коэффициенты

$$(m)_k = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k} \dots$$

при m цѣломъ положительномъ могутъ обратиться въ нуль, вѣдѣние чего рядъ (2) будетъ законченнымъ. Но если m число отрицательное или дробное, то число членовъ ряда будетъ безконечно. Дѣйствительно, при m отрицательномъ множители $m, m-1, m-2, \dots$ числителя выражения $(m)_k$ будутъ или увеличиваясь по абсолютной величинѣ, и потому ни одинъ коэффициентъ ряда не можетъ сдѣлаться нулемъ. Когда m — дробь, то и всѣ множители $m-1, m-2, \dots$ будутъ дроби, и не могутъ обратиться въ нуль, рядъ биномиальныхъ коэффициентовъ будетъ безконеченъ. Слѣд., если только возможно разложить въ рядъ законъ (2) бинома $(1+x)^m$, гдѣ m не есть цѣлое положительное число, то такой рядъ долженъ быть безконеченъ. Это замѣчаніе заставляетъ формулировать нашу задачу окончательно такъ: безконечный рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ буквы x , съ коэффициентами закона (1), при m не цѣломъ и положительномъ, т.-е. рядъ

$$1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \dots + m_n x^n + \dots \quad (3)$$

можетъ ли представлять разложение степени бинома $(1+x)^m$. Для рѣшенія вопроса нужно найти сумму этого ряда; если окажется, что эта сумма $= (1+x)^m$, вопросъ будетъ рѣшенъ въ утвердительномъ смыслѣ; если окажется, что сумма не равна $(1+x)^m$, — въ отрицательномъ смыслѣ. Но о суммировании безконечнаго ряда рѣчь можетъ быть только тогда, когда мы напередъ знаемъ, что этотъ рядъ сходящійся; поэтому прежде всего необходимо опредѣлить, при какихъ условияхъ рядъ (3) будетъ сходящимся. По нѣмъ предположено мы знаемъ, что (3) будетъ безусловно сходящимся рядомъ, если сходится рядъ, составленный изъ абсолютныхъ значений его членовъ. Итакъ, нужно взять предѣлъ отношения $m_{n+1}x^{n+1} : m_n x^n$ при $n = \infty$. Имѣемъ:

$$\lim \left\{ m_{n+1} x^{n+1} : m_n x^n \right\} = \lim \frac{m-n}{n+1} \cdot x = \lim \left\{ x + \frac{m}{n+1} \cdot x \right\}.$$

При $n = \infty$, при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ m и x , второй членъ обращается въ нуль, и слѣд.

$$\lim \left\{ m_{n+1} x^{n+1} : m_n x^n \right\} = -x.$$

Заключаемъ, что рядъ будетъ сходящимся, когда абсолютная величина $-x$ будетъ < 1 , т.-е. когда $-1 < x < 1$, или, короче, когда $x^2 < 1$. Если же абсолютная величина количества $(-x)$ будетъ > 1 , рядъ — расходящійся. При $x = \pm 1$ сомнительно; рѣшенія вопроса въ этомъ случаѣ мы касаться не будемъ, въ виду его сложности. Итакъ, полагая $-1 < x < 1$, найдемъ сумму ряда (3). Обозначивъ эту сумму чрезъ S_m , гдѣ значекъ m показываетъ, что эта сумма зависитъ отъ m , имѣемъ

$$S_m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \dots$$

Перемѣнивъ m на другое дѣйствительное количество p , получимъ:

$$S_p = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \dots$$

Такъ какъ оба эти ряда сходятся безусловно при $x^2 < 1$, то можно приложить къ нимъ теорему о перемноженіи рядовъ; найдемъ:

$$S_m \cdot S_p = 1 + (m_1 + p_1)x + (m_2 + m_1 p_1 + p_2)x^2 + \dots + (m_n + m_{n-1}p_1 + m_{n-2}p_2 + \dots + m_2 p_{n-2} + m_1 p_{n-1} + p_n)x^n + \dots \quad (4).$$

Докажемъ, что коэффициенты его составлены изъ $m + p$ по такому же закону, какъ коэффициенты рядовъ S_m и S_p составлены изъ m и p . Во-первыхъ, такъ какъ $m_1 = m$ и $p_1 = p$, то $m_1 + p_1 = m + p$. Затѣмъ:

$$\begin{aligned} m_2 + m_1 p_1 + p_2 &= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + mp + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} = \frac{m(m-1) + mp}{1 \cdot 2} + \frac{mp + p(p-1)}{1 \cdot 2} = \\ &= \frac{m(m + p - 1) + p(m + p - 1)}{1 \cdot 2} = \frac{(m + p)(m + p - 1)}{1 \cdot 2}, \end{aligned}$$

а это есть ничто иное какъ $(m + p)_2$.

Чтобы доказать, что

$$m_n + m_{n-1}p_1 + m_{n-2}p_2 + \dots + m_2 p_{n-2} + m_1 p_{n-1} + p_n = (m + p)_n, \quad (5)$$

допустимъ, что равенство (5) вѣрно, и докажемъ, что слѣдующій коэффициентъ есть $(m + p)_{n+1}$. По этому слѣдующій коэффициентъ есть

$$m_{n+1} + m_n p_1 + m_{n-1} p_2 + \dots + m_2 p_{n-1} + m_1 p_n + p_{n+1}$$

Чтобы онъ былъ равенъ $(m + p)_{n+1}$, нужно, чтобы онъ представлялъ произведение предыдущаго коэффициента, по допущенію, равнаго $(m + p)_n$, на $\frac{m + p - n}{n + 1}$.

Составляемъ это произведение:

$$(m_n + m_{n-1}p_1 + m_{n-2}p_2 + \dots + m_2 p_{n-2} + m_1 p_{n-1} + p_n) \cdot \frac{m + p - n}{n + 1} \quad (6)$$

Члены этого произведенія имѣютъ видъ $m_h p_{n-h} \cdot \frac{m + p - n}{n + 1}$, а это выраженіе можно представить въ формѣ

$$m_h p_{n-h} \cdot \frac{m - h}{n + 1} + m_h p_{n-h} \cdot \frac{p + h - n}{n + 1};$$

но $m_h \cdot \frac{m - h}{h + 1} = m_{h-1}$; это равенство можно представить въ видѣ

$$m_h(m - h) = m_{h-1}(h + 1);$$

а на основаніи этого равенства имѣемъ

$$p_{n-h}(p + h - n) = p_{n-h-1}(n - h + 1).$$

Слѣд.

$$m_h p_{n-h} \cdot \frac{m + p - n}{n + 1} = m_h p_{n-h-1} \cdot \frac{n - h + 1}{n + 1} + m_{h-1} p_{n-h} \cdot \frac{h + 1}{n + 1}.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $h = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, получимъ всѣ члены произведенія (6).

$$\begin{aligned} & p_n + m_1 p_n \cdot \frac{1}{n + 1} \\ & + m_1 p_n \cdot \frac{n}{n + 1} + m_2 p_{n-1} \cdot \frac{2}{n + 1} \\ & + m_2 p_{n-1} \cdot \frac{n - 1}{n + 1} + m_3 p_{n-2} \cdot \frac{3}{n + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + m_3 p_{n-2} \cdot \frac{n-2}{n+1} + \dots \\
 & + \dots + m_{n-2} p_3 \cdot \frac{n-2}{n+1} \\
 & + m_{n-2} p_3 \cdot \frac{3}{n+1} + m_{n-1} p_2 \cdot \frac{n-1}{n+1} \\
 & + m_{n-1} p_2 \cdot \frac{2}{n+1} + m_n p_1 \cdot \frac{n}{n+1} \\
 & + m_n p_1 \cdot \frac{1}{n+1} + m_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Суммируя по диагоналям, имеемъ:

$$p_{n+1} + m_1 p_n + m_2 p_{n-1} + \dots + m_{n-1} p_2 + m_n p_1 + m_{n+1};$$

а это есть не что иное, какъ $(m+p)_{n+1}$.

Итакъ, допустивъ, что коэффициентъ при x^n есть $(m+p)_n$, мы доказали, что слѣдующій коэффициентъ есть $(m+p)_{n+1}$. По непосредственнымъ вычисленіемъ мы убѣдились, что третій коэффициентъ $= (m+p)_2$; сл., по доказанному, четвертый $= (m+p)_3$, пятый $(m+p)_4$ и т. д. Такимъ образомъ, ур—ніе (4) принимаетъ видъ

$$S_m \cdot S_p = 1 + (m+p)_1 x + (m+p)_2 x^2 + (m+p)_3 x^3 + \dots + (m+p)_n x^n + \dots$$

то-есть

$$S_m \cdot S_{p-1} + \frac{m+p}{1} \cdot x + \frac{(m+p)(m+p-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(m+p)(m+p-1)(m+p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

Вторая часть представляетъ рядъ, составленный по тому же закону, какъ ряды S_m и S_p , съ тою разницею, что вмѣсто m или p находятся $m+p$; сл. рядъ этотъ мы можемъ обозначить тѣмъ же знакомъ S , но съ указателемъ $m+p$. Слѣд.

$$S_m \cdot S_p = S_{m+p} \dots (7).$$

Положивъ $m=p$, имеемъ:

$$S_m \cdot S_m = S_{2m} \text{ или } [S_m]^2 = S_{2m}.$$

Помноживъ обѣ части на S_m и применявъ къ произведенію $S_{2m} \cdot S_m$ формулу (7), имеемъ

$$[S_m]^3 = S_{3m}.$$

Продолжая такимъ же образомъ, получимъ для какого угодно цѣлаго числа k :

$$[S_m]^k = S_{km}.$$

Если теперь m есть положительная дробь $-\frac{q}{r}$, гдѣ q и r — цѣлыя положительныя числа, то мы можемъ произвольное цѣлое k взять равнымъ знаменателю r , и получимъ

$$\left[S_{\frac{q}{r}} \right]^r = S_q.$$

Такъ какъ q есть цѣлое положительное число, то S_q представляетъ, какъ извѣстно, конечный рядъ, сумма котораго равна $(1+x)^q$; слѣд.

$$\left[S_{\frac{q}{r}} \right]^r = (1+x)^q;$$

извлекая изъ обоихъ частей корень порядка r , имѣемъ

$$S_r = (1+x)^r;$$

этимъ и доказано, что $(1+x)^r$ разлагается въ безконечный рядъ того же закона, какъ и при цѣломъ показателѣ.

Если въ равенствѣ (7) положимъ, что m есть число отрицательное, цѣлое или дробное, и что $p = -m$, то равенство это дастъ

$$S_m \cdot S_{-m} = S_{m-m} = S_0.$$

Но $S_0 = 1$: слѣд. и $S_m \cdot S_{-m} = 1$, откуда

$$S_m = \frac{1}{S_{-m}}.$$

Нѣтъ $-m > 0$, а для этого случая доказано, что $S_{-m} = (1+x)^{-m}$; сл.

$$S_m = \frac{1}{(1+x)^{-m}} = (1+x)^m;$$

этимъ формула бинома доказана для отрицательнаго показателя.

Итакъ, мы доказали справедливость формулы для всякаго соизмѣряемаго показателя. Чтобы распространить это ур. на несоизмѣримое m^* , пусть будетъ μ — соизмѣримое число, безконечно къ нему близкое, и α безконечно-малая разность $m - \mu$. Формула (7) даетъ:

$$S_m = S_{\mu-\alpha} = S_\mu \cdot S_\alpha.$$

Но μ — число соизмѣримое, слѣд. $S_\mu = (1+x)^\mu$; затѣмъ, формула (3) даетъ

$$\begin{aligned} S_\alpha &= 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots \\ &= 1 + \alpha \left\{ x + \frac{\alpha-1}{2} x^2 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2 \cdot 3} x^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Рядъ въ скобкахъ — сходящійся, потому что отношение каждаго члена къ предыдущему въ преѣлѣ даетъ $-x$, что по абсолютной величинѣ < 1 ; слѣд. сумма этого ряда есть нѣкоторая конечная величина A , а потому

$$S_\alpha = 1 + \alpha A, \text{ и } S_m = (1+x)^\mu (1+\alpha A).$$

По мѣрѣ приближенія μ къ m , α приближается къ 0, слѣд. $1 + \alpha A$ — къ 1, а вторая часть къ $(1+x)^m$; а какъ эта часть всегда $= S_m$, то

$$S_m = (1+x)^m.$$

Итакъ, при всякомъ дѣйствительномъ m :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

причемъ, когда m — цѣлое положительное число, x можетъ быть какою угодно дѣйствительною величиною, если же m не есть цѣлое положит. число, то должно быть $-1 < x < 1$.

^{*}) Опредѣленіе степени съ несоизмѣримымъ показателемъ см. далѣе, § 775.

Примечание 1. Пятя вышеизложенного показательства общности формулы бинома Ньютона принадлежить *Либру*, а усовершенствованное показательство — *Кони*.

Примечание 2 Теорема. — *Одна и также функция разлагается въ стоящійся рядъ, расположенный по членамъ положительнымъ степенямъ переменнаго, единственнымъ способомъ.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть, если возможно, будутъ два различныхъ разложения одной и той же функции.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \text{ и } b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

сходящихся то и другое при всѣхъ значеніяхъ x , меньшихъ X , по абс. значенію. Такъ какъ, по усл., оба эти разложения должны имѣть равные пределы для всякаго $x < X$, то для этихъ значеній переѣннаго должно быть

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n + \dots = \varepsilon_n,$$

т. е., — разность остатковъ рядовъ, которая, какъ и эти остатки, ε б. безконечно малою при $n = \infty$, при всякомъ $x < X$. Какъ бы велико ни было значеніе, взятое для n , всегда можно взять r настолько малымъ, чтобы совокупность членовъ $(a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n$ была какъ угодно мала, а отсюда слѣдуетъ, что $a_0 - b_0$ равно разности двухъ безк. малыхъ. Слѣд., какъ $a_0 - b_0$ не зависитъ ни отъ n , ни отъ x , то оно строго равно нулю (на основаніи очевидной истинны постоянное, о которомъ можно доказать, что оно менѣе всякой данной величины, есть нуль, короче: постоянная безконечно-малая есть нечто иное какъ нуль). Такимъ образомъ $a_0 - b_0$ и равенство приводится къ

$$x[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + \dots + (a_n - b_n)x^{n-1}] = \varepsilon_n;$$

но чтобы первая часть была безконечно мала при всякомъ $r < X$, необходимо, чтобы скобки были безконечно малы, откуда, по предыдущему, заключаемъ, что $a_1 - b_1 = 0$, т. е. $a_1 = b_1$. Продолжая такимъ образомъ, убѣдимся что всѣ коэффициенты равны каждый каждому.

Примечание 3. — Эту теорему (служащую основаніемъ способа неопредѣлен. коэф. въ для безконечныхъ рядовъ) можно примѣнять къ разложению функций въ безъконечные степенные ряды, но только въ такомъ случаѣ, когда напередъ, м. б. показано, что функции способны разлагаться въ сходящіеся степенные ряды; въ противномъ случаѣ способъ этотъ можетъ привести къ невѣрнымъ результатамъ, такъ какъ въ немъ не обращается вниманія на остатки ряда. Кроме того, по этому способу трудно бываетъ найти общую формулу для членовъ ряда. Въ виду этого, какъ для бинома, такъ и для другихъ функций у насъ указаны другіе, болѣе строгіе, приемы разложенія въ ряды.

771. Остатокъ биноміального ряда. — Разложимъ биноміальный рядъ на двѣ части, изъ которыхъ первая пусть содержитъ первые k членовъ, а вторая которую мы назовемъ *остаткомъ ряда* и обозначимъ чрезъ R_k , остальные члены

Итакъ, положимъ:

$$1 + x^m - 1 = m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \dots + m_{k-1}x^{k-1} + R_k \quad (1)$$

гдѣ остатокъ R_k будетъ

$$R_k = m_kx^k + m_{k+1}x^{k+1} + m_{k+2}x^{k+2} + \dots$$

гдѣ

$$m_k = m(m-1) \dots (m-k+1) / 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k;$$

$$m_{k+1} = m(m-1) \dots (m-k+1)(m-k) / 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k(k+1); \quad m_{k+2} = m(m-1) \dots (m-k+1)(m-k)(m-k-1) / 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k(k+1)(k+2); \text{ и т. д.}$$

Вынеся во всѣхъ членахъ за скобки $m_k x^k$, получимъ:

$$R_k = m_k x^k \left\{ 1 + \frac{m-k}{k+1} x + \frac{(m-k)(m-k-1)}{(k+1)(k+2)} x^2 + \dots \right\} \dots (2)$$

Различаемъ слѣдующе случаи.

1-й случай: m — целое положительное число. — Понятно, что въ этомъ случаѣ $k < m$, рядъ будетъ конечный объ $(m+1)$ членахъ, и если.

1. $x > 0$, то сумма въ скобкахъ (2) будетъ больше нуля. Съ другой стороны, если во множителяхъ числителей коэффициентовъ отбросимъ вычитаемыя, а во множителяхъ знаменателей вторые члены, то всѣ коэффициенты увеличатся, и рядъ въ скобкахъ будетъ меньше

$$1 + \frac{m}{k} x + \frac{m^2}{k^2} x^2 + \frac{m^3}{k^3} x^3 + \dots,$$

т.-е. конечной геометрической прогрессии, которой знаменатель — $\frac{mx}{k}$, а послѣднй членъ $\left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k}$; потому сумма ея —

$$\frac{1 - \left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1 - \frac{mx}{k}}.$$

Такимъ образомъ остатокъ R_k , заключающъ между 0 и

$$m_k x^k \cdot \frac{1 - \left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1 - \frac{mx}{k}},$$

равенъ произведенію послѣдняго выраженія на некоторую положительную правильную дробь p ; т.-е.

$$(I) R_k = p \cdot m_k x^k \cdot \frac{1 - \left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1 - \frac{mx}{k}}, \text{ гдѣ } 0 < p < 1.$$

2. $x < 0$. Некоторые члены будутъ положительные, другіе отрицательные; и если условимся абсолютную величину количества x обозначать знакомъ $[x]$, то сумма въ скобкахъ (2) будетъ содержаться между

$$-\left\{ 1 + \left[\frac{mx}{k}\right] + \left[\frac{mx}{k}\right]^2 + \dots \right\} \text{ и } +\left\{ 1 + \left[\frac{mx}{k}\right] + \left[\frac{mx}{k}\right]^2 + \dots \right\},$$

такъ что легко заключить, что въ этомъ случаѣ

$$(II) R_k = p \cdot m_k x^k \cdot \frac{1 - \left[\frac{mx}{k}\right]^{m-k+1}}{1 - \left[\frac{mx}{k}\right]}, \text{ гдѣ } -1 < p < +1,$$

т.-е. p есть положит. или отрицат. правильная дробь.

Формулы (I) и (II) можно соединить въ одну, одинаковаго вида съ послѣдней, замѣтивъ только, что при $x > 0$ должно быть и $p > 0$.

Въ частномъ случаѣ, когда $\frac{mx}{k}$ есть правильная дробь, будетъ и

$$1 - \left[\frac{mx}{k}\right]^{m-k+1} < 1;$$

произведение этой правильной дроби на дробь $p < 1$ даст также правильную дробь; назвав последнюю буквою p' , получим для этого случая более простую формулу:

$$(III) R_k = \frac{p' \cdot m_k x^k}{1 - \left[\frac{mx}{k} \right]}, \text{ где } -1 < p' < +1.$$

И здесь также при $x > 0$ будет $p' > 0$.

2-й случай: m — *оробное положительное число*. — Биноміальный рядъ будетъ безконечный и сходящийся при $-1 < x < +1$; тоже самое относится и къ ряду (2). Возьмемъ произвольное цѣлое положительное число $k > m$, и рассмотримъ опять два случая—положительнаго и отрицат. x , именно: $x = +\xi$, $x = -\xi$.

Въ первомъ случаѣ рядъ (2) будетъ

$$1 - \frac{k-m}{k+1} \cdot \xi + \frac{(k-m)(k-m+1)}{(k+1)(k+2)} \cdot \xi^2 - \dots \quad (3)$$

во второмъ:

$$1 + \frac{k-m}{k+1} \cdot \xi + \frac{(k-m)(k-m+1)}{(k+1)(k+2)} \cdot \xi^2 + \dots \quad (4)$$

Такъ какъ факторы

$$\frac{k-m}{k+1}, \frac{k-m+1}{k+2}, \frac{k-m+2}{k+3} \dots$$

суть положительныя правильныя дроби, ξ также < 1 , то въ обоихъ рядахъ каждый членъ больше слѣдующаго; отсюда легко заключить, что сумма ряда (3) заключается между 1 и $1 - \frac{k-m}{k+1} \cdot \xi$ и потому положительна; также непосредственно видно, что и сумма (4) положительна. Затѣмъ, очевидно, что сумма перваго члена суммы второго, а эта послѣдняя меньше $1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \dots = \frac{1}{1-\xi}$. Вообразивъ между ξ и 1 еще правильную дробь ($\xi < \epsilon < 1$), имѣемъ

$$\frac{1}{1-\xi} < \frac{1}{1-\epsilon};$$

сумма каждого изъ рядовъ (3) и (4) содержится между 0 и $\frac{1}{1-\epsilon}$; поэтому ту и другую можно представить подъ общимъ видомъ $\frac{p}{1-\epsilon}$, гдѣ p положител. прав. дробь. Итакъ для остатка имѣемъ формулу

$$(IV) R_k = \frac{p \cdot m_k x^k}{1-\epsilon},$$

въ которой: $|x| < \epsilon < 1$, $k > m$, $0 < p < 1$, и $|x|$ означаетъ абсолютную величину x .

3-й случай: m — *отрицательное число*; пусть $m = -\lambda$. Рядъ (2) при $x > 0$ будетъ

$$1 - \frac{k+\lambda}{k+1} \xi + \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)} \xi^2 - \dots \quad (5)$$

а при $x < 0$:

$$1 + \frac{k+\lambda}{k+1} \xi + \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)} \xi^2 + \dots \quad (6)$$

Въ виду того, что $\frac{k+\lambda}{k+1} \cdot \xi$ при неограниченномъ возрастаніи k приближается

къ предѣлу ξ [ибо $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+\lambda}{k+1} \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\lambda}{k}}{1 + \frac{1}{k}} \cdot \xi = \xi$], и какъ $\xi < 1$, то можно для k выбрать настолько большое значеніе, чтобы

$$\frac{k+\lambda}{k+1} \cdot \xi < \varepsilon,$$

гдѣ ε прав. дробь, лежащая между ξ и 1. Въ самомъ дѣлѣ, предыдущее неравенство даетъ

$$k > \frac{\lambda \xi}{\varepsilon - \xi},$$

а это требованіе всегда м. б. выполнено. Какъ скоро для k выбрано такого рода значеніе, то тѣмъ въ большей мѣрѣ справедливы будутъ неравенства

$$k+1 > \frac{\lambda \xi - \varepsilon}{\varepsilon - \xi}, \quad k+2 > \frac{\lambda \xi - \varepsilon}{\varepsilon - \xi}, \quad \dots$$

или

$$\frac{k+\lambda+1}{k+2} \cdot \xi > \varepsilon, \quad \frac{k+\lambda+2}{k+3} \cdot \xi > \varepsilon, \quad \dots$$

слѣдовательно

$$\frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)} \cdot \xi^2 > \varepsilon^2, \quad \frac{(k+\lambda+1)(k+\lambda+2)}{(k+2)(k+3)} \cdot \xi^3 < \varepsilon^3, \text{ и т. д.}$$

Суммы рядовъ (5) и (6) будутъ, слѣд., положительны и менѣе

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots = \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

и потому могутъ быть представлены подъ общимъ видомъ $\frac{\rho}{1 - \varepsilon}$; и для остатка имѣемъ выраженіе

$$(V) \quad R_k = \frac{\rho \cdot m_k r^k}{1 - \varepsilon},$$

гдѣ $|x| < \varepsilon < 1$, $k > \frac{[mx] \cdot \varepsilon}{\varepsilon - [r]}$, $0 < \rho < 1$.

Это изслѣдованіе можно резюмировать такъ:

Если m не есть целое положительное число и $x^2 < 1$, то остатокъ Ньютона ряда выражается общою формулою

$$R_k = \frac{\rho \cdot m_k r^k}{1 - \varepsilon},$$

гдѣ

$$|x| < \varepsilon < 1, \quad 0 < \rho < 1;$$

причемъ слѣдуетъ брать: $k > m$, если m положительно, и $k > \frac{[mr] - \varepsilon}{\varepsilon - [x]}$, если m отрицательно.

772. Примѣры.—Примѣняя формулу бинома, найдемъ:

$$1. \quad (1 \pm x)^{\frac{3}{2}} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 \pm \dots$$

$$2. \quad (1 \pm y)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{2 \cdot 4}y^2 \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}y^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}y^4 \pm \dots$$

$$3. (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-1} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot a^4} - \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 5 \cdot x^6}{4 \cdot 6 \cdot a^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^8} - \dots \right\}$$

и т. п.

773. Приложенія формулы бинома Ньютона.—Укажемъ нѣкоторыя приложенія формулы бинома.

1. *Извлеченіе корней*—Пусть требуется извлечь корень изъ числа N . Разобьемъ N на двѣ части такъ, чтобы первая a^r представляла точную r -ую степень и была бы возможно больше по сравнениюъ съ другою частью b , которую въ этихъ видахъ можно брать и отрицательною. Всегда можно взять $a^r > b$. Получимъ:

$$\sqrt[r]{N} = \sqrt[r]{a^r + b} = \sqrt[r]{a^r \left(1 + \frac{b}{a^r} \right)} = a \sqrt[r]{1 + \frac{b}{a^r}} = a(1+x)^{\frac{1}{r}}, \text{ полагая } \frac{b}{a^r} = x.$$

Примѣняя формулу бинома, найдемъ

$$\sqrt[r]{N} = a \left[1 + \frac{x}{r} - \frac{(r-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{r} \right)^2 + \frac{(r-1)(2r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{r} \right)^3 - \dots \right]$$

Напр.

$$\sqrt[3]{129} = \sqrt[3]{125 + 4} = 5 \sqrt[3]{1 + \frac{4}{125}} = 5 \left[1 + \frac{1}{3 \cdot 125} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 125^2} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 125^3} - \dots \right]$$

$$= u_0 + u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= 5 + \frac{16}{3 \cdot 100} = 5,053333333 \\ u_2 &= \frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 125} \cdot u_1 = \frac{32}{3 \cdot 1000} u_1 = 0,000768889 (-) \\ &= 5,052764444 \\ u_3 &= \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 125} \cdot u_2 = \frac{16}{9 \cdot 100} u_2 = 0,0000101136 (+) \\ &= 5,0527745580 \\ u_4 &= \frac{8 \cdot 4}{12 \cdot 125} \cdot u_3 = \frac{64}{3 \cdot 1000} u_3 = 0,0000002158 (-) \\ &= 5,0527743422 \end{aligned}$$

и т. д.

Вѣдѣстие чередованія знаковъ искомымъ корень всегда заключается между двумя смежными значеніями.

II *Рѣшеніе уравненія* $ax^2 + bx + c = 0$, когда коэффициентъ a весьма малъ. Взявъ формулу корней, можемъ ей дать видъ

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{4ac}{b^2} \right)} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{b}{2a} \left(1 - \frac{4ac}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Когда корни уравненія дѣйствительные неравные, мы имѣемъ: $b^2 - 4ac > 0$, откуда $\frac{4ac}{b^2} < 1$; но при a весьма маломъ зрѣтъ эта будетъ весьма мала и получится быстро-сходящійся рядъ; а именно

$$x = -\frac{b}{2a} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4ac}{b^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4ac}{b^2} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{4ac}{b^2} \right)^3 - \dots \right) \right\}.$$

III. Раскрытие неопределенностей.—Приводимъ примѣры.

1. Дробь $\frac{a^m - a^n}{a^k - a^l}$, гдѣ m и k какія угодно числа, обращается въ $\frac{0}{0}$ при $x = a$. Полагаемъ $x = a + h$ и разлагаемъ числителя и знаменателя по восходящимъ степенямъ h ; затѣмъ полагаемъ $h = 0$; такъ, обр. находимъ:

$$\frac{a^m - a^n}{a^k - a^l} = \frac{(a+h)^m - a^m}{(a+h)^k - a^k} = \frac{a^m \left[\left(1 + \frac{h}{a}\right)^m - 1 \right]}{a^k \left[\left(1 + \frac{h}{a}\right)^k - 1 \right]} = a^{m-k} \frac{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^m - 1}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^k - 1} \dots$$

$$a^{m-k} \frac{m \cdot \frac{h}{a} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{h^2}{a^2} + \dots}{k \cdot \frac{h}{a} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{h^2}{a^2} + \dots}.$$

Всѣ члены числителя и знаменателя содержатъ множителя $\frac{h}{a}$; сокративъ на $\frac{h}{a}$ и положивъ $h = 0$ (чтобы имѣть величину дроби при $x = a$), находимъ, что всѣ члены числителя и знаменателя, кромѣ первыхъ, исчезаютъ, и получается $\frac{m}{k} a^{m-k}$.

2. Дроби $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ обращается въ $\frac{0}{0}$ при $x = a$. Положивъ $x = a + h$, даемъ ей видъ

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{(a+h)^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{a} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{a} + \dots\right) - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{h(2a+h)}};$$

сдѣлавъ приведеніе и раздѣливъ числит. и знам. на \sqrt{h} , имѣемъ

$$\frac{\frac{\sqrt{h}}{2a} + \dots + 1}{\sqrt{2a + h}},$$

что при $h = 0$ обращается въ $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

IV. Элементарный методъ Жюффруа для вывода рядовъ, служащихъ къ вычисленію π .

1. Взявъ окружность радиуса $R = 1$, проведемъ къ точкѣ E касательную, затѣмъ на окружности возьмемъ некоторую дугу AB и проведемъ радиусы OA , OB , продолженіе которыхъ пусть встрѣчаетъ касательную въ точкахъ C и D . Соединимъ хорду AB съ дугою AB . Опустимъ изъ центра перпендикуляръ OI на AB , возьмемъ отношеніе площадей треугольниковъ OAB и OCD , имѣющихъ общій уголъ:

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OCD} = \frac{OA \times OB}{OC \times OD} = \frac{AB \times OI}{CD \times OE}; \text{ или какъ } R=1, \frac{AB}{CD} = \frac{1}{OC \times OD \times OI}.$$

Замѣнивъ OI единицей и OD линіей OC , мы уменьшимъ вторую часть, и потому $\frac{AB}{CD} > \frac{1}{OC^2} \dots (1)$ Съ другой стороны $\frac{AB}{CD} < \frac{1}{OI^2} \dots (2)$. Доказательство неравенства (2) сводится къ доказательству, что $\frac{1}{OC \cdot OD \cdot OI} < \frac{1}{OI^2}$ или $\frac{1}{OC \cdot OI} < \frac{1}{OI}$, или $\frac{1}{OC} < \frac{OI}{OI}$; но, проведя AM параллельно CD (пусть V есть

точка пересѣченія AM съ OI , а точка M съ OB , имѣемъ: $\frac{OA}{OC} = \frac{OM}{OD}$, а какъ $OA = 1$, и $OM < OV < OI$, то $\frac{1}{OC} < \frac{OI}{OD}$: этимъ неравенство (2) доказано. Итакъ

$$\frac{1}{OC^2} < \frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2} \dots (3).$$

Если положимъ, что AB стремится къ нулю, то и CD будетъ приближаться къ нулю, и въ предѣлѣ: $\lim \frac{AB}{CD} = \frac{1}{OD^2}$, ибо OC и OD сливаются въ предѣлѣ.

Если на касательной возьмемъ часть $EP = 1$ и соединимъ P съ O , то дуга $EH = \frac{\pi}{4}$. Для вычисления этой дуги раздѣлимъ EP на n равныхъ частей и точки дѣленія F, D, C соединимъ съ центромъ. Эти прямыя дадутъ на окружности вершины неправильной ломаной, которой периметръ будетъ приближаться къ $\frac{\pi}{4}$ по мѣрѣ увеличенія n . Пусть будетъ AB одна изъ сторонъ этой ломаной, соответствующій элементъ CD касательной $= \frac{EP}{n} = \frac{1}{n}$. По доказанному, мы имѣемъ

$$\frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2}; \text{ гдѣ } OD^2 = 1 + ED^2.$$

Пусть p будетъ число дѣленій отъ E до D : сл. $ED = p \cdot \frac{1}{n}$, $CD = \frac{1}{n}$; и

$$AB < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p^2}{n^2}}, \text{ или } AB < \frac{n}{n^2 + p^2}.$$

Итакъ, периметръ P вписанной ломаной меньше суммы дробей вида $\frac{n}{n^2 + p^2}$, гдѣ p нужно измѣнять отъ 0 до $n-1$. Слѣд.

$$P < n \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \frac{1}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n-1)^2} \right] \dots (4).$$

Въ предѣлѣ, при $n = \infty$, P сливается съ дугою EH , слѣд.

$$\frac{\pi}{4} = \lim n \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n-1)^2} \right] \dots (5).$$

Съ другой стороны, мы нашли, что

$$\frac{AB}{CD} > \frac{1}{OC^2}, \text{ гдѣ } OC^2 = 1 + EC^2 = 1 + \frac{(p+1)^2}{n^2},$$

откуда

$$AB > \frac{n}{n^2 + (p+1)^2}.$$

Взявъ сумму этихъ неравенствъ отъ $p = 0$ до $p = n-1$, найдемъ

$$P > n \left[\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right] \dots (6).$$

Сближая неравенства (4) и (6), найдемъ два значенія для P —одно по избытку, другое по недостатку. Эти два значенія разнятся на $n \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \right] = \frac{1}{2n}$; слѣдов

оба они стремятся къ $\frac{\pi}{4}$. Взявъ n достаточно большимъ, можно вычислить π съ желаемою точностью.

Формула (5) послужитъ намъ для разложения π въ сходящійся рядъ. Взявъ въ скобкахъ общій членъ $\frac{1}{n^2 + p^2}$ или $(n^2 + p^2)^{-1}$, разложимъ его по формулѣ бинома:

$$\frac{1}{n^2 + p^2} = (n^2 + p^2)^{-1} = \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{p^2}{n^2} \right)^{-1} = \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{p^2}{n^2} + \frac{p^4}{n^4} - \frac{p^6}{n^6} + \frac{p^8}{n^8} - \dots \right).$$

Пологая последовательно $p = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$, найдемъ

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n^2 + 1} &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^8} + \dots \\ \frac{1}{n^2 + 2^2} &= \frac{1}{n^2} - \frac{2^2}{n^4} + \frac{2^4}{n^6} - \frac{2^6}{n^8} + \dots \\ \frac{1}{n^2 + 3^2} &= \frac{1}{n^2} - \frac{3^2}{n^4} + \frac{3^4}{n^6} - \frac{3^6}{n^8} + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{(n-1)^2}{n^4} - \frac{(n-1)^4}{n^6} + \frac{(n-1)^6}{n^8} - \dots \end{aligned}$$

Складывая по вертикальнымъ столбцамъ, умножая на n , и обозначая суммы вторыхъ, четвертыхъ, \dots степеней $n-1$ первыхъ цѣлыхъ чиселъ знаками S_2, S_4, \dots , находимъ:

$$\frac{\pi}{4} = \lim \left(1 - \frac{S_2}{n^3} + \frac{S_4}{n^5} - \frac{S_6}{n^7} + \frac{S_8}{n^9} - \dots \right).$$

Но $\lim \frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3}$, $\lim \frac{S_4}{n^5} = \frac{1}{5}$, и т. д. Потому

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

одинъ изъ рядовъ, которые даютъ интегральное исчисление.

2. Взявъ четверть круга OAB, положимъ, что радиусъ OB = 1. Раздѣлимъ радиусъ OB на n равныхъ частей и изъ точекъ дѣления проведемъ параллели другому радиусу OA. Такимъ обр. дуга AB = $\frac{\pi}{2}$ будетъ раздѣлена на n неравныхъ частей; хорды, какъ CI, стягивающія эти дуги, образуютъ вписанную ломаную линию P, предѣломъ которой при $n = \infty$ будетъ служить $\frac{\pi}{2}$. Пусть EF будетъ дѣленіе радиуса OB, соответствующее дугѣ CD. Проведя OI перпендикулярно къ хордѣ CI, OII перпендикулярно къ OA, и CG перпендикуляръ на IF, найдемъ изъ подобныхъ треугольниковъ CIG и OIH, что $\frac{CG}{CI} = \frac{OI}{OI}$. Но CG = EF, слѣд

$$\lim \frac{EF}{CD} = \lim \frac{OI}{OI} = 1; \text{ а потому } \lim CD = \lim \frac{EF}{1}.$$

ГЛАВА XLIX.

Исследование свойств показательной функции. Общие свойства логарифмовъ — Системы логарифмовъ. Угловыя соизмѣрности логарифмовъ. — Приложение къ десятичнымъ логарифмамъ.

Исследование свойствъ показательной функции.

774. Определение. Функция a^x , гдѣ a количество постоянное, а x — переменное, называется *показательной функцией*. Исследование свойствъ этой функции служить основаніемъ теоріи логарифмовъ.

Докажемъ, что если $a > 0$, то функция непрерывна на всемъ протяжении действительныхъ значеній x , соизмѣримыхъ или несоизмѣримыхъ, положительныхъ или отрицательныхъ. Исследование это подраздѣляемъ на двѣ части: $a > 1$ и $a < 1$.

775. Теорема. Если $a > 1$, функция a^x возрастаетъ непрерывно отъ 0 до $+\infty$, когда x возрастаетъ непрерывно отъ $-\infty$ до $+\infty$.

I. Во-первыхъ, пусть x измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, получая соизмѣримыя значенія.

1) Если эти значенія будутъ цѣлыя и положительныя, то мы имѣемъ I, § 749, уже доказано, что если $m > n$, то и $a^m > a^n$.

2) Пусть x получаетъ соизмѣримыя дробныя значенія $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\alpha'}{\beta'}$, и пусть $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha'}{\beta'}$. Отсюда: $\alpha\beta' > \alpha'\beta$, и такъ какъ это — числа цѣлыя, то по предыдущему: $a^{\alpha\beta'} > a^{\alpha'\beta}$. Извлекая изъ обѣихъ частей корень порядка $\beta\beta'$, мы не нарушимъ смысла неравенства, а потому $a^{\frac{\alpha}{\beta}} > a^{\frac{\alpha'}{\beta'}}$, или $a^x > a^{x'}$, что и требовалось доказать.

3) Дадямы показателю x отрицательныя значенія, цѣлыя или дробныя; пусть $-m > -n$, гдѣ m и n положительны. Изъ неравенства имѣемъ: $m < n$; а слѣд. $a^m < a^n$; раздѣливъ обѣ части на положит. количество $a^m \cdot a^n$, находимъ:

$$\frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^m}, \text{ или } a^{-n} < a^{-m}.$$

то же заключеніе.

II. Наконецъ, даемъ x -у несоизмѣримыя значенія, и прежде всего определимъ, что слѣдуетъ разумѣть подъ степенью съ несоизмѣримымъ показателемъ; напр., что означаетъ $a^{\sqrt{3}}$?

Возьмемъ рядъ приближеній къ $\sqrt{3}$, по недостатку и по избытку, точныхъ до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... $\frac{1}{10^n}$; получимъ два ряда

$$\begin{array}{cccc} 1,7 & 1,73 & 1,732 & \frac{a}{10^n} \\ 1,8 & 1,74 & 1,733 & \frac{a+1}{10^n} \end{array}$$

общимъ предѣломъ которыхъ, по опредѣленію, служить $\sqrt[3]{a}$.

Затѣмъ, напомнимъ два ряда степеней a съ этими показателями:

$$a^{1.7} \quad a^{1.73} \quad a^{1.732} \quad . \quad . \quad . \quad a^{10^1} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$a^{1.8} \quad a^{1.74} \quad a^{1.733} \quad . \quad . \quad . \quad a^{10^1} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Такъ какъ эти показатели соизмѣрны, то, по вышедоказанному, степени (1) идутъ возрастающъ; но существуетъ безчисленное множество состояній величины, имѣющихъ эти количества не могутъ достигнуть и превзойти: таковы, напр., соответствующія нмъ числа ряда (2). Необходимо заключить, что числа (1) стремятся къ нѣкоторому предѣлу L . Подобнымъ же образомъ убеждаемся, что числа ряда (2) стремятся, уменьшаясь, къ нѣкоторому предѣлу L' . Легко видѣть, что оба эти предѣла равны, ибо разность

$$a^{\frac{n+1}{10^n}} - a^{\frac{n}{10^n}}$$

стремится къ нулю, когда n приближается къ безконечности. Дѣйствительно, эта разность

$$a^{\frac{n+1}{10^n}} - a^{\frac{n}{10^n}} = a^{\frac{n}{10^n}} \sqrt[10]{a} - a^{\frac{n}{10^n}} = a^{\frac{n}{10^n}} (\sqrt[10]{a} - 1),$$

но мы доказали, что предѣломъ для $\sqrt[10]{a}$ служить 1: слѣд. рассматриваемая разность имѣетъ предѣломъ нуль, ибо множитель $a^{\frac{n}{10^n}}$ конеченъ (онъ, напр., меньше a^2).

Этотъ общій предѣлъ рядовъ (1) и (2) и представляютъ, по опредѣленію, въ видѣ $a^{\sqrt[10]{3}}$. Итакъ:

Степень съ несоизмѣримымъ показателемъ m отъ положительнаго числа a есть предѣлъ, къ которому стремятся степени этого числа, когда показатель стремится къ m , увеличиваясь или уменьшаясь.

Докажемъ теперь, что большому несоизмѣримому показателю (при $a > 1$) соответствуетъ и большая степень; напр.

$$a^{\sqrt[10]{3}} > a^{\sqrt[10]{2}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{2}{10^n}$ и $\frac{3}{10^n}$ суть приближенія къ $\frac{2}{10}$ и $\frac{3}{10}$, точныя до $\frac{1}{10^n}$ по недостатку, то:

$$a^{\frac{2}{10^n}} < \sqrt[10]{2} < a^{\frac{2+1}{10^n}} \quad \text{и} \quad a^{\frac{3}{10^n}} < \sqrt[10]{3} < a^{\frac{3+1}{10^n}}.$$

Слѣд., по предыдущему:

$$a^{\frac{2}{10^n}} < a^{\frac{3}{10^n}}.$$

а потому и предѣлы, *которые не равны*, не равны въ томъ же порядкѣ, ибо этотъ порядокъ не измѣняется, когда n неограниченно возрастаетъ.

III. *Измѣненія функціи a' непрерывны на всемъ протяженіи измѣненій x .*

Дадимъ конечному x_0 нѣкоторое приращеніе h , и докажемъ, что если это приращеніе будетъ неограниченно приближаться къ нулю, то и приращеніе k функціи y_0 будетъ также неограниченно приближаться къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ:

$$y_0 = a^{x_0}, \quad y_0 + k = a^{x_0+h},$$

сл.

$$k = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1).$$

a^{x_0} — величина конечная; остается доказать, что h можно взять настолько близкимъ къ нулю, что a^h будетъ какъ угодно близко къ 1, т.-е. что a^h стремится къ предѣлу 1.

Пусть $h > 0$; всегда можно найти такое цѣлое положительное число z , чтобы

$$z < \frac{1}{h} < z + 1.$$

ибо z есть частное, точное до 1, отъ раздѣленія $1 : h$, и это частное будетъ неограниченно возрастать по мѣрѣ того, какъ h будетъ приближаться къ нулю. Изъ предыдущаго неравенства выводимъ

$$\frac{1}{z+1} < h < \frac{1}{z};$$

откуда, по вышедоказанному:

$$a^{\frac{1}{z+1}} < a^h < a^{\frac{1}{z}}.$$

Но крайнія количества — то же, что $\sqrt[z]{a}$ и $\sqrt[z+1]{a}$; а эти корни, въ силу леммы III § 751, имѣютъ общимъ предѣломъ единицу, когда z неограниченно возрастаетъ; а слѣд. и a^h , то теор. § 186, имѣетъ тотъ же предѣлъ, т.-е. 1, когда h стремится къ нулю. Заключаемъ, что въ формулѣ для k второй множитель стремится къ 0, а сл. и k приближается къ тому же предѣлу, по мѣрѣ приближенія h къ нулю.

IV. *Когда x приближается къ ∞ то и a' стремится къ ∞ .*

Это предложеніе было уже доказано въ леммѣ I, § 749, для показателя цѣлаго. Пусть теперь показатель m есть число дробное или несоизмѣримое; это число будетъ заключаться между двумя послѣдовательными цѣлыми числами p и $p+1$, такъ что

$$a^p < a^m < a^{p+1}.$$

Но, по упомянутой леммѣ, a^p и a^{p+1} стремятся къ ∞ , когда p приближается къ ∞ , слѣд. и a^m стремится къ ∞ , когда m неограниченно возрастаетъ.

Итакъ: a^x , при $a > 1$, есть функція непрерывная, возрастающая отъ 0 до $+\infty$, когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

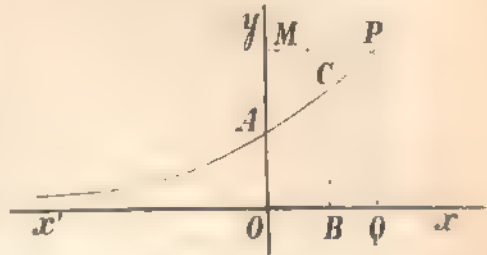
Этотъ результатъ можно представить въ формѣ слѣдующей таблицы:

Таблица А.

x	∞	$\dots < \dots$	0	$\dots < \dots$	1	$\dots < \dots$	$+\infty$
$y = a^x$	0	$\dots < \dots$	1	$\dots < \dots$	a	$\dots < \dots$	$+\infty$
	1			2			

Изображая измѣненія y ординатами кривой, найдемъ кривую, которой Ox' служить асимптотой, а ординаты растутъ неограниченно. Эта кривая пересѣкаетъ ось y въ такой точкѣ А, для которой $OA = 1$. Соответственно абсциссѣ $OB = 1$ имѣемъ ординату

$$y = BA = a.$$



Черт. 153.

776. ТЕОРЕМА. Если $0 < a < 1$, то при непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$, функція a^x непрерывно уменьшается отъ $+\infty$ до 0.

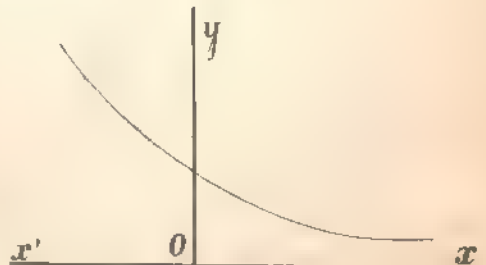
Въ самомъ дѣлѣ, когда $a < 1$, то можно положить $a = \frac{1}{a'}$, гдѣ $a' > 1$; слѣд. $a^x = \frac{1}{a'^x} = \frac{1}{a'^x}$. Если будемъ здѣсь увеличивать x отъ $-\infty$ до $+\infty$, то, по предыдущей теоремѣ, a'^x будетъ увеличиваться отъ 0 до $+\infty$, а слѣд. $\frac{1}{a'^x}$ будетъ уменьшаться отъ $\frac{1}{0}$ до $\frac{1}{\infty}$, т.е. отъ ∞ до 0. Что и здѣсь измѣненія функцій a^x непрерывны — это непосредственно вытекаетъ изъ предыдущаго

Таблица измѣненій будетъ слѣдующая:

Таблица В.

x	$-\infty$	$\dots < \dots$	0	$\dots < \dots$	1	$\dots < \dots$	$+\infty$
$y = a^x$	$+\infty$	$\dots > \dots$	1	$\dots > \dots$	a	$\dots > \dots$	0
	1			2			

Эти измѣненія наглядно изображены измѣненіями ординатъ кривой, для которой положительное направленіе Ox оси абсциссъ служить асимптотой.



Черт. 154.

Логарифмы.

777. Определение.—Имѣя ур—ніе $y = a^x$, можно предложить себѣ три вопроса:

1. По даннымъ основанію a и показателю x вычислить степень a^x или y . Дѣйствіе это называется возвышеніемъ въ степень.

2. По даннымъ: степени y и ея показателю x найти основаніе a . Дѣйствіе это есть извлеченіе корня и выражается законоположеніемъ: $a = \sqrt[x]{y}$.

3. По даннымъ: *степени* или числу y и основанію a найти показателя x . Показатель x называется *логарифмомъ* числа y при основаніи a . Итакъ: *логарифмомъ* данного числа называется *показатель степени, въ которую нужно возвысить основаніе, чтобы получить данное число.*

Слово логарифмъ обозначается знакомъ \log ; такимъ образомъ, чтобы показать, что x есть логарифмъ числа y при основаніи a , пишутъ: $x = \log_a y$. Напр. $\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, ибо $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и т. п.

778. Выборъ основанія.—Главное значеніе логарифмовъ заключается въ томъ, что они служатъ могущественнымъ средствомъ для облегченія вычисленій. Но чтобы они могли служить для этой цѣли, необходимо имѣть для вѣхъ положительныхъ чиселъ дѣйствительные логарифмы. Этому требованію удовлетворяетъ не всякое основаніе. И прежде всего легко видѣть, что *отрицательнаго числа нельзя брать за основаніе логарифмовъ*, ибо при такомъ основаніи не для вѣхъ положительныхъ чиселъ получаются дѣйствительные логарифмы. Такъ, ур—нію $(-2)^x = 8$ нельзя удовлетворить никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x .

Затѣмъ, 0 не можетъ быть принятъ за основаніе логарифмовъ, потому что вторая часть ур—нія $0^x = y$ при положительномъ x всегда даетъ нуль; при $x = 0$, $y = 0^0 = 0^{m-m} = \frac{0^m}{0^m} = \frac{0}{0}$, т. е. представляетъ неопредѣленность; а при отрицательномъ значеніи x , положивъ $x = -m$, получаемъ $y = 0^{-m} = \frac{1}{0^m} = \frac{1}{0} = \infty$. Такимъ образомъ, различныя степени нуля не воспроизводятъ всевозможныхъ положительныхъ чиселъ.

Обращаясь къ положительнымъ числамъ, замѣчаемъ, что единица не можетъ быть принята за основаніе логарифмовъ, потому что различныя степени единицы равны 1.

Взявъ за основаніе число, большее или меньшее 1, и возвышая его во всевозможныя дѣйствительныя степени отъ $-\infty$ до $+\infty$, мы, какъ видно изъ таблицъ А и В, §§ 775 и 776, получимъ всевозможныя положительные числа отъ 0 до $+\infty$, такъ что въ этихъ случаяхъ всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логарифмъ. Итакъ: *за основаніе логарифмовъ только и можно брать положительныя числа, большія или меньшія 1.*

779. Свойства логарифмовъ при основаніи большемъ 1. 1. *Всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логарифмъ, и только одинъ.* При изслѣдованіи функции $y = a^x$ (смъ таблицу А) мы видѣли, что если измѣнять x отъ $-\infty$ до $+\infty$, то y непрерывно возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$. Возьмемъ изъ этой строкѣ значенія y -на какою-либо, число y' ; функция y (или a^x), будучи непрерывна и измѣняясь чрезъ всю область положительныхъ чиселъ, придетъ, въ крайней мѣрѣ, разъ и чрезъ значеніе y' , при некоторомъ значеніи x пере-

мнѣнаго x ; но функція эта постоянно возрастаетъ, и потому *только одинъ разъ* пройдетъ презъ это значеніе y' . Это наглядно обнаруживается и кривая $y = a^x$ (черт. 153), въ самомъ дѣлѣ, пусть $y' = OM$; проведемъ параллель MP оси Ox , замѣчаемъ, что она встрѣтитъ кривую только въ одной точкѣ; логарифмъ числа y' будетъ абсцисса OQ точки встрѣчи P .

Итакъ: всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логарифмъ, и только одинъ. Высшая алгебра показываетъ, что кромѣ одного дѣйствительнаго логарифма всякое положительное число имѣетъ безчисленное множество мнимыхъ логарифмовъ.

2. *Отрицательныя числа не имѣютъ дѣйствительныхъ логарифмовъ.* Дѣйствительно, на всемъ протяженіи строки чиселъ (таблица А) въ ней падаютъ одни положительные числа.

3. *Логарифмы чиселъ, большихъ 1, положительны;* въ самомъ дѣлѣ, числамъ отъ 1 до $+\infty$ строки y соответствуютъ въ строкахъ x числа отъ 0 до $+\infty$.

4. *Логарифмы чиселъ, меньшихъ 1, отрицательны;* и въ самомъ дѣлѣ, числамъ отъ 0 до 1 таблицы А соответствуютъ въ строкахъ логарифмовъ значенія отъ $-\infty$ до 0.

5. *Логарифмъ нуля равенъ $-\infty$.*

6. *Логарифмъ единицы равенъ нулю.*

7. *Логарифмъ основанія равенъ единицѣ.*

8. *Логарифмъ $+\infty$ равенъ $+\infty$.*

780. Свойства логарифмовъ при основаніи меньшемъ 1. Подобно предыдущему, изученіе таблицы В прямо даетъ слѣдующіе результаты:

1. *Всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логарифмъ, и только одинъ.*

2. *Логарифмы чиселъ, большихъ 1, отрицательны, а чиселъ меньшихъ единицы — положительны.*

3. *Логарифмъ основанія равенъ единицѣ.*

4. *Логарифмъ единицы равенъ нулю.*

5. *Логарифмъ нуля равенъ $+\infty$.*

6. *Логарифмъ $-\infty$ равенъ $-\infty$.*

7. *Отрицательныя числа не имѣютъ дѣйствительныхъ логарифмовъ.*

781. Теоремы, на которыхъ основано употребленіе логарифмовъ въ вычисленіяхъ.

1. *Логарифмъ произведенія равенъ суммѣ логарифмовъ производителей.* — Пусть имѣемъ числа N, N', N'' , имѣющія логарифмами: x, x', x'' при одномъ и томъ же основаніи a .

Зависимость между числами и ихъ логарифмами выражается уравненіями

$$N = a^x, \dots (1) \quad N' = a^{x'}, \dots (2) \quad N'' = a^{x''}, \dots (3).$$

Перемноживъ ихъ, получаемъ уравненіе

$$NN'N'' = a^{x+x'+x''},$$

изъ котораго видно, что $x + x' + x''$ есть логарифмъ числа $NN'N''$:

$$\lg (NN'N'') = x + x' + x'';$$

но изъ данныхъ ур—ній имѣемъ: $x = \lg N$, $x' = \lg N'$, $x'' = \lg N''$; подстановка въ предыдущее ур—ніе дастъ, такимъ образомъ:

$$\lg (NN'N'') = \lg N + \lg N' + \lg N'',$$

и теорема доказана.

II. Логарифмъ частнаго равенъ логарифму дѣлимаго безъ логарифма дѣлителя.—Раздѣливъ ур—ніе (1) на (2), имѣемъ:

$$\frac{N}{N'} = \frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'},$$

откуда, по опредѣленію логарифма:

$$\lg \left(\frac{N}{N'} \right) = x - x' = \lg N - \lg N'.$$

Если $N = 1$, то $\lg N = 0$, и предыдущее равенство дастъ:

$$\lg \left(\frac{1}{N'} \right) = - \lg N',$$

т.е. логарифмъ дроби, имѣющей числителемъ 1, равенъ отрицательному логарифму знаменателя.

III. Логарифмъ степени съ какимъ угодно показателемъ равенъ произведенію показателя на логарифмъ возвышаемаго числа.—Возвысивъ обѣ части ур—нія (1) въ степень m , имѣемъ

$$N^m = (a^x)^m = a^{xm}, \quad \text{откуда} \quad \lg (N^m) = xm = m \cdot \lg N,$$

и теорема доказана.

IV. Логарифмъ корня равенъ логарифму подкореннаго числа, раздѣленному на показателя корня.—Извлекая изъ обѣихъ частей ур—нія (1) корни порядка p , имѣемъ:

$$\sqrt[p]{N} = \sqrt[p]{a^x} = a^{\frac{x}{p}}, \quad \text{откуда} \quad \lg \left(\sqrt[p]{N} \right) = \frac{x}{p} = \frac{\lg N}{p}.$$

Эти теоремы даютъ возможность значительно облегчать выполнение болѣе трудныхъ арифметическихъ дѣйствій. Для этого должны быть построены таблицы, содержащія логарифмы чиселъ. Имѣя такія таблицы, и зная, что логарифмъ произведенія равенъ суммѣ логарифмовъ производителей, мы можемъ умноженіе чиселъ свести на простѣйшее дѣйствие—сложеніе ихъ логарифмовъ такимъ образомъ мы опредѣлимъ \log произведенія, а для отысканія самаго произведенія останется взять изъ таблицъ число, соответствующее найденному логарифму. Дѣленіе чиселъ, при помощи теоремы II, сводится къ простѣйшему дѣйствію—вычитанію логарифмовъ; возвышеніе въ степень, при помощи теор. III, приводится къ умноженію, а извлеченіе корня, по теор. IV, къ дѣленію. Однимъ словомъ, при помощи логарифмовъ, дѣйствія высшаго порядка надъ числами приводятся къ дѣйствіямъ низшаго порядка надъ ихъ логарифмами.

782. Теорема. Если числа составляют прогрессию геометрическую, то их логарифмы составляют прогрессию арифметическую.

Пусть имеем геометрическую прогрессию

$$\therefore a : aq : aq^2 : aq^3 : \dots : aq^n.$$

Взявъ логарифмъ каждого члена, имеемъ:

$$\lg a; \lg a + \lg q; \lg a + 2 \lg q; \lg a + 3 \lg q; \dots; \lg a + n \lg q;$$

а это есть рядъ, составляющій арифметическую прогрессию съ разностью, равною $\lg q$.

Свойство это было взято *Неперомъ* за исходный пунктъ въ теоріи логарифмовъ.

783. Если надъ данными количествами, входящими въ составъ выраженія, подлежащаго вычисленію, указаны только дѣйствія дѣленія, умноженія, возведенія въ степень и извлеченія корней, то такое выраженіе м. б. вычислено съ помощію логарифмовъ. Пусть напр.

$$x = \frac{a^6 \times \sqrt[5]{c^9}}{b^2 \times \sqrt[4]{d^3 f^5}}.$$

Принимая теоремы о логарифмѣ дроби и т. д., послѣдовательно получаемъ:

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg \{ a^6 \times \sqrt[5]{c^9} \} - \lg \{ b^2 \times \sqrt[4]{d^3 f^5} \} \\ &= \lg a^6 + \lg \sqrt[5]{c^9} - (\lg b^2 + \lg \sqrt[4]{d^3 f^5}) \\ &= 6 \lg a + \frac{9}{5} \lg c - 2 \lg b - \frac{1}{4} (3 \lg d + 5 \lg f). \end{aligned}$$

Такимъ образомъ $\lg x$ будетъ извѣстенъ; а по $\lg x$ опредѣлится и соответствующее число, какъ скоро будутъ даны численные значенія a, b, c, d и f .

Дѣйствіе, имѣющее цѣлью составленіе выраженія для логарифма по данному выраженію для числа, называется логарифмированиемъ.

Обратно, по данному выраженію логарифма можно составить выраженіе для соответствующаго числа, пользуясь тѣми же теоремами. Пусть, напр., дано

$$\lg x = \frac{3}{4} [\lg(a+b) + \lg(a-b) + \lg(a^2+b^2)] - \frac{1}{3} \lg(1-a^2).$$

Послѣдовательно имеемъ:

$$\begin{aligned} \lg x &= \frac{3}{4} \lg(a+b)(a-b)(a^2+b^2) - \frac{1}{3} \lg(1-a^2) \\ &= \frac{3}{4} \lg[(a^2-b^2)(a^2+b^2)] - \frac{1}{3} \lg(1-a^2) \\ &= \frac{3}{4} \lg(a^4-b^4) - \frac{1}{3} \lg(1-a^2) = \lg \sqrt[4]{(a^4-b^4)^3} - \lg \sqrt[3]{1-a^2} \\ &= \lg \sqrt[12]{\frac{(a^4-b^4)^3}{1-a^2}}. \end{aligned}$$

Изъ равенства логарифмовъ заключаемъ о равенствѣ соответствующихъ чиселъ; такимъ образомъ, находимъ

$$x = \frac{\frac{4}{3} (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})}{\frac{1}{3} (1 - a^2)}.$$

784. Перемена основанія. — Пусть известны логарифмы числа при нѣкоторомъ данномъ основаніи a , и предложимъ себѣ вычислить логарифмы тѣхъ же чиселъ, взявъ другое основаніе b . Рѣшеніе этого вопроса основывается на слѣдующей теоремѣ:

Теорема. — *Отношеніе логарифмовъ двухъ чиселъ N и N' не зависитъ отъ основанія, т.-е. это отношеніе остается одинаково, каково бы ни было основаніе.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть логарифмы числа N при основаніяхъ a и b будутъ α и β ; а логарифмы числа N' при тѣхъ же основаніяхъ пусть будутъ α' и β' . По опредѣленію, имѣемъ

$$N = a^\alpha = b^\beta, \quad N' = a^{\alpha'} = b^{\beta'}.$$

Отсюда:

$$a = b^{\frac{\beta}{\alpha}} = b^{\frac{\beta'}{\alpha'}},$$

и слѣдовательно, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}$, или $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$, или, наконецъ,

$$\lg_a N = \lg_a N',$$

и теорема доказана. — Если положить здѣсь $N' = b$, то будетъ $\lg_b N' = \lg_b b = 1$, и пропорція дастъ:

$$\lg_b N = (\lg_a N) \times \frac{1}{\lg_a b} \dots (1)$$

т.-е. если построена таблица логарифмовъ при основаніи a , то изъ нея легко вывести логарифмы по другому основанію b : стоитъ только старые логарифмы помножить на дробь $\frac{1}{\lg_a b}$, равную единицѣ, деленной на \lg новаго основанія, взятый по старому. Этотъ постоянный множитель называется *модулемъ перехода* отъ старой системы къ новой.

Изобрѣтатель логарифмовъ, *Неперъ*, взявъ за основаніе построенной имъ системы несоизмѣримое число, равное приблизительно 2.718281828459045. . . Это число обыкновенно обозначаютъ буквою e ; а самые логарифмы называютъ *неперовыми*, или *натуральными*, или *гиперболическими*: они имѣютъ важное значеніе въ высшемъ анализѣ. Но для практическихъ вычисленій они неудобны; поэтому уже самъ Неперъ посоветовалъ своему современнику *Бриггу* вычислять новые логарифмы, принявъ за основаніе число 10. Этими послѣдними логарифмами и пользуются обыкновенно для практическихъ вычисленій, а называютъ *обыкновенными*, или *десятичными* логарифмами.

Примѣчаніе. Если въ равенствѣ (1) положимъ $N = a$, то, какъ будетъ $\lg_a N = \lg_a a = 1$, найдемъ соотношеніе

$$\lg_a b \times \lg_b a = 1,$$

часто употребляемое въ вычисленіяхъ.

785 Условія соизмѣрности логарифмовъ.—Зачѣмъ, что всякое число можно представить въ видѣ произведенія степеней его первоначальныхъ множителей, опредѣлимъ условія, при которыхъ логарифмъ даннаго числа N будетъ соизмѣримымъ числомъ, ограничиваясь разсмотрѣннемъ случая, когда основаніе цѣлое положительное число.

1. Требуется опредѣлить условія, при которыхъ цѣлое число N имѣетъ соизмѣримый логарифмъ $\frac{m}{n}$, т.-е. при какихъ условіяхъ возможно равенство $N = a^{\frac{m}{n}}$, или, по возвышеніи обѣихъ частей въ n -ую степень, равенство

$$N^n = a^m \dots (1).$$

Пусть основаніе a разлагается на первоначальные множители α, β, γ соответственно въ степеняхъ r, s, t , такъ что $a = \alpha^r \beta^s \gamma^t$; равенство (1) будетъ

$$N^n = \alpha^{mr} \beta^{ms} \gamma^{mt} \dots (2).$$

Такъ какъ вторая часть его дѣлится на α, β и γ , то и первая должна дѣлиться на тѣ же числа, иначе вышло бы, что дробь равна цѣлому. (Верхъ того N не можетъ содержать другихъ первоначальныхъ множителей, кромѣ α, β и γ , по той же причинѣ. Слѣд. должно положить $N = \alpha^{r_1} \beta^{s_1} \gamma^{t_1}$. Ур. (2) приметъ видъ:

$$\alpha^{nr_1} \beta^{ns_1} \gamma^{nt_1} = \alpha^{mr} \beta^{ms} \gamma^{mt}.$$

Чтобы это равенство было возможно, необходимо, чтобы было $nr_1 = mr$; $ns_1 = ms$; $nt_1 = mt$, откуда $\frac{r}{r_1} = \frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; заключаемъ: чтобы цѣлое число N при цѣломъ основаніи a имѣло соизмѣримый логарифмъ, необходимо, чтобы a и N состояли изъ одинаковыхъ первоначальныхъ множителей, и чтобы показатели этихъ множителей были пропорциональны между собою.

2. Пусть дана неправильная дробь $\frac{c}{d}$, гдѣ $c > d$. Пусть логарифмъ (вслучаѣ дробномъ—положительный) будетъ $=$ соизмѣримой дроби $\frac{m}{n}$; имѣемъ:

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{c}{d}, \quad \text{или} \quad a^m = \frac{c^n}{d^n}.$$

Но n -ая степень несократимой дроби $\frac{c}{d}$ есть также дробь несократимая, и слѣд. не можетъ равняться цѣлому числу a^m : допущеніе невозможно, а потому заключаемъ: при цѣломъ основаніи неправильная дробь не можетъ имѣть соизмѣримаго логарифма.

3. Пусть, наконецъ, данное число есть дробь правильная $\frac{c}{d}$, гдѣ слѣдуетъ, конечно, $c < d$. При $a > 1$ логарифмы правильныхъ дробей отрицательны; пусть этотъ отрицательный логарифмъ есть $-\frac{m}{n}$. Въ такомъ случаѣ

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{c}{d}, \quad \text{откуда} \quad a^m = \frac{d^n}{c^n}.$$

Такъ какъ a^n — число цѣлое, то предыдущее равенство возможно только при $c^n = 1$, или $c = 1$; но въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$a^n = d^n,$$

а такое равенство возможно только тогда, когда d и a состоятъ изъ одинаковыхъ первоначальныхъ множителей и показатели этихъ множителей пропорциональны. Итакъ:

При цѣломъ основаніи логарисмы правильныхъ дробей несоизмѣримы, за исключеніемъ такихъ дробей, у которыхъ числитель = 1, а знаменатель состоитъ изъ тѣхъ же первоначальныхъ множителей какъ и основаніе, а показатели этихъ множителей пропорциональны.

786. Приложение. Приложимъ эти изысканія къ случаю обыкновенныхъ или бригговыхъ логарисмовъ. Здѣсь основаніе равно $10 = 2 \cdot 5$. Слѣд., по доказанному, изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ только тѣ имѣютъ соизмѣримые логарисмы, которыя состоятъ изъ тѣхъ же первоначальныхъ множителей, какъ и основаніе, въ данномъ случаѣ, изъ 2 и 5, т.е. числа вида $2 \cdot 5^k$. Притомъ, r и s должны быть пропорциональны показателямъ основанія, т.е. должно быть: $r : 1 = s : 1$, или $r = s$. Такимъ образомъ, цѣлое число, имѣющее при основаніи $= 10$ соизмѣримый логарисмъ, имѣетъ видъ $2^r \cdot 5^r = (2 \cdot 5)^r = 10^r$, т.е. представляетъ точную степень 10-ти.

Затѣмъ, неправильныя дроби имѣютъ логарисмы несоизмѣримые; а изъ правильныхъ дробей только тѣ имѣютъ соизмѣримые логарисмы, у которыхъ числитель = 1, а знаменатель есть точная степень 10, т.е. дроби $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$

ГЛАВА L.

Вычисленіе логарисмовъ.—Ряды для показательной функции и логарисмическое.

787. Опредѣленіе предѣла $\left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]_{n=\infty}$. —Разсмотримъ сначала $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, и пусть, во-первыхъ, n проходить область натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, . . . до бесконечности. Формула бинома для цѣлаго положительнаго n даетъ

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) n} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \dots (A) \end{aligned}$$

Отсюда, во-первыхъ, видно, что каково бы ни было число $n > 1$, всегда $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > 2$. Во-вторыхъ, что по мѣрѣ того какъ n растетъ, каждый членъ разложенія замѣняется членомъ того же порядка, численно большимъ, и въ то же время число членовъ увеличивается: слѣд., $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ постоянно увеличивается вмѣстѣ съ n .

$$\left(1 + \frac{1}{1} \right)^1 < \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 < \left(1 + \frac{1}{3} \right)^3 < \left(1 + \frac{1}{4} \right)^4 < \dots$$

Если въ каждомъ членѣ разложения (1) откинуть дроби, стоящія въ скобкахъ $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{3}, \frac{3}{n}, \dots\right)$, то каждый членъ разложения увеличится, и слѣд.,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n}.$$

Тѣмъ болѣе вѣрно будетъ неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда видно, что при $n = \infty$ будетъ

$$\lim \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n < \lim \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right],$$

и какъ $\lim \left[2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right]_{n=\infty} = 3$, то заключаемъ, что

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

каково бы ни было цѣлое положительное число n .

Такимъ образомъ, функция $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ постоянно возрастаетъ съ увеличеніемъ n , но всегда остается между 2 и 3, слѣд., стремится къ некоторому предѣлу, лежащему между 2 и 3. Этотъ \lim обыкновенно обозначаютъ буквою e . Итакъ, при цѣломъ положительномъ ω , приближающемся къ ∞ :

$$\lim \left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega\right] = e.$$

Если ω не есть цѣлое число, но положительно, то всегда можно дать два цѣлыхъ положительныхъ послѣдовательныхъ числа m и $m + 1$, между которыми лежитъ ω ; тогда очевидна справедливость неравенствъ

$$1 + \frac{1}{m+1} < 1 + \frac{1}{\omega} < 1 + \frac{1}{m}.$$

Возвышая первый биномъ въ m -ую, второй въ степень ω третій въ степень $m + 1$, не нарушимъ смысла неравенствъ, а потому

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Умноживъ и раздѣливъ первое на $1 + \frac{1}{m+1}$, а третье разложивъ на множители, находимъ

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} < \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \cdot 1 + \frac{1}{m}.$$

Переходя къ предѣлу, увеличиваемъ ω до ∞ , тогда и m и $m + 1$ будутъ приближаться къ ∞ . По теоремѣ о предѣлѣ частнаго, имѣемъ

$$\lim \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} \right\}_{m=\infty} = \frac{\lim \left[\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \right]}{\lim \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)} = e,$$

ибо, по доказанному, для m целого, $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} = e$; $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$.
 зать, $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$.

Это означает, что $1 + \frac{1}{\omega}$ заключается между двумя переменными, имьщими общій предѣлъ e , слѣд. и

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) = e.$$

и въ томъ случаѣ, когда положительное число ω , приближающееся къ ∞ , не есть целое.

Если ω — число отрицательное, то можно положить $\omega = -(\rho + 1)$, гдѣ ρ — положительное, неограниченно возрастающее целое или дробное число. Имѣемъ:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\omega} &= 1 - \frac{1}{\rho + 1} = \frac{\rho}{\rho + 1} = \left[\frac{\rho}{\rho + 1} \right]^{1 - \frac{\rho}{\rho + 1}} = \left[\frac{\rho}{\rho + 1} \right]^{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho}}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Первый множитель приближается къ предѣлу e , второй къ 1, сл.

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) = e.$$

Такимъ образомъ, послѣднее равенство имѣетъ мѣсто при всякомъ неограниченно-возрастающемъ действительномъ ω .

Перейдемъ къ тому равенству дають другой видъ, подставляя $\frac{1}{\omega} = z$; имѣемъ:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + z\right)^{\frac{1}{z}} = e,$$

гдѣ z означаетъ количество, приближающееся къ нулю.

Теперь легко уже определить предѣлъ общаго выражения

$$\left(1 + \frac{z}{\omega}\right)^{\omega} = \left(1 + \frac{1}{\frac{\omega}{z}}\right)^{\frac{\omega}{z}},$$

гдѣ z — некоторое действительное количество.

Дроби $\frac{\omega}{z}$ вмѣстѣ съ ω стремятся къ ∞ , и потому, положивъ $\frac{\omega}{z} = \omega'$, откуда $\omega = \omega' z$, имѣемъ

$$\left(1 + \frac{z}{\omega}\right)^{\omega} = \left(1 + \frac{1}{\omega'}\right)^{\omega' z} = \left[\left(1 + \frac{1}{\omega'}\right)^{\omega'}\right]^z.$$

Но предѣлъ степени (z) переменнаго равенъ той же степени предѣла этого переменнаго, такъ что послѣднее выражение, въ предѣлѣ, даетъ e^z . Итакъ

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{\omega}\right)^{\omega} = e^z \dots (1).$$

788. Разложеніе e^z въ рядъ.—Послѣднее уравненіе показываетъ, что e^z есть предѣлъ, къ которому стремится $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$ при неограниченномъ увеличеніи m . Для нахождения этого предѣла нужно разложить $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$ по формулѣ бинома и зать, положить $m = \infty$.

По формулѣ (III) § 771, полагая m цѣлымъ и положительнымъ и $k > m$, имѣемъ:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots [m-(k-2)]}{1.2.3 \dots (k-1)} x^{k-1} + \frac{m(m-1) \dots [m-(k-1)]}{1.2.3 \dots k} x^k + \dots$$

$$= \frac{x^k}{1 - \left[\frac{mx}{k} \right]},$$

гдѣ z означаетъ положительную правильную дробь. Чтобы по этой формулѣ написать разложение для $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$, нужно, очевидно, положить $x = \frac{x}{m}$ и $k = z$. Найдемъ

$$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = 1 + z + \frac{1 - \frac{1}{m}}{1.2} z^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{1.2.3} z^3 + \dots$$

$$+ \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{k-2}{m}\right)}{1.2.3 \dots (k-1)} z^{k-1} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)}{1.2.3 \dots k} z^k + \dots$$

$$= \frac{z^k}{1 - \left[\frac{z}{k} \right]}.$$

Мы имеемъ предѣлъ $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$ при $m = \infty$; для этого увеличиваемъ неограниченно m , не имѣя ни произвольнаго цѣлаго числа k . Если переѣбныя равны, то равны и предѣлы ихъ, а потому приравняемъ предѣлы обѣихъ частей равенства. Предѣлъ лѣвой части есть e^z , а въ правой дроби $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{k-1}{m}$ имѣютъ общій предѣлъъ нуль; слѣд.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots + \frac{z^{k-1}}{1.2.3 \dots (k-1)} + \frac{1}{1.2.3 \dots k} \cdot \frac{z^k}{1 - \left[\frac{z}{k} \right]}, \quad (II)$$

причемъ $k > z$, $0 < p < 1$.

Такимъ образомъ, мы получили конечную строку для e^z , — съ остаточнымъ членомъ, но изъ нея уже легко вывести безконечный рядъ для e^z . Для этого переносимъ остаточный членъ въ первую часть:

$$e^z = \frac{p}{1 - \left[\frac{z}{k} \right]} + \frac{z^k}{1.2 \dots k} = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots + \frac{z^{k-1}}{1.2 \dots (k-1)} + \dots \quad (III)$$

и увеличиваемъ k , означающее число членовъ второй части, до безконечности. Выше мы доказали, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{z^k}{1.2.3 \dots k} \right] = 0$, слѣд. предыдущее равенство обращается въ безконечный рядъ

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots \quad (IV)$$

гдѣ z какая угодно конечная величина.

789. Рядъ для e ; опредѣленіе числовой величины e ; несоизмѣримость числа e .

Если, въ частности, положимъ $z = 1$, то ряды (II) и (IV) дадутъ.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots (k-1)} + \frac{1}{1.2.3 \dots (k-1)} \cdot \frac{p}{k-1} \quad (V)$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots \quad (VI)$$

Съ этими рядами связаны существенныя замѣчания. Во-первыхъ, что касается формулы (V), то она служить для численнаго опредѣленія e , причемъ точность можетъ быть доведена до какой угодно степени выборомъ достаточно большого значенія для k . Такъ, при $k = 11$ найдемъ.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} = 2,7182818011,$$

причемъ остатокъ $= \frac{1}{1.2.3 \dots 10} \cdot \frac{1}{10} = 0,0000000276$, слѣд. если дадимъ e его наименьшее значеніе 0, а затѣмъ наибольшее его значеніе 1, то найдемъ

$$2,7182818011 < e < 2,7182818287;$$

откуда, взявъ $e = 2,7182818$, будемъ имѣть его величину точно до 7-го десятичнаго знака включительно. Это число было принято *Неперомъ* за основаніе предложенной имъ системы логарифмовъ, по причинѣ, которая вскорѣ будетъ указана.

Съ помощью формулы (VI) рѣшается вопросъ о томъ, есть ли e число соизмѣрное или несоизмѣрное. Сумма ряда VI, начиная съ третьяго члена, т. е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots \quad (VII)$$

меньше суммы ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \frac{1}{2.2.2.2} + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 1;$$

слѣд. сумма (VII) есть правильная дробь. Допустимъ, что эта дробь соизмѣрна и $= \frac{p}{q}$, т. е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots = \frac{p}{q},$$

гдѣ p и $q > p$ цѣлыя положительныя числа. Умноживъ обѣ части на $2.3.4 \dots q$, получимъ

$$3.4.5 \dots q + 4.5.6 \dots q + 5.6 \dots q + \dots + 1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots = p.2.3.4 \dots (q-1)$$

Сумма членовъ до $\frac{1}{q+1}$ есть сумма цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, дающая некоторое цѣлое положительное число M ; вторая часть также есть цѣлое положительное число, которое назовемъ N ; сл.

$$M + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots = N$$

Но сумма $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots$ меньше $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots = \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{q+1}\right) = \frac{1}{q}$, а какъ $q > 1$, то рассматриваемая сумма меньше 1. Такимъ образомъ, цѣлое число M , сложенное съ правильною дробью, должно давать цѣлое число N , но это невозможно, а потому сумма ряда (VI) не можетъ равняться никакой соизмѣримои дроби, а сл. не есть число несоизмѣрное.

Приведенное доказательство несоизмѣрности числа e принадлежитъ *Сте-вено*.

790. Разложение a^x . Мы нашли разложение показательной функции съ основанием e , пусть основание будет какое угодно число a . Положив $e^x = a^x$, и взявъ от обеих частей логарифм по какому угодно основанию, получимъ

$$x \lg e = x \lg a, \text{ откуда } e = \frac{x \lg a}{\lg e}.$$

Подставивъ въ формулу (IV) a^x вмѣсто e^x , и $\frac{x \lg a}{\lg e}$ вмѣсто x , найдемъ

$$a^x = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{x \lg a}{\lg e} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x \lg a}{\lg e} \right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x \lg a}{\lg e} \right)^3 + \dots \quad (\text{VII})$$

Основание, по которому взяты логарифмы, здѣсь совершенно произвольно, возьмемъ за основание, и замѣтимъ, что въ такомъ случаѣ $\lg_e e = 1$, найдемъ (условившись обозначать Неперовы логарифмы характеристикой h)

$$a^x = 1 + xha + \frac{(xha)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(xha)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (\text{IX})$$

Взявъ за основание a , найдемъ рядъ

$$a^x = 1 + \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{x}{\lg_a e} \right) + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{\lg_a e} \right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{\lg_a e} \right)^3 + \dots \quad (\text{X})$$

Подставивъ выводу имѣеть то значеніе, что даетъ возможность находить число по какому логарифму, въ самомъ дѣлѣ, въ ур-ніи $a = y$ имѣемъ $x = \lg y$; слѣд.

$$y = 1 + \frac{1}{1} \left(\lg_a y \right) + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\lg_a y \right)^2 + \dots \quad (\text{XI})$$

Въ случаѣ $a = e$ имѣемъ:

$$y = 1 + \lg y + \frac{1}{1 \cdot 2} (\lg y)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\lg y)^3 + \dots \quad (\text{XII})$$

Отсюда вѣдно, что логарифмическая система съ основаниемъ e есть прѣстѣнная, а потому наиболѣ естественная; слѣдствіе этого она и названа *натуральной*.

791. Логарифмическіе ряды. Переходнымъ пунктомъ послужить $\lim_{b \rightarrow 0} (a^b - 1)$ при $b \rightarrow 0$

Пусть b означаетъ число, приближающееся къ нулю; тогда a^b будетъ имѣть предѣломъ 1, а разность $a^b - 1$ нуль, поэтому можно положить $a^b - 1 = \delta$, и δ считать вмѣстѣ съ b . Написавъ это ур-ніе въ видѣ

$$a^b = 1 + \delta, \text{ заключаемъ, что } b = \lg_a (1 + \delta).$$

Раздѣливъ обѣ части ур-нія $a^b - 1 = \delta$ на b , найдемъ выраженіе, предѣлъ котораго имѣемъ, именно

$$\frac{a^b - 1}{b} = \frac{\delta}{b} = \frac{\delta}{\lg_a (1 + \delta)} = \frac{1}{\lg_a (1 + \delta)} = \frac{1}{\lg_a \left[(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} \right]}.$$

Переходя къ предѣлу, полагаемъ $b = 0$ вмѣстѣ съ $\delta = 0$; въ первой части получимъ неопредѣленность $\frac{0}{0}$, а послѣднее выраженіе раскроетъ истинное значеніе этой неопредѣленности; именно получимъ

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{a^b - 1}{b} = \frac{1}{\lg_a e} \dots (1)$$

Это равенство можно представить в более удобной формѣ, принявъ за основаніе логарифмовъ число e . Логарифмируя обѣ части равенства $a = e^{la}$ по основанию a , находимъ

$$1 = la \cdot \lg_a e, \text{ или } \frac{1}{\lg_a e} = la.$$

Подстановка въ (1) дастъ

$$\lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^x - 1}{a - 1} = la$$

Положивъ $a = 1 + x$, имѣемъ

$$l(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x} = 1.$$

откуда видна возможность примѣненія биномальнаго ряда для разложенія $l(1+x)$. При разложеніи $(1+x)^x$ будемъ разумѣть подъ x некоторую положительную или отрицательную дробь; слѣд. x должны подчинить условію $-1 < x < 1$. Примѣняя формулу (V) остатка биномальнаго ряда, т.-е. взявъ

$$k = [x], \quad |x| < 1, \quad 0 < x < 1,$$

имѣемъ

$$(1+x)^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} x + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{x(x-1) \dots [x-(k-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} x^{k-1} + \frac{x(x-1)(x-2) \dots [x-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} x^k.$$

Перенесъ 1 въ первую часть и раздѣливъ уравненіе на x , получимъ

$$(1+x)^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} x + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{x(x-1)(x-2) \dots [x-(k-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} x^{k-1} + \frac{x(x-1)(x-2) \dots [x-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} x^k.$$

Переходя къ предѣлу, т.-е. полагая $x \rightarrow 0$, и замѣчая, что равенство переменныхъ ведетъ за собою равенство ихъ предѣловъ, причемъ предѣлъ первой части $= l(1+x)$, получаемъ:

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \dots + \frac{(-1)^{k-2}}{k-1} x^{k-1} - \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{1-x}.$$

Это — рядъ конечный, для получения безконечнаго ряда переносимъ остатокъ въ первую часть:

$$l(1+x) = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{1-x} = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \dots + \frac{(-1)^{k-2}}{k-1} x^{k-1} +$$

и заставляемъ произвольное цѣлое k , означающее число членовъ, возрасти до безконечности. Такъ какъ x есть правильная дробь (положит. или отрицат.), то $\lim x^k = 0$, такъ что въ предѣлѣ первая часть обратится въ $l(1+x)$, а вторая часть безконечный рядъ находимъ разложеніе

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \dots \quad (2)$$

$$-1 < x < +1.$$

Рядъ этотъ впервые встрѣчается у *Меркатора* (1686). Если въ формулѣ (2) вмѣсто x подставимъ $-x$, то получимъ:

$$l(1-x) = -x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 - \dots \quad (3)$$

Такъ какъ въ рядахъ (2) и (3) x есть правильная дробь, то они могутъ служить только для вычисления логарифмовъ чиселъ, меньшихъ 2. Чтобы получить ряды для вычисления логарифмовъ какихъ угодно чиселъ, притомъ ряды съ наибольшею сходимостью, вычтемъ формулу (3) изъ (2); получимъ

$$l(1-x) = l(1+x) - l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots\right] \dots (4)$$

рядъ, сходящійся при $-1 < x < +1$.

Положивъ $\frac{1+x}{1-x} = z$, откуда $x = \frac{z-1}{z+1}$, получимъ изъ ур. (4) следующее

$$l_2 = 2\left[\frac{z-1}{z+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 - \dots\right] \dots (5)$$

иноемъ мѣсто при всякомъ положительномъ z , ибо въ такомъ случаѣ x всегда будетъ правильною дробью. При небольшомъ z формула (5) всего удобнѣе, такъ напр. при $z=2$ получимъ:

$$l_2 = 2\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \dots\right].$$

Если знакъ, заключенный въ скобки, принять на членѣ $\frac{1}{m.3^m}$, гдѣ m некое тѣе нечетное число, то остатокъ

$$\frac{1}{(m+2).3^{m+2}} + \frac{1}{(m+4).3^{m+4}} + \frac{1}{(m+6).3^{m+6}} - \dots$$

будетъ меньше

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m+2).3^{m+2}} \left\{ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots \right\} = \\ & \frac{1}{(m+2).3^{m+2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{8(m+2).3^m}. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, если z будетъ неизвѣстной правильной положительной дробью, то

$$l_2 = 2\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \dots + \frac{1}{m.3^m}\right] + \frac{z}{4(m+2).3^m}.$$

Послѣдовательнымъ нахожденіемъ степеней $\frac{1}{3}$ получимъ, что остатокъ $\frac{1}{4.17.3^{15}} = 0.000000001$, слѣд. положивъ $m=15$, получимъ величину l_2 вѣрно до 8 десятичныхъ знаковъ, именно: $l_2 = 0.69314718$.

Если извѣстны la , то найдемъ $l(a+b)$ на основаніи замѣчанія что

$$l(a+b) = l\left[a\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right] = la + l\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

примемъ послѣдній l можно разложить по формулѣ (2), если только абсолютная величина b меньше a ; найдемъ

$$l(a+b) = la + \frac{b}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \dots$$

рядъ сходящійся при $a^2 > b^2$.

Таким образом можно, напр., найти I_3 , положив $a = 2$, $b = 1$ и воспользовавшись уже вычисленною величиною I_2 .

Более удобная формула для вычисления $I(a + b)$ получается из замечания, что

$$I(a + b) = Ia + I\left(1 - \frac{b}{a}\right) = Ia + I\left\{\frac{1 + \frac{b}{2a+b}}{1 - \frac{b}{2a+b}}\right\},$$

разложив последний I по формуле (4), получим

$$I(a + b) = Ia + 2\left\{\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \dots\right\}. \quad (6)$$

ряд сходится при всех положительных значениях a и b , потому что тем $\frac{b}{2a+b}$ будет правильною дробью. Положив $a = 2$, $b = 1$, получим

$$I_3 = I_2 + 2\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^5 + \dots\right].$$

Приведя ряд на m -ой степени, можем определить остаток вышеуказанным способом, и найдем, что он меньше

$$\frac{1}{24(m+2)} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^m.$$

При $m = 9$ остаток будет так мал, что не повлияет на 8-ое десятичное место; это даст: $I_3 = 1,09861229$, и т. д.

Вычисление обыкновенных логарифмов. Модуль — Построив указанным путем таблицы натуральных логарифмов, можно из них без труда вывести логарифмы по какой угодно системѣ. Для этого надо натуральные логарифмы помножить на модуль, равный, какъ известно, $\frac{1}{M_a}$, его обозначаютъ чрезъ M_a . Для обыкновенных логарифмов $a = 10$; $I10 = I2 + I5 = 2,30258509$; следовательно $M_{10} = \frac{1}{I10} = 0,43429448$. На это число и нужно множить натуральные логарифмы для вычисления обыкновенных.

792. ТЕОРЕМА, на которой основано употребленіе таблицъ пропорциональных частей.

Изъ формулы (6) предыдущаго § имѣемъ

$$I(a + b) = Ia + I\left(\frac{a+b}{a}\right) = 2\left\{\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\frac{b^3}{(2a+b)^3} + \dots\right\}.$$

Для получения логарифма по другой системѣ, напр. по десятичной, надо этотъ логарифмъ помножить на модуль M_{10} , умножая обѣ части на M_{10} , получимъ

$$M_{10} I\left(\frac{a+b}{a}\right), \text{ или } I_{210}\left(\frac{a+b}{a}\right) = 2M_{10}\left\{\frac{b}{2a+b} + \dots\right\}$$

Удержавъ здѣсь только первый членъ $\frac{b}{2a+b}$ и обративъ его дѣленіемъ въ $\frac{b}{2a} - \frac{b^2}{2a(2a+b)}$, получимъ приближительную формулу

$$I_{210}(a+b) - I_{210}a = \frac{b \cdot M_{10}}{a} - \frac{b^2 \cdot M_{10}}{a(2a+b)}.$$

При $b < 1$ и $a > 10000$ второй членъ меньше 0,0000000002, а потому можно имъ пренебречь; отъ этого получимъ:

$$\lg(a+b) = \lg a + \frac{b \cdot M_{10}}{a}.$$

Подставивъ въ эту формулу вмѣсто b другое число $b' < 1$, будемъ имѣть

$$\lg(a+b') = \lg a + \frac{b' \cdot M_{10}}{a}.$$

Разсклывъ это равенство на предыдущее, имѣемъ пропорцію

$$\frac{\lg(a+b') - \lg a}{\lg(a+b) - \lg a} = \frac{b'}{b}.$$

Слѣд. разности между логарифмами пропорциональны разностямъ между числами, если только разности чиселъ не превышаютъ 1, а числа не меньше 10000, ибо тогда при этихъ условіяхъ и могла быть установлена послѣдняя пропорція.

ГЛАВА LI.

4) десятичныхъ логарифмовъ. — Ихъ отличительныя свойства. — Расположеніе и употребленіе таблицъ. Вычисленія при помощи логарифмовъ.

Отличительныя свойства десятичныхъ логарифмовъ.

793. Въ этихъ логарифмахъ число N связано съ своимъ логарифмомъ x показателемъ уравненія $10^x = N$. Такъ какъ здѣсь основаніе больше единицы, то логарифмы чиселъ, большихъ 1, положительны, логарифмы же чиселъ, меньшихъ 1, отрицательны; затѣмъ, логарифмъ основанія равенъ 1, а $\lg 1 = 0$.

794. Логарифмы чиселъ, большихъ 1. Возвышая 10 въ цѣлыя положительныя степени, имѣемъ:

$$10^0 = 1; 10^1 = 10; 10^2 = 100; 10^3 = 1000; 10^4 = 10000; \dots; 10^n = 10^n.$$

Отсюда, замѣчая, что показатели основанія 10 суть логарифмы вторыхъ членовъ, имѣемъ:

$$\lg 1 = 0; \lg 10 = 1; \lg 100 = 2; \lg 1000 = 3; \lg 10000 = 4; \dots; \lg 10^n = n.$$

Заключаемъ, что логарифмъ числа, состоящаго изъ 1 съ нулями, т.-е. точной степени 10, равенъ числу нулей при единицѣ. Эти точныя степени 10 суть единственныя числа, большія 1, которыхъ логарифмы соизмѣримы; всѣ остальные числа большія 1 (цѣлыя и неправильныя дроби), какъ мы уже знаемъ, имѣютъ логарифмы несоизмѣримые, которые вычислить можно только приблизительно. Ихъ обыкновенно выражаютъ десятичными дробями.

Пусть, напр., имѣемъ число 452,48. Число это больше 100, но меньше 1000, слѣд. его логарифмъ содержится между $\lg 100$ и $\lg 1000$, т.-е. между 2 и 3, и потому равенъ 2-й несоизмѣримая прав. дробь. Цѣлое число 2 называется

характеристикой, а дробь — мантиссой. Из предыдущаго примѣра заключаемъ, что характеристика логарифма числа большего 1, равна числу цифръ безъ 1 въ цѣлой части данного числа.

Докажемъ, что это правило для опредѣленія характеристики логарифма даннаго числа — общее. Пусть число A содержитъ въ своей цѣлой части n цифръ; въ такомъ случаѣ

$$10^{n-1} \leq A < 10^n,$$

ибо 10^{n-1} и 10^n суть наименьшія числа съ n и $n+1$ цифрами.

Отсюда

$$n-1 \leq \lg A < n,$$

такъ какъ большему числу соответствуетъ и больший логарифмъ. Итакъ, цѣлая часть $\lg A$ равна $n-1$, т. е. числу цифръ безъ единицы въ цѣлой части числа.

795. Логарифмы чиселъ, меньшихъ 1. Возвышая 10 въ цѣлыя отрицательныя степени, находимъ:

$$10^{-1} = \frac{1}{10}; \quad 10^{-2} = \frac{1}{100}; \quad 10^{-3} = \frac{1}{1000}; \quad \dots; \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n}.$$

Отсюда:

$$\lg \frac{1}{10} = -1; \quad \lg \frac{1}{100} = -2; \quad \lg \frac{1}{1000} = -3; \quad \dots; \quad \lg \frac{1}{10^n} = -n$$

След. логарифмъ дроби, которой числитель — 1, а знаменатель есть точная степень 10, совпадаетъ и равенъ отрицательному числу нулей знаменателя. Всѣ остальные числа, меньшія 1, какъ доказано, имѣютъ логарифмы несоизмѣримые и отрицательные.

Эти отрицательные логарифмы представляютъ въ видѣ бинама, котораго цѣлый членъ отрицателенъ, а дробный положителенъ. Пусть, напр., данъ отрицательный логарифмъ

$$-3,4827129.$$

Разбивъ его на два члена: $-3-0,4827129$, вычтемъ и прибавимъ 1; дадимъ логарифму видъ:

$$-4+(1-0,4827129), \quad \text{или} \quad -4+0,5172871.$$

Очевидно, разность между 1 и десятичною дробью получимъ, вычтя всѣ десятичныя цифры изъ 9, исключая послѣднюю значащую цифру (справа, которую вычитаемъ изъ 10. Преобразованный бинамъ условимся писать въ видѣ 4,5172871, помѣщая знакъ (—) надъ цѣлою частью, къ которой онъ относится; цѣлая часть называется *отрицательною характеристикой*.

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ мантисса есть положительная десятичная часть логарифма, а характеристика всегда цѣлое число, положительное, либо отрицательное, смотря по тому, больше данное число единицы, или меньше ея.

Примѣчаніе. Разность между 1 и дробью 0,4827129 называется *дополненіемъ* этой дроби до 1. Вообще дополненіемъ числа до 1, 2, 3, . . . 10 называется разность между 1, 2, 3, . . . 10 и даннымъ числомъ. Чтобы

получить дополнение логарифма, надо последнюю цифру мантиссы вычесть из 10, а остальные ее цифры из 9. Употребление дополнений дает возможность избежать вычитания логарифмов, заменяя это действием прибавления их дополнений: это особенно выгодно в тех случаях, когда приходится делать несколько вычитаний.

Отрицательная характеристика логарифма положительного числа, меньшего 1, содержит столько отрицательных единиц, сколько наложится нулей слева от первой значущей цифры числа, включая само 0 целых.

В самом деле, пусть будет число A , имеющее слева от первой значущей цифры n нулей, имеем:

$$\frac{1}{10^n} \leq A < \frac{1}{10^{n-1}},$$

ибо значущие цифры числа начинаются с десятичного знака порядка n . Отсюда

$$-n \leq \lg A < -(n-1),$$

ибо большему числу принадлежит и больший логарифм.

Заключаем, что $\lg A$ равен $(-n)$, или этому числу, увеличенному положительною правильной дробью, ибо этот логарифм меньше $-n+1$; иначе говоря,

$$\lg A = -n + k, \quad \text{где } 0 < k < 1;$$

след. $(-n)$, по определению, и есть *отрицательная характеристика* $\lg A$. Так, логарифмы чисел 0,529 и 0,00743 имеют отрицательные характеристики: -1 и -3 .

796. Если число увеличим в 10, 100, 1000, . . . , вообще в 10^p раз, то характеристика логарифма его увеличивается на 1, на 2, . . . , вообще, на p единиц, мантисса же останется без переменны.

В самом деле, пусть

$$\lg A = k + m, \quad 0 < m < 1,$$

где k — характеристика, положительная или отрицательная, а m — мантисса логарифма A . Имеем

$$\lg(A \cdot 10^p) = \lg A + p = k + m + p = (k + p) + m;$$

но p — число целое, след. и $(k + p)$ есть целое, положительное или отрицательное, число; и как $0 < m < 1$, то $(k + p)$ есть характеристика, а m — мантисса логарифма числа $A \cdot 10^p$. Итак, мантисса осталась без переменны, а характеристика увеличилась p единицами.

797. Если число уменьшим в 10, 100, 1000, . . . , вообще, в 10^p раз, то характеристика логарифма уменьшится на 1, на 2, на 3, . . . , вообще, на p единиц, мантисса же останется без переменны.

Въ самомъ дѣлѣ, $\lg \frac{A}{10^p} = \lg A - \lg 10^p = k + m - p = (k - p) + m$, т. е. характеристика уменьшилась p единицами.

Отсюда слѣдуетъ, что обѣ части логарифма, *характеристики* и *мантисса*, суть функціи, резко отличающіяся между собою. Мантисса зависитъ отъ абсолютнаго значенія цифръ и отъ порядка, въ которомъ онѣ слѣдуютъ одна за другою; характеристика же зависитъ только отъ положенія запятой, т. е. отъ относительнаго значенія цифръ. Отъ перемѣщенія запятой мантисса не измѣняется; измѣняется только характеристика.

Расположеніе и употребленіе таблицъ логарифмовъ.

798. Рассмотримъ употребленіе таблицъ логарифмовъ *Бремекера*. Эти таблицы содержатъ логарифмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 100000, вычисленные съ семью десятичными знаками; такимъ образомъ изъ этихъ таблицъ можно прямо брать логарифмы чиселъ одно-, дву-, . . . , пятизначныхъ.

799. Расположеніе таблицъ. — Границы отъ второй до пятой включительно содержатъ логарифмы чиселъ отъ 1 до 1000, причемъ въ таблицахъ (какъ и далѣе) помѣщены только мантиссы, такъ какъ характеристику легко опредѣлить по числу цифръ числа. Колонны подъ литерою N содержатъ числа, противъ которыхъ подъ знакомъ lg исходятся мантиссы соответствующихъ логарифмовъ. Съ шестой до 185 страницы расположеніе таблицъ таково: въ колоннѣ подъ литерою N находятся первыя четыре цифры чиселъ, пятая же цифра помѣщена въ первой горизонтальной строкѣ: 0, 1, 2, . . . , 9; мантиссы же расположены такимъ образомъ: такъ какъ первыя три цифры мантиссы одинаковы для всѣхъ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ логарифмовъ чиселъ, то онѣ написаны одинъ разъ для всѣхъ этихъ чиселъ, противъ наименьшаго числа колонны N, къ которой онѣ принадлежатъ, и въ вертикальной колоннѣ подъ цифрою 0. Послѣдніе четыре знака мантиссы помѣщены противъ четырехъ первыхъ цифръ числа и въ вертикальной колоннѣ, имѣющей въ заголовкѣ пятую цифру числа. Сверхъ того, всѣ страницы, начиная съ 6-й, содержатъ таблички подъ литерами P. P: это — *таблички пропорциональныхъ частей*, употребленіе которыхъ будетъ указано въ своемъ мѣстѣ.

800. Употребленіе таблицъ. Помощію таблицъ рѣшаются два вопроса: 1) о нахожденіи логарифма даннаго числа и 2) о нахожденіи числа, соответствующаго данному логарифму.

Первый вопросъ.

Нахожденіе логарифма цѣлаго числа.

801. Первый случай: данное число находится въ таблицахъ. Пусть требуется найти $\lg 36459$. На стр. 58 находимъ первыя три цифры мантиссы: 561; послѣднія же четыре цифры ея помѣщены въ горизонтальной строкѣ противъ числа 3645 и въ вертикальной колоннѣ подъ цифрою 9, именно: 8048; характеристика же логарифма, по § 794, равна 4, слѣд. $\lg 36459 = 4.5618048$.

Пусть еще требуется найти $\lg 4886$; первыя три цифры мантиссы (стр. 83) суть 688; для послѣднихъ четырехъ, на пересѣченіи горизонт. строки противъ числа 4886 съ вертик. колонною подъ цифрою 8, находимъ 0246; черга най-

первою изъ этихъ цифръ показываетъ, что пренебрегающая цифра (8) мантиссы должна быть увеличена на 1. Такимъ образомъ имѣемъ: $\lg 48868 = 4,6890246$.

Кладя за пятью значущими цифрами числа слѣдуютъ нули, напр. 48868000, т. е. замѣчая, что это число больше 48868 въ 10000 разъ, на основаніи § 796, заключаемъ, что его логарифмъ больше логарифма 48868 на 3 единицы, такъ что $\lg 48868000 = 7,6890246$.

802 Второй случай: данное число не содержится въ таблицѣ. Пусть требуется найти \lg числа, содержащаго болѣе пяти цифръ, напр. числа 41592687. Такъ какъ логарифма этого числа нѣтъ въ таблицѣ, то отделимъ отъ правой руки къ лѣвой столько десятичныхъ цифръ, чтобы слѣва отъ запятой получилось пятизначное число; такимъ образомъ имѣемъ 41592,687. Это число, будучи въ 10000 разъ меньше даннаго, имѣетъ логарифмъ съ тѣ же мантиссою, какъ и заданное число. Находимъ мантиссу логарифма числа 41592 687. Число это заключается между 41592 и 41593, откуда изъ таблицъ имѣемъ, что логарифмъ его содержится между

$$\lg 41592 \quad 4,6190098 \quad \text{и} \quad \lg 41593 \quad 4,6190202.$$

Разность между числами 41592 и 41593 равна 1, а между соответствующими логарифмами — составляетъ 0,0000104. Отсюда видно, что если къ ближайшему меньшему числу придадимъ 1, то къ соответствующему логарифму слѣдуетъ прибавить 0,0000104. Но намъ нужно ближайшее м. ч. увеличить не на полную единицу, а на 0,687; спрашивается: на сколько соответственно этому придется увеличить ближ. меньш. логар. 4,6190098? Для рѣшенія вопроса замѣчаемъ, что по § 792: если разности между числами не превосходятъ 1 (что у насъ и есть), то разности между логарифмами соответствующихъ чиселъ, большихъ 10000, пропорциональны разностямъ между числами. Основываясь на этомъ и называя искомую разность между $\lg 41592,687$ и $\lg 41592$ буквою x , имѣемъ пропорцію

$$r : 0,0000104 = 0,687 : 1, \quad \text{откуда} \quad r = 0,0000104 \times 0,687.$$

Умноженіе этихъ дробей дѣлается сокращенно при помощи слѣдующей таблички пропорциональныхъ частей (стр. 69).

104	
1 104	Въ ней помѣщены сокращенно, для сбереженія мѣста, произведе-
2 208	денія 104 десятичными на 0,1; 0,2; . . . 0,9; причѣмъ
3 312	точками въ этихъ произведеніяхъ отдѣлены десятичные доли
4 416	отъ стотысячныхъ долей. Такимъ образомъ эта табличка постав-
5 520	лена вмѣсто слѣдующей:
6 624	
7 728	
8 832	
9 936	

0,0000104
0,1 0,0000104
0,2 0,0000208
0,3 0,0000312
0,4 0,0000416
0,5 0,0000520
0,6 0,0000624
0,7 0,0000728
0,8 0,0000832
0,9 0,0000936

При помощи ея можно прямо выписать частныя произведенія дроби 0,0000104 на 0,6, затѣмъ на 0,08 и наконецъ на 0,007. Первое изъ этихъ произведеній прямо беремъ изъ таблички, отбросивъ стотысячныя доли точкою, что даетъ 0,00000624. Уменьшая произведеніе 0,0000104 на 0,8, т. е. 0,00000832 въ 10 разъ, имѣемъ произведеніе табличной разности на 0,08 или 0,000000832. Наконецъ, уменьшивъ произведеніе табл. разн. на 0,7 во сто разъ,

имѣемъ произведеніе ея на 0,007, именн 0,0000000,728. Сложивъ эти частныя произведенія, имѣемъ

$$0,0000104 \times 0,687 = 0,0000071,448.$$

Это-то произведеніе и нужно прицать къ логариому блжж. мен. числа, для полученія $\lg 41592,687$; имѣемъ

$$\lg 41592,628 = 4,6190169,448.$$

Цифры 448, слѣдующія за десятиmillionными, откидываемъ, такъ какъ табличныя мантиссы имѣютъ только 7 десятичн. знаковъ; притомъ, если первая изъ отбрасываемыхъ цифръ произведенія меньше 5, какъ въ нашемъ случаѣ, то послѣднюю сохраненную цифру произведенія оставляемъ безъ перемены; въ противномъ случаѣ, послѣднюю сохраненную цифру произведенія увеличиваемъ на 1. Такимъ образомъ:

$$\lg 41592,687 = 4,6190169.$$

Такъ какъ данное число въ 1000 разъ больше 41592,687, то, оставивъ мантиссу найденнаго логариома безъ перемены, увеличиваемъ характеристику на 3 единицы; такимъ образомъ:

$$\lg 41592687 = 7,6190169.$$

На практикѣ вычисленіе располагають такъ:

$$\lg 41592 = 4,6190098$$

пропорц. часть для	0,6	62,4
» » »	0,08	8,32
» » »	0,007	0,728

$$\lg 41592,687 = 4,6190169,448.$$

Наконецъ

$$\lg 41592687 = 7,6190169.$$

803. Примѣчаніе. Пусть требуется найти \lg числа, содержащаго болѣе 8 цифръ, напр. 72546892548. Характеристика логариома равна 10, а мантисса та же, что у логариома дроби 72546,892548. Опредѣлимъ мантиссу вышеизложеннымъ способомъ:

$\lg 72546$	$= 10,8606135$
0,8	48,0
9	5,40
2	0,12
5	0,030
4	0,0024
8	0,00048

$$\lg 72546892548 = 10,8606189.$$

Изъ этого примѣра видно, что уже 8-я цифра данного числа увеличиваетъ мантиссу только на 0,12, а потому не оказываетъ вліянія на 7-ю десятичную

цифру мантиссы; поэтому, при отыскивании \lg числа, содержащего больше 8 цифр, употребляют только первые 8 цифр, остальные же, как не влияющие на семивзначную мантиссу, замѣняютъ нулями, или про то не пользуются ими при определѣніи поправки. Въ самомъ дѣлѣ, наибольшая табличная разность $-0,0000435$, и потому девятая цифра числа, даже если она имѣетъ наиб. величину, т. е. $= 9$, измѣнитъ мантиссу только на $\frac{1}{2}$ единицы 7-го десятичнаго мѣста; и это — въ самомъ неблагоприятномъ случаѣ, когда и табл. разн. и девятая цифра числа имѣютъ наибольшія величины.

Изъ сказаннаго выводимъ правило: если число имѣетъ больше 5 цифръ, то, отбросивъ слева запятой 5 цифръ, разыскиваютъ логарисмъ пятизначнаго числа и придаютъ къ нему произведение табличной разности на три первые десятичные знака, составленное указаннымъ способомъ.

Опредѣленіе логарисма дроби.

804. Сначала рассмотримъ нахожденіе логарисмовъ десятичныхъ дробей. Пусть требуется найти $\lg 347,84762$. Замѣтнмъ, что характеристика искомага логарисма $= 2$, а мантисса та же, что и у логарисма числа 34784762 , имѣющаго

$$\begin{array}{rcl} \lg 34784 & = & 2,5413795 \\ & & 0,7 \qquad \qquad 87,5 \\ & & 0,06 \qquad \qquad 7,5 \\ & & 0,002 \qquad \qquad 0,25 \end{array}$$

Откуда $\lg 347,84762 = 2,5413890$.

Для втораго примѣра пусть требуется найти логарисмъ десятичной дроби, меньшей 1, напр. $\lg 0,0076806$. Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \lg 0,0076806 &= \lg \frac{76806}{1000000} = \lg 76806 - \lg 10000000 \\ &= 4,8853951 - 7. \end{aligned}$$

Вычитая 7 изъ 4, чтобы мантиссу оставить положительною, получимъ отрицательную характеристику — 3, такъ что

$$\lg 0,0076806 = \bar{3},8853951;$$

знакъ минусъ ставится надъ характеристикой для указанія, что только характеристика отрицательна.

Откуда правило: для нахожденія логарисма десятичной дроби меньшей 1, беремъ мантиссу логарисма числителя дроби, а въ характеристику ставимъ столько отрицательныхъ единицъ, сколько въ лѣвой части дроби находится нулей, включая сюда и 0 запятыя.

805. Пусть требуется найти \lg обыкновенной дроби, напр. $\frac{8}{11}$. Ищемъ:

$$\lg \frac{8}{11} = \lg 8 - \lg 11 = 0,9030900 - 1,0413927 = -0,1383027;$$

чтобы сдѣлать мантиссу положительною, поступаемъ по указаніямъ § 795 и находимъ: **1,8616973**.

Тотъ же результатъ получимъ, обращая $\frac{8}{11}$ въ десятичную дробь и ограничиваясь восемью цифрами въ числителѣ; находимъ 0,72727272. Слѣд.

$$\begin{array}{rcl} \lg \frac{8}{11} = \lg 0,72727272 & = & \bar{1},8616957 \\ & \text{для } \begin{array}{l} 0,2 \\ 0,07 \\ 0,002 \end{array} & \begin{array}{l} 11,8 \\ 4,13 \\ 0,118 \end{array} \\ \lg \frac{8}{11} & = & \bar{1},8616973. \end{array}$$

Второй вопросъ.

Нахожденіе числа, соответствующаго данному логариному.

806. Первый случай: *мантисса данного логарисма находится въ таблицѣ.* Пусть $\lg x = 3,7592749$; найти x ? Находимъ прежде всего число 759, образуемое первыми тремя цифрами мантиссы: оно находится въ колоннѣ 0 на стр. 100; опускаемъ въ этой же колоннѣ, доходя до числа 2144 — ближайшаго, меньшаго по сравнению съ 2749; наконецъ, въ горизонтальной строкѣ, начинающейся съ 2144, находимъ число 2749 въ колоннѣ подѣ цифрой 8. Такъ какъ 2749 находится въ горизонт. строкѣ противъ числа 5744, то выписываемъ это число и приписывъ къ нему справа цифру 8, получаемъ 57448, а какъ характеристика данного логарисма равна 3, то въ цѣлой части искомаго числа должно быть четыре цифры; а потому $x = 5744,8$.

807. Второй случай: *данная мантисса не содержится въ таблицѣ.* Пусть $\lg x = 3,4592786$; найти x ? Запишемъ характеристику 3 четырьмя, замѣчаемъ, что логарисмъ 4,4592786 содержится между логарисмами

4,4592869, которому соответствуетъ число 28793.

и

4,4592718, » » » 28792.

Разность этихъ логарисмовъ = 0,0000151, а разность соответствующихъ чиселъ = 1. Заключаемъ, что если ближайшую меньшую мантиссу увеличить на 0,0000151, то бл. м. ч. 28792 надо увеличить на 1; но мантисса логарисма 4,4592786 превышаетъ меньшую мантиссу только на 0,0000068; спрашивается, на какое число y , соответственно этому, искомае число x превышаетъ 28792? Зная теорему, что разности между числами пропорціональны разностямъ между логарисмами, если первыя не превышаютъ 1, какъ и есть въ данномъ случаѣ, заключаемъ, что y во столько разъ меньше 1, во сколько 0,0000068 меньше 0,0000151, откуда пропорція

$y:1 = 0,0000068:0,0000151$, или по умножении обоих членов второго отношения на 10000000:

$$y:1 = 68:151, \text{ откуда } y = 68:151.$$

Это частное вычисляемъ съ 2 десятичными знаками, такъ какъ остальные будутъ неверны; а для вычисления пользуемся таблицей пропорциональных частей для числа 151 (стр. 43), въ которой числа 15,1, 30,2, . . . , 135,9 суть произведенія изъ 151 на 0,1, 0,2, . . . , 0,9. Намъ нужно найти, на сколько слѣдуетъ помножить 151 для полученія 68. Таблица показываетъ, что, умноживъ 151 на 0,4, находимъ 60,4 — число близ. меньше къ 68, итакъ, въ частномъ имѣемъ, во-первыхъ, 0,4; вычтя произведение 60,4 изъ дѣлимаго, находимъ остатокъ 7,6. Наша табличка показываетъ далѣе, что, умноживъ 151 на 0,5, находимъ 75,5; а слѣд. умноживъ 151 на 0,05, найдемъ произведение 7,55 — близ. и. къ остатку 7,6. Итакъ, въ частномъ имѣемъ еще 5 сотыхъ долей. Окончательно $y = 0,45$. Прибавивъ эту дробь къ 28792, имѣемъ 28792,45 — число, соответствующее логарифму 4,4592786; а уменьшивъ это число въ 10 разъ, найдемъ число, соответствующее данному логарифму. Итакъ, $r = 2879,245$.

На практикѣ вычисленіе располагается такъ:

$$\begin{array}{rcl} \lg x & = & 3,4592786 \\ \text{для } 28792 & . & . & . & 2718 \\ & & & & 68 \\ 4 & . & . & . & 60,4 \\ & & & & 7,6 \\ 5 & . & . & & 7,55 \\ r & = & 2879,245 \end{array}$$

Еще примѣръ. Укажемъ нахожденіе числа, соответствующаго логарифму съ отрицательною характеристикою (къ этому виду всегда слѣдуетъ приводить отрицательный логарифмъ, такъ какъ въ таблицахъ нѣтъ отрицательныхъ мантис). Пусть $\lg r = 2,4832107$, найти x °. Придавая 6 къ данному \lg , чтобы сдѣлать характеристику равную 4, и вычитая 6, имѣемъ

$$\lg r = 4,4832107 \quad 6 = 4,4832107 - \lg 1000000.$$

Находимъ число, соответствующее логарифму $= 4,4832107$.

$$\begin{array}{rcl} & \lg y = & 4,4832107 \\ 30423 & & 020 \\ & & \overline{87} \\ 6 & & 85,8 \\ & & 1,2 \\ 1 & & 1,43 \\ y = & 30423,61 \end{array}$$

Итакъ: $\lg x = \lg 30423,61 - \lg 1000000 = \lg \frac{30423,61}{1000000} = \lg 0,03042361$,
откуда $r = 0,03042361$.

Отсюда правило: для нахождения числа, соответствующаго логарифму съ отрицательною характеристикою, определяемъ число, соответствующее положительной мантиссѣ, приписываемъ съ лѣвой стороны его столько нулей, сколько единицъ въ характеристикѣ, и первый слѣва нуль отдѣляемъ запятою.

Дѣйствія надъ логарифмами съ отрицательною характеристиккою.

808. Сложеніе. — Сложеніе мантиссъ, какъ чиселъ положительныхъ, не представляетъ никакихъ затрудненій: что касается характеристикъ, то ихъ соединяють по правилу приведенія подобныхъ членовъ. Напр.:

$$\begin{array}{r} 3,2173980 \\ \bar{7},8239172 \\ 2,3758630 \\ - 2 + 1,4171782, \text{ или } \bar{1},4171782. \end{array}$$

809. Вычитаніе. — Пусть требуется сдѣлать вычитаніе:

$$\begin{array}{r} \bar{5},4567895 \\ \bar{2},6356789 \\ 4,8211106 \end{array}$$

Прибавляя къ мантиссѣ уменьшаемаго 1, а къ характеристикѣ — 1, по вычитаніи мантиссъ находимъ 0,8211106; затѣмъ, вычтя изъ — 6 характеристикъ — 2 вычитаемаго, находимъ въ остаткѣ — 4; полный остатокъ — 4,8211106.

810. Умноженіе. — Пусть требуется $2,4367894 \times 5$. Имѣемъ:

$$(- 2 + 0,4367894) \times 5 = - 10 + 2,1839470 = 8,1839470.$$

811. Дѣленіе. — Пусть требуется раздѣлить 6,2466724 на 2. Имѣемъ:

$$(- 6 + 0,2466724) : 2 = 3 + 0,1233362 = 3,1233362.$$

Если бы тотъ же логарифмъ требовалось раздѣлить на 5, то, чтобы характеристика дѣлилась нацѣло на 5, слѣдуетъ къ ней придать — 4, а потому къ мантиссѣ надо придать $\frac{1}{5}$ 4; такимъ образомъ имѣемъ:

$$6,2466724 : 5 = (- 10 + 4,2466724) : 5 = - 2 + 0,8493345 = 2,8493345.$$

Когда встрѣчается случай дѣленія логарифмовъ съ отрицательными характеристиками, слѣдуетъ мантиссы ихъ дѣлать отрицательными. Напр., при раздѣленіи $2,3142890 : 1,3156782$ замѣчаемъ, что дѣлимое = — 1,6857110, а потому частное приводится къ — 1,6857110 : 1,3156782.

812. Употребленіе дополненій. — Когда въ выраженіи содержится нѣсколько вѣщаемыхъ логарифмовъ, удобнѣе замѣнять ихъ дополненіями, такъ какъ при этомъ оба дѣйствія — сложенія и вычитанія логарифмовъ приводятся къ одному

дѣйствию — сложения ихъ. Такъ, употребляя дополненія до 10, замѣняемъ выраженіе

$$\lg a - \lg b + \lg c - \lg d - \lg e$$

равнымъ ему выраженіемъ

$$\lg a + (10 - \lg b) + \lg c - (10 - \lg d) - (10 - \lg e) = 30$$

или

$$\lg a + C_0 \lg b + \lg c + C_0 \lg d + C_0 \lg e = 30$$

причемъ C_0 есть сокращеніе слова complementum — дополнение.

813. Примеры вычисленій съ логарифмами.—1. *Вычислить* $x = \sqrt[7]{17}$. Логарифмируя, имѣемъ: $\lg x = \lg \pi - \lg 173 = 0,4971499 - 2,2380461$, или, замѣнивъ вычитаемый \lg его дополненіемъ до 3:

$$\lg x = 0,4971499 + (3 - 2,2380461) = 3 = 0,4971499 + 0,7619539 = 3 \\ = \bar{2},2591038.$$

Отсюда $x = 0,0181595$.

II. *Вычислить* $x = \sqrt[0,00569]{7}$. Логарифмируя и употребляя дополненіе логарифма знаменателя до 1, послѣдовательно имѣемъ:

$$\lg x = 0,4971499 - 3,7551123 = 0,4971499 + (1 - 3,7551123) = 1 \\ = 0,4971499 + 2,2448877 = 2,7420376.$$

Отсюда $x = 552,125$.

$$\text{III. Вычислить } x = \frac{0,0084321 \times \sqrt[3]{\frac{2}{15}}}{\sqrt{8,37}}.$$

$$\lg x = \lg 0,0084321 + \frac{1}{3}(\lg 2 - \text{доп. } \lg 15 - 2) - \text{доп. } \frac{1}{2} \lg 8,37 - 1$$

$$\lg 0,0084321 = \bar{3},9259357$$

$$\lg 2 = 0,3010300$$

$$\text{доп. } \lg 15 = 0,8239087 - 2$$

$$\bar{1},1249387$$

по раздѣленіи на 3:

$$\bar{1},7083129$$

$$\lg 8,37 = 0,9227255$$

$$\frac{1}{2} \lg 8,37 = 0,4613627$$

$$\text{доп. } \frac{1}{2} \lg 8,37 = 0,5386373 - 1.$$

Вычисленіе x .

$$\bar{3},9259357$$

$$\bar{1},7083129$$

$$1,5386373$$

$$\lg x = \bar{3},1728859$$

$$x = 0,00148897.$$

$$IV. \text{ Вычислить } x = \sqrt{\frac{\sqrt[7]{15,92} \times \sqrt[3]{0,0182}}{0,00526 \times (196)^5}}$$

$\lg 15,92 = 1,2019431$	$0,1717062$
$\frac{1}{7} \lg 15,92 = 0,1717062$	$1,4200238$
$\lg 0,0182 = \bar{2},2600714$	$2,2790143$
$\frac{1}{3} \lg 0,0182 = 1,4200238$	$\bar{12},5387195$
доп. $\lg 0,00526 = 2,2790143$	$\lg r = 10,4094638; 2$
$\lg 196 = 2,2922561$	$5,2047319$
$\lg 196^5 = 11,4612805$	$0,00001602256.$

ГЛАВА ЛII.

Приложения логарифмовъ. Рѣшеніе показательныхъ и логарифмическихъ уравненій — Финансовыя операціи, сложные проценты, срочные вклады, срочныя уплаты и т. д.

Рѣшеніе показательныхъ и логарифмическихъ уравненій.

814. *Логарифмическими уравненіями* называются такія, въ которыхъ, неизвѣстныя входятъ своими логарифмами, а *показательными* уравненіями называются такія, въ которыхъ неизвѣстныя входятъ показателями. Элементарная алгебра даетъ средства рѣшить такія ур—нія только въ случаяхъ, когда въ ур—ніе неизвѣстное входитъ исключительно только своими логарифмами, или исключительно въ показателяхъ, и не можетъ рѣшить ур—ній сѣдшаго типа. Напр. ур—нія

$$x + 3 \lg x = 5, \quad x^3 + 8^x = 12.$$

неразрѣшимы средствами элементарной алгебры.

При рѣшеніи этого рода ур—ній нерѣдко приходится пользоваться тѣмъ принципомъ, что всякое положительное число имѣть лишь одинъ, вполне опредѣленный, логарифмъ, и обратно. Это обыкновенно выражаютъ, говоря: „Если два числа равны, то и логарифмы ихъ равны; и обратно, если два логарифма равны, то и соответственные имъ числа равны“.

815. Рѣшеніе уравненія $a^r = b$. — a есть положительное число, отличное отъ 1. Если $b < 0$, ур—ніе не имѣетъ рѣшеній. Итакъ, полагаемъ $b > 0$. Взявъ логарифмы отъ обѣихъ частей: $r \lg a = \lg b$, находимъ отсюда

$$r = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $0,06971^r = 0,0056$.

Логарифмуя, находимъ

$$r \lg 0,06971 = \lg 0,0056,$$

откуда

$$x = \frac{\lg 0,00856}{\lg 0,06971} = \frac{3,9324738}{2,8432951},$$

или замѣчая, что $3,9324738 = 3 + 0,9324738 = 2,0675262$ и такимъ же образомъ $2,8432951 = 1,1567049$, имѣемъ

$$x = 2,0675262 : 1,1567049.$$

Выполнивъ дѣленіе, находимъ $x = 1,787$, съ точн до 0,001.

Подобнымъ же образомъ рѣшаемъ ур—ніе $a^{b^c} = c$, гдѣ a , b и c — три положительныхъ числа, и числа a и b , кромѣ того, отличны отъ 1. Положивъ $b^c = y$, имѣемъ: $a^y = c$, откуда, по предыдущему,

$$y = \frac{\lg c}{\lg a} \dots (1).$$

Найдя y , изъ ур—нія $b^y = y$ находимъ

$$x = \frac{\lg y}{\lg b} = \frac{\lg \left[\frac{\lg c}{\lg a} \right]}{\lg b}.$$

Такъ какъ приходилось брать $\lg y$, то, очевидно, должно быть $y > 0$, т. е. какъ видно изъ (1), логарифмы чиселъ c и a должны быть одинаковаго знака, а сл. числа a и c должны быть или оба < 1 , или оба > 1 , что можно выразить такъ:

$$(a - 1)(c - 1) > 0 \dots (2).$$

Заключаемъ, что если a , b , c суть три положительныхъ числа, отличныя отъ 1, если, сверхъ того, удовлетворяется неравенство (2), то наше ур—ніе имѣть одно, и только одно, рѣшеніе; во всѣхъ остальныхъ случаяхъ оно не имѣть, рѣшенія.

Пусть еще требуется рѣшить ур—ніе $a^{b^c} = d^{\frac{m}{n}}$.

Положивъ $c^y = y$, $b^y = x$, имѣемъ ур—ніе $a^x = d^{\frac{m}{n}}$.

Взявъ логарифмы, найдемъ

$$x \lg c = \lg y, \quad y \lg b = \lg x, \quad x \lg a = \frac{m}{n} \lg d,$$

откуда

$$x = \frac{\lg \left(\frac{\lg x}{\lg b} \right)}{\lg c} = \frac{\lg \left[\frac{\lg \left(\frac{m}{n} \cdot \lg d \right)}{\lg b} \right]}{\lg c}.$$

Отрицательныя числа не имѣютъ дѣйствит. логарифмовъ, сл. всѣ числа, отъ которыхъ берутся логарифмы, д. б. > 0 ; т. е. во-первыхъ, числа a , b , c , d д. б. > 0 ; во-вторыхъ, д. б.

$$\lg \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{\lg d}{\lg a} \right) > 0 \dots (1).$$

Различаемъ два случая: полож. число $b < 1$, и $b > 1$.

Когда $b < 1$, то $\lg b < 0$, и вер. (1) даетъ

$$\lg \frac{m}{n} \cdot \frac{\lg d}{\lg a} < 0, \text{ или } 0 < \frac{m}{n} \cdot \frac{\lg d}{\lg a} < 1.$$

или, раздѣляя на $\frac{\lg d}{\lg a}$, имѣемъ:

когда $\frac{\lg d}{\lg a} > 0$, то $0 < \frac{m}{n} < \frac{\lg a}{\lg d}$

когда $\frac{\lg d}{\lg a} < 0$, то $0 > \frac{m}{n} > \frac{\lg a}{\lg d}$.

Если $b > 1$, то $\lg b > 0$, и вер. (1) даетъ

$$\lg \frac{m}{n} \cdot \frac{\lg d}{\lg a} > 0, \text{ или } \frac{m}{n} \cdot \frac{\lg d}{\lg a} > 1.$$

откуда

либо $\frac{m}{n} > \frac{\lg a}{\lg d} > 0$, либо $\frac{m}{n} < \frac{\lg a}{\lg d} < 0$.

Итакъ, отв. $\frac{m}{n}$ т. б. одного знака съ $\frac{\lg a}{\lg d}$, и смотря по тому, будетъ ли абсолютное значение $\frac{m}{n}$ меньше или больше абсолютнаго значения $\frac{\lg a}{\lg d}$, b должно быть $<$ или > 1 .

816. Рѣшеніе уравненія $ax^{2x} - bx^x - c = 0$. Положивъ $x = y$ (1), имѣемъ $ay^2 + by + c = 0$. . . (2).

Квадратное ур. (2) даетъ y , а для всякаго значенія y найдемъ изъ (1) соответственное значеніе x . Но для x получится дѣйствительное значеніе только тогда, когда y будетъ дѣйствительно и положительно. Отсюда, при $x > 0$, данное ур. будетъ имѣть *два дѣйствительныхъ корня* только тогда, когда удовлетворяются условія:

$$b^2 - 4ac > 0, \quad ac > 0, \quad ab < 0.$$

Пусть эти положительныя значенія y будутъ y_1 и y_2 . Остается рѣшить два показательныя ур-нія: $x^{y_1} = y_1$ и $x^{y_2} = y_2$, откуда

$$x_1 = \frac{\lg y_1}{\lg y_1} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{\lg y_2}{\lg y_2}.$$

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $5^{x^2+1} = 626$.

Освободивъ отъ знаменателя, имѣемъ

$$5^{2x+1} - 626 \times 5^x + 125 = 0;$$

положивъ $5^x = y$, даемъ ур-нію видъ $5y^2 + 25y - 125 = 0$, откуда $y' = 125$.

$y'' = \frac{1}{5}$. Таким образом получим два уравнения: $5^x = 125$, откуда $x' = 3$, и $5^x = \frac{1}{5}$, откуда $x'' = -1$.

817. Решить уравнение $\frac{\lg(2-x^2)}{\lg(1-x)} = 3$.

Так как отрицательные числа не имеют действительных логарифмов, то необходимо, чтобы было $2-x^2 > 0$ и $1-x > 0$, или $x < \frac{1}{2}$ и $x < 1$, или, наконец, $x < \frac{1}{2}$.

Примем, что имеем ур.: $\lg(2-x^2) = 3 \lg(1-x) = \lg(1-x)^3$, откуда $2-x^2 = (1-x)^3$, или $3x^2 - 3x + 1 = 0$.

В этом уравнении x действительны, один < 0 , другой > 0 . Первый, так как один из коэффициентов задачи; чтобы и второй отвечал, необходимо, чтобы он был < 1 . Подставив 1 в первую часть уравнения дает результат -1 , т. е. с знаком, противоположным 1 -му коэффициенту, сл. 1 содержит между корнями: $x' = \dots + 1 \dots x''$, т. е. положительный корень -1 , а потому должен быть отброшен. Итак

$$x = -\frac{1 \pm \sqrt{1-3}}{3}$$

есть единственное решение данного уравнения.

818. Решение системы: $\lg x + \lg y = m$ и $ax + by = c$.

Первое уравнение может быть представлено в виде $\lg xy = m$, откуда $xy = 10^m$ (1); таким образом вопрос приводится к решению системы: $xy = 10^m$ и $ax + by = c$. Исключив y дает уравнение $ax^2 - cx + b \times 10^m = 0$. Решив это уравнение, найдем значения y , соответствующие каждой величине x , из уравнения $y = \frac{c - ax}{b}$.

Пример I. Решить систему:

$$\lg x + \lg y = 3 \dots (1), \quad 5x^2 - 3y^2 = 11300 \dots (2).$$

Из первого уравнения можно представить в виде $\lg xy = \lg 1000$, или $xy = 1000 \dots (3)$.

Из уравнений (2) и (3) дает, по упрощении, уравнение

$$x^4 - 2260x^2 - 600000 = 0,$$

имеющее три мнимых корня и два действительных; действительный положительный корень

$$x = \sqrt{1130 + \sqrt{1130^2 + 600000}},$$

или $x = 50$, и сл. $y = 20$.

Пример II. Решить систему:

$$2 \lg y - \lg x = 0,1249387; \quad \lg 3 + 2 \lg x + \lg y = 1,7323939.$$

$2 \lg y - \lg x = \lg \frac{y^2}{x}$; $0,1249387 - \lg 1,333 \dots = \lg \frac{4}{3}$; слѣд. первое ур. приводится къ $\frac{y^2}{x} = \frac{4}{3}$, откуда $x = \frac{3}{4} y^2$. Съ другой стороны $\lg 3 + 2 \lg x + \lg y = \lg 3x^2y$; $1,7323939 = \lg 54$; сл. второе ур. приводится къ $3x^2y = 54$. Исключая x , находимъ ур. $y^5 = 32$, откуда $y = 2$; и наконецъ $x = 3$.

ФИНАНСОВЫЯ ОПЕРАЦІИ.

Сложные проценты.

1. Сложные проценты для цѣлаго числа лѣтъ.

819. Определеііе.—Говорятъ, что капиталъ помѣщенъ на *сложные проценты*, когда въ концѣ каждаго года процентныя деньги прибавляются въ капиталу, или, какъ говорятъ, *капитализируются*, и наращеніе процентными деньгами въ теченіе слѣдующихъ лѣтъ идетъ не только на капиталъ, но и на причисляемыя къ нему процентныя деньги.

820. Основной вопросъ.—*Вычислить, во что обратится капиталъ а руб., отданный на сложные проценты по р со ста, въ t лѣтъ.*

100 руб. приносятъ въ годъ p руб. прибыли; слѣд. 1 руб. принесетъ въ это время $\frac{p}{100}$ р., а потому 1 р. къ концу перваго года обратится въ $1 + \frac{p}{100}$, или, обозначая $\frac{p}{100}$ буквою r , въ $1 + r$ (сумма $1 + r$ наз. *годовымъ оборотомъ рубля*), а слѣд. a руб. въ концѣ года составитъ сумму $a(1 + r)$. Каждый рубль этой суммы въ концѣ втораго года обратится опять въ $1 + r$, а слѣд. вся сумма $a(1 + r)$ обратится къ этому сроку въ $a(1 + r)(1 + r)$, или $a(1 + r)^2$. Къ концу 3-го года каждый рубль этой новой суммы обратится въ $1 + r$, а потому вся сумма въ $a(1 + r)^2(1 + r)$ или въ $a(1 + r)^3$ и т. д. По аналогіи заключаемъ, что въ концѣ t -го года составитъ сумма $a(1 + r)^t$; называя эту сумму буквою A , имѣемъ ур—ііе

$$A = a(1 + r)^t \dots (1).$$

821. Формула (1) содержитъ четыре количества: a , A , t и p (заключается въ r); сл. когда три изъ нихъ будутъ даны, то можно опредѣлять четвертое. Отсюда четыре задачи.

822. Основная задача.—*Определеііе A по даннымъ a, p и t* прямо рѣшается ур—ііемъ (1); логарифмируя его, имѣемъ

$$\lg A = \lg a + t \cdot \lg (1 + r) \dots (2).$$

Примѣръ: $a = 20000$, $p = 4,5$ и $t = 10$.

$$\begin{aligned} r &= \frac{4.5}{100} = 0,045. & \lg a &= 4,3010300 \\ & & 10 \lg (1 + r) &= 0,1911629 \\ & & \lg A &= 4,4921929 \\ & & A &= 31059, 38 \text{ руб.} \end{aligned}$$

823. Какой капитал a нужно поместить на сложные проценты по p со ста, чтобы в конце t летъ составила сумма A ?

Уравнение (2), решенное относительно $\lg a$, даетъ

$$\lg a = \lg A + \text{доп. } t \lg (1 + r) \dots (3).$$

Примеръ. $A = 40324$, $t = 21$, $p = 4$.

$$\begin{aligned} \lg (1 + r) &= 0,0170333 & \lg A &= 4,6055630 \\ t \lg (1 + r) &= 0,3576993 & \text{доп. } t \lg (1 + r) &= 1,6423007 \\ \lg a &= 4,2478643 \\ a &= 17695,56. \end{aligned}$$

824. На сколько летъ нужно поместить капитал a , чтобы, при сложных процентахъ по p со ста, составила сумма A ? Прибыль на 1 руб. равна r .

Рѣшая ур. (2) относительно t , имѣемъ

$$t = \frac{\lg A - \lg a}{\lg (1 + r)}.$$

Примеръ. $A = 40324$; $a = 17695,56$; $p = 4$.

$$t = \frac{4,6055630 - 4,2478643}{0,0170333} = \frac{0,3576993}{0,0170333} = 21.$$

825. При какихъ процентахъ капиталъ a дастъ, по истечении t летъ, сумму A ?

Рѣшая ур. (2) относительно $\lg (1 + r)$, имѣемъ

$$\lg (1 + r) = \frac{\lg A - \lg a}{t}.$$

Найдя отсюда $1 + r$, легко опредѣлить и p .

Примеръ. $a = 21319$, $A = 42327$, $n = 15$.

$$\begin{aligned} \lg A &= 4,6266237 \\ \lg a &= 4,3287668 \\ \lg (1 + r) &= \frac{0,2978569}{15} = 0,0198571 \\ 1 + r &= 1,04678. \end{aligned}$$

Отсюда r или $\frac{p}{100} = 0,04678$, а слѣд. $p = 4,678$ или приблизительно въ цѣлыхъ копейкахъ, $p = 4$ руб. 68 коп.

II. Время помѣщенія капитала—дробное.

826. Обыкновенно время, въ течение котораго капиталъ находится подъ процентами, складывается изъ цѣлаго числа лѣтъ и нѣкоторой доли года, которую условимся обозначать буквою f ; цѣлое же число лѣтъ, по предѣлу, обозначимъ буквою t . Если, напр., доля года равна 3 мѣсяцамъ 25 дней, то

$$f = \frac{3 \times 30 + 25}{360} = \frac{25}{72},$$

принимая каждый мѣсяцъ въ 30 дней.

827. Основной вопросъ. Какая сумма A составитъ, если капиталъ a , отданный на сложные $\%$ по p , находится въ оборотѣ t лѣтъ и долю f года?

По истеченіи t лѣтъ капиталъ a обратится въ $a(1+r)^t$. Каждый рубль этой суммы, получая въ годъ приращеніе r , въ теченіе доли f года дастъ приращеніе fr ; полное же приращеніе суммы $a(1+r)^t$ будетъ $a(1+r)^t \cdot fr$. Такимъ образомъ въ концѣ $t + f$ лѣтъ составитъ сумма $a(1+r)^t + a(1+r)^t \cdot fr$, или

$$A = a(1+r)^t(1+fr) \dots (1).$$

Примѣръ. $a = 41524,75$, $p = 5$, $t = 7$ и $f = 10$ мѣ.

$$1 + fr = 1 + \frac{10}{12} \times 0,05 \qquad \lg a = 4,6183070$$

$$= 1 + \frac{0,25}{6} \qquad t \lg(1+r) = 0,1489251$$

$$= 1,0416667 \qquad \lg(1+fr) = 0,0177288$$

$$\lg A = 4,7843609$$

$$A = 60863,05 \text{ руб.}$$

828. Какой капиталъ, помѣщенный на сложные $\%$ по 5 со 100, дастъ въ 18 лѣтъ и 3 мѣсяца сумму 48731,05 руб?

Логарифмируя ур. (1) и опредѣляя $\lg a$, имѣемъ:

$$\lg a = \lg A + \text{доп. } t \lg(1+r) + \text{доп. } \lg(1+fr) \dots (2)$$

$$\lg 1,05 = 0,0211893 \qquad \lg A = 4,6878325$$

$$18 \lg 1,05 = 0,3814074 \qquad \text{доп. } t \lg(1+r) = 1,615926$$

$$fr = \frac{0,05}{4} = 0,0125 \qquad \text{доп. } \lg(1+fr) = 1,9946050$$

$$1 + fr = 1,0125 \qquad \lg a = 4,3010301$$

$$a = 20000 \text{ руб.}$$

829. Какое время сумма a должна находиться подъ сложными $\%$, считая по p со ста, чтобы образовать капиталъ A ?

Нужно опредѣлить t и f . Рѣшая ур. (2) относительно t , имѣемъ:

$$t = \frac{\lg A - \lg a}{\lg(1+r)} - \frac{\lg(1+fr)}{\lg(1+r)}$$

Пусть частное деления, указанного в первом члене, будет Q , а остаток R ; имеем:

$$t = Q + \frac{R}{\lg(1-r)} = \frac{\lg(1-r)}{\lg(1-r)} \dots (3)$$

Первая часть ур-ния есть число целое, след. и вторая должна быть целым числом. Но Q есть целое число, след. и разность дробей должна быть целую. R , как остаток, меньше делителя $\lg(1-r)$, след. первая дробь меньше 1. Затем, $f < 1$, след. $f/r < r$, откуда $1 - f/r < 1 - r$, а потому и $\lg(1 - f/r) < \lg(1 - r)$, так что и вторая дробь меньше 1. Но разность двух правильных дробей только тогда м. б. целой, когда она равна нулю, откуда: $R = \lg(1 - f/r)$, и ур-ние (3) дает: $t = Q$. Таким образом, для определения времени имеем два ур-ния

$$t = Q \dots (4) \quad \text{и} \quad \lg(1 - f/r) = R \dots (5),$$

показывающие, что для нахождения целого числа t надо взять целую часть частного от деления $\lg A - \lg a$ на $\lg(1 - r)$, а для определения доли года приравнять $\lg(1 - f/r)$ остатку указанного деления и решить полученное ур. относительно f .

Переходя в ур-нии (5) от логарифма к числу, найдем: $1 - f/r = m$, откуда $f = \frac{m-1}{r}$.

Пример I. $A = 48734.04$; $a = 20000$; $r = 0.05$.

$$\lg A = 4.6878324$$

$$\lg a = 4.3010300$$

$$\lg A - \lg a = 0.3868024$$

$$\lg A = 2n = 0.3868024 = 18 \quad 0.0053950$$

$$\lg 1.05 = 0.021893 = 18 \quad 0.021893$$

$$\lg(1 - f/r) = 0.0053950$$

$$1 - f/r = 1.0125$$

$$f = \frac{0.0125}{0.05} = 0.25.$$

Итак, $t = 18$ г. и $f = \frac{1}{4}$ года.

Пример II. *Население страны возрастает ежегодно на некоторую долю α своей величины, какую оно имеет в начале года. По истечении какого времени оно будет находиться в данном отношении k к первоначальной своей величине?*

Пусть первоначальное население равно a ; население в конце t лет и доли f года пусть будет A . Имеем: $A = a(1 + \alpha)^t (1 - f\alpha)$; но, по условию, $A = ka$; след.

$$k = (1 + \alpha)^t (1 - f\alpha).$$

Пусть, напр., требуется узнать, через сколько времени удвоится население, возрастая на 5%?

В данном вопросе $k = 2$, $\alpha = 0.05$; ур-ие будет

$$2 = 1.05^t (1 + 0.05f).$$

Частное, подлежащее вычислению, будетъ

$$\lg 2 = 0.3010300 \\ \lg 1,05 = 0.0211893 = 14 + \frac{0.0043798}{0.0211893}$$

$$\lg(1 + 0,05f) = 0,0043798 \\ 1 + 0,05f = 1,010136$$

$$f = \frac{0,010136}{0,05} = \frac{1,0136}{5} = \frac{365}{5} \times \frac{1,0136}{5} = 74 \text{ дн.}$$

Итакъ, население удвоится черезъ 14 лѣтъ и 74 дня.

830. На какіе проценты нужно помѣстить капиталъ a , чтобы въ $t + f$ лѣтъ онъ обратился въ A ?

Вопросъ приводится къ рѣшенію относительно r ур—нія

$$A = a(1 + r)^t(1 + fr);$$

по раскрытіи $(1 + r)^t$, получимъ ур—ніе $t + 1$ -й степени въ r ; сл. не можеть быть рѣчи о рѣшеніи его въ этомъ общемъ случаѣ обыкновенными приемами; но оно м. б. рѣшено по способу послѣдовательныхъ приближеній.

Взявъ логарифмы отъ обѣихъ частей ур—нія, выводимъ

$$\lg(1 + r) = \frac{\lg A - \lg a}{t} = \frac{\lg(1 + fr)}{t} \dots (1)$$

Откинувъ второй членъ (обыкновенно r содержится между 0,03 и 0,06, а $f < 1$, такъ что $1 + fr$ близко къ 1, а $\frac{\lg(1 + fr)}{t}$ весьма малое число), найдемъ первое приближеніе r_1 числа r , по избытку, изъ ур—нія

$$\lg(1 + r_1) = \frac{\lg A - \lg a}{t} \dots (2)$$

гдѣ $r_1 > r$.

Затѣмъ полагаемъ

$$\lg(1 - r_2) = \frac{\lg A - \lg a}{t} = \frac{\lg(1 + r_1)}{t} \dots (3)$$

второй членъ 2-й части больше второго члена 2-й части ур—нія (1), и потому r_2 нѣсколько меньше r . Итакъ, r_1 и r_2 суть два приближенія къ r , первое по избытку, второе по недостатку. Взявъ то или другое вмѣсто r , сдѣлаемъ ошибку меньшую $r_1 - r_2$. Взявъ для r ариметич. среднюю $\frac{r_1 + r_2}{2}$, сдѣлаемъ ошибку меньшую даже $\frac{r_1 - r_2}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$r_1 = r + a_1, \quad r_2 = r - a_2,$$

гдѣ a_1 и a_2 положительны; отсюда

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = r = \frac{r_1 - r_2}{2}, \quad \text{и} \quad \frac{r_1 - r_2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Взявъ $\frac{r_1 + r_2}{2}$ за r , сдѣлаемъ ошибку, равную $\frac{r_1 - r_2}{2}$; но абсолютная величина $\frac{a_1 - a_2}{2} < \frac{a_1 + a_2}{2}$, и сл. $< \frac{r_1 - r_2}{2}$.

Если приближеніе r_2 недостаточно, опредѣляемъ два новыя приближ. значенія, r_3 и r_4 , по формуламъ

$$\lg(1 + r_3) = \frac{\lg A - \lg a}{t} - \frac{\lg(1 + r_2)}{t} \quad (4)$$

$$\lg(1 - r_4) = \frac{\lg A - \lg a}{t} - \frac{\lg(1 - r_2)}{t} \quad (5)$$

Изъ того, что $r_2 < r$, очевидно, что вторая часть (4) больше второй части (1), но она меньше второй части (2); слѣд. $r_1 > r_3 > r$. Слѣд. r_3 есть новое избыточное приближеніе числа r , и менѣе ошибочное, чѣмъ r_1 .

Затѣмъ, такъ какъ $r_2 > r$, то вторая часть (5) меньше второй части (1), слѣд. $r_4 < r$; а какъ $r_2 < r_1$, то вторая часть (5) больше второй части (3); слѣд. $r_4 > r_3$.

Отсюда видно, что r_4 есть приближеніе по недостатку, менѣе ошибочное чѣмъ r_2 ; слѣд. $r_2 > r > r_4$, при чемъ промежутокъ отъ r_2 до r_4 меньше промежутка отъ r_1 до r_3 .

Такимъ образомъ, имѣемъ рядъ значеній для r :

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad r_4, \quad \dots$$

поперемѣнно приближенныхъ по избытку (прибл. четнаго пор.) и по недостатку (прибл. нечетн. пор.), причемъ ихъ точность идетъ возрастаая.

Остается доказать, что числа $r_1, r_2, \dots, r_{2p}, r_{2p+1}, \dots$ имѣютъ общій предѣлъ r . Для этого достаточно доказать, что абсол. велич. разности между r_k и r , при неограниченномъ возрастаніи k , стремится къ нулю. Имѣемъ

$$\lg(1 + r) = \frac{\lg A - \lg a}{t} - \frac{\lg(1 + fr)}{t}$$

$$\lg(1 - r_{2p-1}) = \frac{\lg A - \lg a}{t} - \frac{\lg(1 - fr_{2p})}{t},$$

откуда

$$\lg(1 + r_{2p-1}) - \lg(1 - r) = \frac{\lg(1 + fr) - \lg(1 - fr_{2p})}{t}.$$

Но

$$\frac{1 + fr}{1 + fr_{2p}} < \frac{1 + r}{1 - r_{2p}};$$

въ самомъ дѣлѣ, приводя къ общему знаменателю, который положителенъ, и сравнивая числителей: $1 + fr_{2p} - r_{2p} - fr$ и $1 + fr_{2p} + r - fr_{2p}$, или $f(r - r_{2p})$ и $r - r_{2p}$, замѣчая, что $f < 1$ и $r - r_{2p} > 0$, имѣемъ $f(r - r_{2p}) < r - r_{2p}$, что и требовалось доказать. Итакъ

$$\lg(1 + r_{2p-1}) - \lg(1 + r) < \frac{\lg(1 + r) - \lg(1 - r_{2p})}{t};$$

а слѣд., обозначая буквами

$$x_1, x_2, \dots, x_{2p}, x_{2p+1}, \dots$$

абсолютныя значенія разностей между

$$\lg(1+r) \text{ и } \lg(1+r_1), \lg(1+r_2), \dots$$

имѣемъ:

$$x_1 < \frac{r_1}{f}, x_2 < \frac{r_2}{f}, \dots, x_{2p+1} < \frac{r_{2p+1}}{f}.$$

Перемножая эти неравенства, получаемъ

$$x_{2p+1} < \frac{a_1}{f^{2p+1}}.$$

Но t — число цѣлое, $2p$ — число положительное, возрастающее неограниченно, слѣд. и t^{2p} возрастаетъ неограниченно, а потому можно взять $2p$ настолько большимъ, чтобы x_{2p+1} было какъ угодно близко къ нулю; слѣд. разность

$$\lg(1+r_{2p+1}) - \lg(1+r)$$

стремится къ нулю, и слѣд. r_{2p+1} къ r ; это и нужно было доказать.

831. *Примѣръ. На какие проценты (сложные) помѣщенъ былъ капиталъ 7300 руб., если въ концѣ 6 лѣтъ 8 мѣсяц. 10 коп. онъ обрѣтается въ 10118 руб. 10 коп. (проценты капитализируются въ концѣ каждого года)?*

Принимая указанный методъ, имѣемъ

$$\lg(1+r) = \frac{\lg 10418.1 - \lg 7300}{6} = \frac{\lg(1 + \frac{25}{36}r)}{6}$$

$$\text{или } \lg(1+r) = 0,02595240, 0,25938375 = \frac{\lg(36 + 25r)}{6}$$

Первое приближеніе для r получимъ, отбрасывая два послѣдніе члена:

$$\lg(1+r_1) = 0,02595240,$$

откуда

$$r_1 = 0,0615791, \text{ причемъ } r_1 > r.$$

Второе приближеніе вычисляемъ изъ уравненія

$$\lg(1+r_2) = 0,28533615 = \frac{\lg(36 + 25r_1)}{6},$$

откуда, замѣчая, что $36 + 25r_1 = 37,53947$, и $\frac{\lg(36 + 25r_1)}{6} = 0,26241435$, имѣемъ:

$$\lg(1+r_2) = 0,02292180,$$

откуда

$$r_2 = 0,05419706, \text{ причемъ } r_2 < r.$$

Третье приближение находимъ изъ уравненія

$$\lg(1 - r_3) = 0,28533615 - \lg \frac{36 + 25r_2}{6}$$

замѣчая, что $36 + 25r_2 = 37,354926$, и $\lg \frac{36 + 25r_2}{6} = 0,26205796$, находимъ:

$$\lg(1 - r_3) = 0,02327819,$$

откуда

$$r_3 = 0,0550625, \text{ причём } r_2 > r.$$

Четвёртое приближение.

$$\lg(1 - r_4) = 0,28533615 - \lg \frac{36 + 25r_3}{6},$$

т. е. $36 + 25r_3 = 37,376756$, и $\lg \frac{36 + 25r_3}{6} = 0,26213321$; слѣд.

$$\lg(1 - r_4) = 0,02320294,$$

откуда

$$r_4 = 0,0548797, \text{ причём } r_4 < r.$$

Разности $r_3 - r_4 = 0,0001828$, слѣдов. каждое изъ приближеній r_3 и r_4 представляетъ r съ ошибкою, меньшею 0,0002. Итакъ

$$\frac{r_3 + r_4}{2} = 0,0549711$$

представляетъ r съ ошибкою, меньшею 0,0001; отсюда, умножая на 100, получимъ проценты $p = 5,49711$, съ ошибкою, меньшею 0,01 p . Слѣд. приблизительно берёмъ $p = 5,497$.

Примѣчаніе. Обыкновенно же на практикѣ, для вычисленія времени и процентовъ берутъ формулу, выведенную для цѣлаго числа лѣтъ: $A = a(1 + r)^t$, полагая въ ней вмѣсто t данное дробное число лѣтъ. Применяя эту формулу къ данной задачѣ, имѣемъ

$$\begin{aligned} \lg(1 + r) &= \lg 10448,1 - \lg 7300 - \frac{36 \times 0,15571442}{241} \\ &= 0,02326024; \end{aligned}$$

отсюда

$$1 + r = 1,0550189, \text{ и } r = 0,0550189;$$

наконецъ

$$p = 5,50189,$$

результатъ, мало разняющійся отъ прежде найденнаго.

Срочные вклады.

832. Основной вопросъ. Въ теченіе t лѣтъ вносятся въ банкъ въ началѣ каждого года последовательно капиталы $a_1, a_2, a_3, \dots, a_t$. Какаѣ сумма накопится къ концу срока, если считать сложные проценты по $p\%$?

Первый *срочный вклад* a_1 , находясь под процентами t лѣтъ, обратится къ концу этого срока въ $a_1(1+r)^t$, или, полагая для краткости $1+r=q$, въ a_1q^t .

Второй вкладъ, находясь въ банкѣ $t-1$ лѣтъ, обратится къ концу срока въ a_2q^{t-1} .

Третій взносъ къ концу того же срока обратится въ a_3q^{t-2} и т. д.

Последній вкладъ, находясь подъ процентами 1 годъ, даетъ a_tq .

Сложивъ эти суммы, получимъ накопившійся капиталъ

$$A = a_1q^t + a_2q^{t-1} + a_3q^{t-2} + \dots + a_tq \quad (1)$$

Когда вклады различны, формула (1) не допускаетъ упрощеній: если же ежегодные взносы равны, то, обозначивъ каждый изъ нихъ буквою a и вынеся за скобки общій множитель aq , найдемъ:

$$A = aq(q^{t-1} + q^{t-2} + \dots + q + 1).$$

Выраженіе въ скобкахъ представляетъ сумму членовъ геометрич. прогрессии первый членъ которой $= 1$, а знаменатель q ; по формулѣ суммы имѣемъ

$$A = aq \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \quad (2)$$

Примѣчаніе. Если бы сумма a была вносима въ концѣ каждаго года, то первый вкладъ находился бы въ банкѣ $t-1$ лѣтъ, второй $t-2$, ..., послѣдній 0 лѣтъ, и получили бы

$$A' = aq^{t-1} + aq^{t-2} + \dots + aq + a$$

или

$$A' = a \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

833. Ур. (2) содержитъ 4 количества; A , a , p и t , и позволяетъ найти одно изъ нихъ, когда остальные три будутъ даны. Отсюда 4 задачи:

1. Для опредѣленія A непосредственно служить ур. (2).
2. Опредѣляя a , имѣемъ

$$a = \frac{A(q-1)}{q(q^t-1)}.$$

3. Для нахождения t , освобождая ур. (2) отъ знаменателя, имѣемъ:

$$A(q-1) = aq(q^t-1), \quad \text{откуда} \quad q^t = 1 + \frac{A(q-1)}{aq};$$

ур.—іе показательное.

4. Опредѣленіе p приводится къ нахожденію q . Изъ послѣдняго ур.—ія прямо находимъ

$$aq^{t+1} - (A+a)q + A = 0,$$

ур.—іе $t+1$ -я степени относительно q .

Численный примѣръ. $a = 2000$, $t = 20$, $p = 5$; найти A ?

$$A = 2000 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{0,05} = 42000(1,05^{20} - 1).$$

Такъ какъ \lg разности $1,05^{20} - 1$ нельзя найти непосредственно, то предварительно вычисляемъ $1,05^{20}$.

Вспомогат. вычисл.		Вычисленіе А.	
$y = 1,05^{20}$		$\lg 42000 = 4,6232493$	
$\lg y = 20 \lg 1,05 = 0,4237860$		$\lg (1,05^{20} - 1) = 0,2183510$	
26532	7700	$\lg A = 4,8416003$	
9	160:164	$A = 69438,5.$	
	147.6		
7	12.4		
$y - 1 = 1,653297$			

834. Приводимъ еще нѣсколько упражненій на срочные вклады.

1. Какой капиталъ накопится чрезъ n лѣтъ, если въ концѣ каждого полугодія вносить по $\frac{a}{2}$ руб., или по $\frac{a}{4}$ въ концѣ каждой четверти года, или по $\frac{a}{12}$ въ концѣ каждого мѣсяца?

Внося $\frac{a}{2}$ р. въ концѣ каждого полугодія, составимъ капиталъ

$$C' = \frac{a}{r} \left[\left(1 + \frac{r}{2} \right)^{2n} - 1 \right]$$

если $\frac{r}{2}$ означаетъ прибыль на 1 р. въ полугодіе.

Внося $\frac{a}{4}$ въ концѣ каждой четверти года, составимъ капиталъ

$$C' = \frac{a}{r} \left[\left(1 + \frac{r}{4} \right)^{4n} - 1 \right].$$

гдѣ $\frac{r}{4}$ означаетъ прибыль на 1 р. въ четверть года.

Наконецъ, вклады въ концѣ каждого мѣсяца дадутъ

$$C'' = \frac{a}{r} \left[\left(1 + \frac{r}{12} \right)^{12n} - 1 \right].$$

Примѣчаніе. Принимая $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{4}$, $\frac{r}{12}$ за полугодичные, трехмѣсячные и мѣсячные проценты, получаемъ въ концѣ года прибыль, нѣсколько большую r . Чтобы годовые проценты составляли въ точности r , надо вести вычисленіе такъ Пусть процентныя деньги капитализируются по истеченіи доли $\frac{1}{k}$ года; чтобы 1 руб. въ концѣ года обратился въ $1 + r$, надо, чтобы проценты были

$$r_1 = \sqrt[k]{1 + r} - 1,$$

ибо, прибавляя 1 къ r_1 и возвышая результатъ въ степень k , имѣемъ:

$$(1 + r_1)^k = (\sqrt[k]{1 + r})^k = 1 + r.$$

Такимъ образомъ, въ вышеприведенныхъ задачахъ получимъ

$$C_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{\sqrt[2]{1+r} - 1}; \quad C_2 = \frac{a}{4} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{\sqrt[4]{1+r} - 1}; \quad C_3 = \frac{a}{12} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{\sqrt[3]{1+r} - 1}$$

результаты, весьма мало различающіяся отъ прежнихъ.

II. Какой капиталъ составитъ въ концѣ n лѣтъ, если въ концѣ каждаго года вносить суммы, измѣняющіяся въ арифметической прогрессіи?

Пусть a есть первый вкладъ; $a + b, a + 2b, \dots, a + (n-1)b$ слѣдующіе. Искомый капиталъ X будетъ

$$X = a(1+r)^{n-1} + (a+b)(1+r)^{n-2} + \dots + a + (n-1)b;$$

полагая $\frac{1}{1+r} = q$, имѣемъ

$$(1+r)^n \{aq + (a+b)q^2 + (a+2b)q^3 + \dots + [a + (n-1)b]q^n\}.$$

Выраженіе въ скобкахъ можно представить въ видѣ

$$a(q + q^2 + \dots + q^n) + b[q^2 + 2q^3 + \dots + (n-1)q^n],$$

такъ $q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}$; положивъ

$$S = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \dots + (n-1)q^n, \text{ имѣемъ}$$

$$Sq = q^3 + 2q^4 + \dots + (n-2)q^n + (n-1)q^{n+1}, \text{ откуда}$$

$$S(1-q) = q^2 + q^3 - q^4 + \dots - q^n - (n-1)q^{n+1}, \text{ или}$$

$$S(1-q) = \frac{q^{n+2} - q^2}{q-1} - nq^{n+1}, \text{ откуда } S = -\frac{q^2(q^n - 1)}{(q-1)^2} + \frac{nq^{n+1}}{q-1}.$$

Подстановка въ формулу X и замена q дробью $\frac{1}{1+r}$ даетъ

$$X = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \left(a + \frac{b}{r} \right) - \frac{nb}{r}.$$

III. Какой капиталъ накопится чрезъ n лѣтъ, если въ концѣ каждаго года вносить суммы, измѣняющіяся въ геометрической прогрессіи?

Пусть будутъ $a, ak, ak^2, \dots, ak^{n-1}$ послѣдовательные взносы.

Къ концу срока они обратятся въ

$$a(1+r)^{n-1}, ak(1+r)^{n-2}, \dots, ak^{n-1}.$$

Сумма членов этой прогрессии, знаменатель которой $= \frac{k}{1+r}$, будет

$$Y = a \frac{(1+r)^n - k^n}{(1+r) - k}.$$

IV. *Цинность в настоящее время долга A , подлежащего уплате через n лет, называется суммой, которую нужно бы было тотчас положить в банк на сложные $\frac{r}{100}$, чтобы спустя n лет получить A руб.*

Слѣд., если цинность в настоящее вр. суммы A назовем A_1 , то $A_1(1+r)^n = A$, откуда

$$A_1 = \frac{A}{(1+r)^n}.$$

V. *Учет при сложных процентах.* Учетом наз. разность между номинальною величиною долга и его действительною величиною; поэтому, формула учета будет

$$e = A - \frac{A}{(1+r)^n} = A \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right].$$

Положив для краткости $\frac{1}{(1+r)^n} = q$, предыдущія формулы представим въ сокращенномъ видѣ:

$$A_1 = Aq^n, \quad e = A(1 - q^n).$$

VI. *Задача.* Никто долженъ уплатить суммы A, A', A'', \dots соответственно через t, t', t'', \dots летъ через сколько летъ мы можемъ погасить долгъ единовременнымъ взносомъ B рублей?

Пусть x будетъ исконое число лѣтъ; цинность въ настоящее время на — сати B и d равна суммѣ цинностей въ настоящее время заплатить A, A', A'', \dots ; потому ур—ніе задачи будетъ:

$$\frac{A}{(1+r)^t} + \frac{A'}{(1+r')^{t'}} + \frac{A''}{(1+r'')^{t''}} + \dots = \frac{B}{1+r}.$$

Частный случай. Если ияются только два платежа, и притомъ $B = 2A$ предыдущее ур. приводится къ

$$q' = \frac{1}{2}(q'^{-1} + q'').$$

Изъ видѣть, что исконое время всегда короче средняго изъ техъ обн— ныхъ платъ. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $t' = t + 2d$ и вынеся множителя q' , имеемъ

$$q' = q'^{-1} + \frac{1}{2} q' + \frac{1}{2} q'^{-1}.$$

Но количество, сложенное съ своею обратной величиною, даетъ всегда сумму, большую 2; слѣд. $q > q'^{-1}$; а какъ $q < 1$, то необходимо $t < t + d$.

Примѣръ. Уплатить подлежатъ 12500 р. чрезъ 7 летъ и 12500 р. чрезъ 13 годъ. Чрезъ сколько летъ можно погасить долгъ однимъ взносомъ въ 25000 р., полагая сложные $\frac{r}{100}$ по 4,5 со ста?

Вопросъ рѣшается ур—нъ

$$2\left(\frac{1}{1,045}\right)^x = \left(\frac{1}{1,045}\right)^7 + \left(\frac{1}{1,045}\right)^{48};$$

при помощи логарифмовъ находимъ

$$\left(\frac{1}{1,045}\right)^7 = 0,7848283$$

$$\left(\frac{1}{1,045}\right)^{48} = 0,1506605$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{1,045}\right)^x = 0,8854888$$

$$x = \frac{\lg 0,4427444}{\lg \frac{1}{1,045}} = \frac{1,6461531}{1,9808837} = \frac{3538569}{191163}$$

$$= 18 \text{ лѣтъ } 6 \text{ мѣс.}$$

Срочныя уплаты.

835. Определеіе. Срочною уплатою называется постоянная сумма, которую слѣдуетъ вносить въ концѣ каждаго года для погашенія долги вмѣстѣ съ его сложными процентами.

836. Основной вопросъ.—Занять въ банкѣ капиталъ a по $p\%$ въ годъ (считая сложные $\frac{p}{100}$) на t лѣтъ. Какую сумму x нужно вносить въ концѣ каждаго года, чтобы долгъ былъ погашенъ?

Долгъ a въ концѣ 1-го года обращается въ aq ; по внесеніи же срочной уплаты x онъ обращается въ $aq - x$; такъ же долгъ въ началѣ 2-го года.

Въ теченіе года эта сумма обращается въ $(aq - x)q$ или въ $aq^2 - xq$; по уплатѣ же въ концѣ 2-го года x руб., долгъ въ началѣ 3-го года будетъ $aq^2 - xq - x$.

Такимъ же образомъ въ началѣ 4-го года долгъ будетъ $aq^3 - xq^2 - xq - x$, и т. д.

По аналогіи съ этими формулами заключаемъ, что по истеченіи t лѣтъ долгъ банку будетъ

$$aq^t - xq^{t-1} - xq^{t-2} - \dots - xq - x \dots (A)$$

По условію, черезъ t лѣтъ долгъ д. б. погашенъ; отсюда ур.

$$aq^t - xq^{t-1} - xq^{t-2} - \dots - xq - x = 0,$$

или

$$aq^t - x(q^{t-1} + q^{t-2} + \dots + q + 1) = 0,$$

или, наконецъ:

$$aq^t - x \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} = 0 \dots (1)$$

Другой способ вывода. Если бы должник ничего не вносил в конце срока, то в конце t -го года он должен был бы внести aq^t .

Но в конце 1-го года он вносит x руб.; если бы он удержал эту сумму и поместил ее на ссуде $q\%$, то в $t-1$ лет, оставшихся до срока, эта сумма обратилась бы в xq^{t-1} . И так, 1-я уплата этого величина и должна войти при окончательном расчете. Таким же образом:

2-ая срочная уплата, при окончат. расчете, эквивалентна xq^{t-2} рублям;

3-ья „ „ „ „ „ „ „ xq^{t-3} „

4-ая „ „ „ „ „ „ „ xq^{t-4} „

Предпоследняя уплата равносильна сумме . . . xq „
вносимой в конце t -го года.

Наконец, последняя, „ „ „ „ „ „ „ x „

Все эти суммы, образуют геом. прогр. в t членов с первым членом x и с знаменателем q дадут сумму $x \frac{q^t - 1}{q - 1}$, каковая сумма и должна погашать долг aq^t ; откуда ур—ние

$$aq^t = \frac{x[q^t - 1]}{q - 1}.$$

Но прежнему нить 4 задачи.

837. Определение срочной уплаты Решая ур. (1) на x , имеем

$$x = \frac{aq^t}{q^t - 1}.$$

Частный случай. Если срок займа неограниченно велик, то, положив $t = \infty$ и замечая, что q^t , при $q > 1$ и $t = \infty$, обращается в ∞ найдем, $x \approx \frac{aq^t}{q^t} = a$. Для раскрытия неопределенности делим числителя и знамен на q^t ; находим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{a q^t - 1}{q^t - 1} \right] = \frac{a(q - 1)}{q - 1} = ar,$$

где $r = \frac{p}{100}$.

Легко истолковать этот результат, замечая, что ar или $\frac{ap}{100}$ есть формула простых годовых процентов долга a . Итак, предель срочная уплата при неогранич. сроке займа равна простым годовым процентам занятого капитала, результат, который не трудно было предвидеть заранее. В самом деле, очевидно, что срок займа ∞ б. бесконечно велик только тогда, когда срочная уплата погашает один простые проценты, оставляя капитал без изменений. На таких условиях в большинстве случаев делаются *государственные займы*; государство ограничивается уплатой, в определенные сроки, простых процентов своего долга, так что срочные уплаты, вносимые государством, не могут служить к погашению долга, которое достигается другими средствами, когда это дозволяет финансовое положение страны. Сказанная уплата называется, по этому, *непрерывною рентою*.

Заемъ, совершаемый государствомъ на такихъ условіяхъ, называется *консолидированнымъ долгомъ*.

Обыкновенно же срочная уплата бываетъ больше *непрерывной ренты*, и разность между ними выражается такъ:

$$x - ar = \frac{ar}{q^t - 1}.$$

Этотъ избытокъ срочной уплаты надъ непрерывною рентою, которую слѣдовало бы уплачивать въ случаѣ неограниченнаго срока займа, и составляетъ *фондъ погашенія*.

838. Опредѣленіе займа. Изъ ур—ія (1) прямо имѣемъ

$$a = \frac{x(q^t - 1)}{q^t - (q - 1)}.$$

839. Опредѣленіе процентовъ приводится къ опредѣленію q . Освобождаемъ ур. (1) отъ знаменателя и приводя въ порядокъ члены, находимъ ур—іе

$$aq^{t+1} - (a + x)q^t + x = 0,$$

$t + 1$ -й степени относительно q ; вообще, оно неразрѣшимо обычными приемами элементарной алгебры. Но можно найти численную величину q помощью методическихъ попытокъ (значительно облегчаемыхъ таблицами сложныхъ %). Раздѣливъ уравненіе (1) на aq^t , можно представить его въ видѣ

$$r = \frac{r}{a} \cdot 1 - \frac{1}{(1 + r)^t} = 0 \dots (2)$$

Замѣняя r послѣдовательно числами 0.03, 0.04, 0.05, 0.06 . . . т.-е. наиболее употребительными процентами, смотришь на результаты подсчетовъ. Если этотъ результатъ будетъ 0, r въ точности равно взятому числу; вообще же первая часть ур—ія будетъ отлична отъ нуля. Численная величина и знакъ этой разницы укажутъ степень точности испытываемаго числа и смыслъ приближенія.

1. *Смыслъ полученнаго приближенія.* Если дать r значеніе, большее настоящаго, первая часть ур—ія будетъ *положительна*; для r слишкомъ *малого*, она будетъ *отрицательна*. Для доказательства беремъ выраженіе (A):

$$aq^t - (xq^{t-1} + xq^{t-2} + \dots + x),$$

въ которомъ первый членъ есть долгъ съ процентами, а выраженіе въ скобкахъ есть сумма, необходимая для покрытія долга. Если за прибыль на 1 р. взять число R , большее истинной величины r , то данная уплата будетъ недостаточна для погашенія долга: въ самомъ дѣлѣ, таблицы, вычисленные при помощи формулы § 838, показываютъ, что при a и t постоянныхъ, r возрастаетъ вмѣстѣ съ r ; слѣд.

$$a(1 + R)^t > x(1 + R)^{t-1} + x(1 + R)^{t-2} + \dots + x$$

или

$$a(1 + R)^t > x \cdot \frac{(1 + R)^t - 1}{R}.$$

или

$$R > \frac{x}{a} \left[1 - \frac{1}{(1 + R)^t} \right].$$

Если же въ r взять меньшую величину R' , то данная уплата будетъ слишкомъ велика для покрытия долга; слѣд. будетъ

$$R' < \frac{x}{a} \left[1 - \frac{1}{(1+R')^t} \right].$$

2. *Выборъ перваго приближенія.*—Если t весьма велико (больше 30), $\frac{1}{(1+R)^t}$ будетъ мало; пренебрегая этимъ членомъ, найдемъ для r приближенную *по избытку* величину

$$R = \frac{x}{a}.$$

Но это приближеніе весьма грубо, когда t содержится между 15 и 30, а если $t < 15$, оно не дастъ полезнаго указанія.

Видно того, чтобы пренебрегать въ ур-ніи уплатъ членомъ $\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{(1+r)^t}$, измѣнимъ знаменателя $(1+r)^t$ биномъ $1+tr$, меньшимъ $(1+r)^t$; получимъ

$$\frac{1}{(1+r)^t} < \frac{1}{1+tr},$$

и слѣд.

$$r > \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{1+tr}, \quad \text{или} \quad r > \frac{x}{a} - \frac{1}{t}.$$

Слѣд. приближеніе *по недостатку* для r будетъ

$$r' = \frac{x}{a} - \frac{1}{t}.$$

3. *Приближеніе точное до 0,01.* Сначала испытываемъ r' ; затемъ представляемъ

$$r_1 = r' + 0,01; \quad r_2 = r' + 0,02; \quad r_3 = r' + 0,03;$$

и первое изъ этихъ чиселъ, которое сдѣластъ первую часть ур-нія (2) положительною, и будетъ значеніемъ r , точнымъ до 0,01 *по избытку*; а предыдущее будетъ точно до 0,01 *по недостатку*. Такимъ образомъ найдемъ два значенія для r : r_2 и r_3 , напр., приближенные въ противоположномъ смыслѣ съ точностью до 0,01.

4. *Слѣдующія приближенія, получаемыя интерполированіемъ.* Пусть e_2 есть величина первой части ур-нія (2) для $r = r_2$; e_3 ея величина для $r = r_3$; можно принять, съ малою погрѣшностью, что въ интервалѣ $r_3 - r_2$ измѣненія первой части пропорціональны приращеніямъ r .

Пусть будетъ y — поправка для r_2 ; говоряиъ: когда r измѣняется отъ r_2 до r_3 , первая часть измѣняется отъ e_2 до e_3 ; на сколько r должно измѣниться начиная отъ r_2 , чтобы разниця уменьшилась отъ e_2 до 0? Это сводится къ пропорціи

$$\frac{e_2 + e_3}{e_2} = \frac{0,01}{y},$$

изъ которой

$$y = \frac{0,01 \times e_2}{e_2 + e_3};$$

из y достаточно ограничиться цифрой тысячных: приближение $r_2 + y$ всегда будет по недостатку. Вычисляем разницы первой части для

$$r = r_2 + y \quad \text{и} \quad r = r_2 + y + 0,001,$$

и если последнее значение положительно,

$$r_2 + y \quad \text{и} \quad r_2 + y + 0,001$$

будут два приближения — одно по недостатку, другое по избытку, точные до 0,001.

Выходи от этих двух результатов, получив таким же путем цифру десятитысячных, и т. д.

Численный пример. Вычислить проценты, если $a = 10000$, $x = 1202,41$ р., $t = 10$.

Прежде всего находим:

$$\frac{x}{a} = 0,12024, \quad \frac{x}{a} - \frac{1}{t} = 0,0202 \text{ (по недостатку).}$$

Испытание 0,03.

$$(1,03)^{-10} = 0,744074; \quad 1 - (1,03)^{-10} = 0,255926;$$

$$\frac{x}{a} \times 0,255926 = 0,0307728.$$

Уклонение — 0,0007728, след. 0,03 есть приближение по недостатку.

Испытание 0,04.

$$(1,04)^{-10} = 0,6755642; \quad 1 - (1,04)^{-10} = 0,3244358;$$

$$\frac{x}{a} \times 0,3244358 = 0,0390105;$$

уклонение — 0,0009895; след. 0,04 — приближение по избытку.

Интерполирование пропорциональными частями.

Сумма абсолютных значений уклонений =

$$0,0007728 + 0,0009895 = 0,0017623,$$

$$y = 0,01 \times \frac{0,0007728}{0,0017623} = 0,004;$$

и новое приближение есть 0,034.

Испытание 0,034.

$$(1,034)^{-10} = 0,715805; \quad 1 - (1,034)^{-10} = 0,284195;$$

$$\frac{x}{a} \times 0,284195 = 0,0341719;$$

уклонение — 0,0001719, след. 0,034 — приближение по недостатку.

Это уклонение составляет приблизительно четверть первого: потому увеличиваем проценты на 0,001 и испытываем 0,035.

Испытание 0,035.

$$1,035)^{-10} = 0,708919; \quad 1 - (1,035)^{-10} = 0,291081;$$

$$\frac{x}{a} \times 0,291081 = 0,0349999;$$

увеличиве равно нулю, сл. 0,035 есть точная прибыль на 1 рубль.

Таким образом $p = 3,5$.

840 Определение времени. Из ур. (1) имеем:

$$q^t = \frac{x}{ar}$$

откуда, взяв логарифмы обеих частей,

$$t = \frac{\lg x - \lg r}{\lg q}.$$

Изъяснение. Неизвестное t должно быть числом действительным и положительным и целым.

Но формула времени содержит $\lg(x - ar)$, который не всегда может быть взят, такъ какъ отрицат. число не имеетъ действительнаго логарифма. Отсюда необходимость различать три случая:

1. $x < ar$; $\lg(x - ar)$ будетъ мнимымъ, и задача невозможна. Это легко видеть а priori. Въ самомъ дѣлѣ, ar — представляетъ простое $\frac{a}{r}$ долга, и какъ срочная уплата меньше этихъ проц. денегъ, то ее недостаточно даже для уплаты процентовъ, такъ что долгъ съ теченіемъ времени будетъ увеличиваться.

2. $x = ar$. Въ этомъ случаѣ $x - ar = 0$, $\lg(x - ar) = -\infty$, и $t = -\infty$. Это означаетъ опять, что долгъ не можетъ быть погашенъ. Въ самомъ дѣлѣ, а priori видно, что когда сроч. упл. x равна простымъ процентн. деньгамъ, то она будетъ погашать только эти деньги, и долгъ всегда будетъ оставаться одинаковымъ. Это и есть *непрерывная рента*, о которой было говорено выше.

3. $x > ar$: обыкновенный случай возможности задачи, такъ какъ срочная уплата, будучи больше годовыхъ процентовъ на капиталъ, будетъ погашать не только эти послѣдніе, но и часть капитала; такъ что черезъ нѣсколько лѣтъ долгъ будетъ погашенъ.

Самая формула даетъ положительное значеніе для t ; но еще нужно, чтобы это значеніе было и *цѣлымъ*. Но если для t получается число дробное, то это означаетъ, что данною срочною уплатою долгъ не м. б. погашенъ, и что по истеченіи времени, равнаго цѣлой части t , останется часть долга, меньшая срочной уплаты. Пусть цѣлая часть t будетъ T ; замѣтивъ, что долгъ выражается первою частью уравненія (1), заключаемъ, что по истеченіи T лѣтъ остатокъ долга будетъ

$$R - aq^T = \frac{x(q^T - 1)}{q - 1}.$$

Примѣръ. Во сколько лѣтъ можно погасить долгъ въ 5000000 р., уплачивая ежегодно по 600000, если платится по 5%?

$$\begin{aligned} ar &= 250000 \text{ р.} & \lg x &= 5,7781513 \\ x - ar &= 350000 \text{ р.} & \lg(x - ar) &= 5,5440680 \\ & & & 0,2340833 \end{aligned}$$

$$t = \frac{0,2340833}{0,02119} = 11. . .$$

Такъ какъ для t получилось число дробное, то вычисляемъ остатокъ R долга.

$$\begin{aligned} 1,05^{11} &= 1,710339 & \lg 5,10^6 &= 6,6989700 \\ 1,05^{11} - 1 &= 0,710339 & \lg 1,05^{11} &= 0,2330822 \\ \lg 1,05^{11} &= 0,2330822 & & 6,9820522 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} aq^T &= 8552700 \\ \lg 6,10^6 &= 5,7781513 \\ \lg 0,710339 &= 1,8514658 \\ \text{доп. } \lg 0,05 &= 1,3010300 \\ & 6,9306471 \end{aligned}$$

$$\frac{aq^T - 1}{q - 1} = 8524072$$

$$R = 8552700 - 8524072 = 28628 \text{ р.}$$

841. Займы посредствомъ облигацій.— Большія промышленныя общества, напр. желѣзнодорожныя компании и т. п., дѣлаютъ займы, пуская въ обращеніе облигаціи, приносящія опредѣленный годовой или полугодовой процентъ; облигаціи погашаются, по извѣстной цѣнѣ, при помощи тиражей, въ теченіе извѣстнаго числа лѣтъ.

Ежегодно компания отчисляетъ изъ барышей предпріятія опредѣленную сумму для уплаты процентовъ и для погашенія возможно большаго числа облигацій.

Пусть число выпущенныхъ облигацій будетъ N ; номинальная цѣна каждой, т.-е. цѣна, по которой облигація д. б. выкуплена, пусть будетъ V ; пусть погашеніе продолжается n лѣтъ; наконецъ, прибыль на 1 рубль въ 1 годъ пусть будетъ r .

Такимъ образомъ весь подлежащій погашенію заемъ NV , а по истеченіи n лѣтъ этотъ долгъ обратится въ $NV(1+r)^n$.

Если отчисляемая ежегодно на погашеніе долга сумма будетъ a , то цѣнность этихъ уплатъ къ концу срока будетъ

$$a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a = \frac{a(1+r)^n - a}{r}$$

Такъ какъ эта сумма должна погашать накопившійся къ концу n лѣтъ долгъ, то

$$\frac{a(1+r)^n - a}{r} = NV(1+r)^n.$$

откуда и находимъ, какова должна быть ежегодная уплата a , погашающая долгъ; найдемъ

$$a = \frac{NV(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}.$$

Часть этой суммы a идетъ на уплату процентовъ на непогашенныя облигации, а другая часть на выкупъ возможно-большаго числа облигаций.

При выпускѣ облигаций компанія составляетъ предварительно такъ наз. *таблицу погашения* займа, т.-е. таблицу ежегодныхъ уплатъ, a , чтобы заранѣе знать, сколько облигаций должно быть ежегодно погашено.

Примѣръ. *Компанія выпускаетъ 600.000 облигаций, по 500 р. каждая, дающихъ ежегодно 3% прибыли. Выкупъ долженъ быть оконченъ въ 92 года. Какова д. б. срочная уплата, погашающая долгъ, и по сколько облигаций каждый годъ д. б. погашено?*

Вычисляя a , найдемъ

$$a = 9.635.083 \text{ р.}$$

Составимъ теперь таблицу погашенія.

1-й годъ. Въ концѣ 1-го года общество должно уплатить по 15 р. прибыли на каждую облигацию, всего 9.000.000 р. На погашеніе остается 9.635.083;

9.000.000 — 635.083 р. Этою суммою можно погасить $\frac{635.083}{500} = 1.270$ облигаций, и останется 83 р., которые прибавляютъ къ слѣдующей срочной уплатѣ.

2-й годъ. Осталось 600.000 — 1.270 = 598.730 облигаций. На нихъ нужно уплатить процентовъ 598.730 \times 15 = 8.980.950 р. Срочная уплата, съ остаткомъ въ 83 р., составитъ 9.635.166 р. Вычитая отсюда проценты на облигации, найдемъ, что на погашеніе облигаций останется 9.635.166 — 8.980.950 = 654.216 р., что позволяетъ погасить

$$\frac{654.216}{500} = 1.308 \text{ облигаций.}$$

съ остаткомъ въ 216 р., которые приобщаются къ третьей уплатѣ.

Продолжая такъ же обр., найдемъ, что въ концѣ 3-го года будетъ погашено 1.347 обл. и останется 469 р.; что въ концѣ 4-го года погасится 1.388 обл.; въ концѣ 5-го — 1.432 обл., въ концѣ 6-го — 1.475, въ концѣ 7-го — 1.519, въ концѣ 8-го — 1.564, въ концѣ 9-го — 1.610, въ концѣ 10-го — 1.660 и т. д. Ежегодная срочная уплата, вообще, какъ видимъ, изъ года въ годъ увеличивается.

842. Пожизненные ренты. Такъ называются срочныя уплаты, выплачиваемыя ежегодно вкладчику, въ теченіе всей его жизни, банкіромъ или заемщикомъ. Капиталь, отданный вкладчикомъ, д. б. таковъ, чтобы, при сложныхъ процентахъ, онъ могъ дать сумму, равную суммѣ всѣхъ выплатъ, которая банкіръ обязуется выплачивать вкладчику въ концѣ каждаго года, въ продолженіе всей его жизни.

Пусть и вѣстны лѣта вкладчика, внесенный имъ банкіру капиталъ и норма процентовъ; пользуясь *таблицами смертности*, можно опредѣлить вѣроятное число лѣтъ, которое осталось прожить вкладчику.

Типичная задача о пожизненныхъ рентахъ есть вѣщо иное, какъ частный случай задачи о срочныхъ уплатахъ.

Страхованіе жизни, пожизненные ренты, сберегательныя кассы, — все это основано на вѣроятной продолжительности человѣческой жизни и на быстротѣ нарастанія капитала, помещеннаго на сложные проценты.

843. Задача. Никто для покупки своей жень ежегодной пенсии в b руб., платит ежегодно во всюю кассу a руб. По истечении n лет умирает вкладчик, а m лет спустя его жена. Сколько приобрела или потеряла касса, если проценты считались тою и другою стороною, по p в год?

Пусть плата тою и другою стороною совершается в начале каждого года, а проценты считать по истечении n лет: в таком случае 1-я взносы приносят проценты $n + m$ лет, и слѣд. достигают величины aq^{n+m} ; второй годок живых и достигают величины aq^{n+m-1} и т. д. Последний вкладчик заплатил $m + 1$ год, и ценность его $= aq^m$. Таким же образом, ценность потерь пеней b через m лет равна bq^m , последний $= bq$. Прибыль (положит. или отриц.) кассы будетъ

$$(aq^{n+m} + aq^{n+m-1} + \dots + aq^{m+1}) - (bq^{m+1} + bq^m + \dots + bq)$$

или

$$aq^{m+1}(q^n - 1) - bq(q^m - 1) \\ q - 1$$

Примѣръ. Если $a = 50$ р., $b = 200$ р., $m = 8$, $n = 20$ и $p = 4$ п., то касса имѣетъ прибыль $= 202$ р.

844. Задача. *е лица составили общество. Какой капиталъ А каждому изъ нихъ должно дать банкиру, чтобы получать отъ него пожизненную ренту, равную a рублямъ?*

Расчетъ идетъ такъ: е лицъ, по истечении 1 года, составить товарищество изъ v' лицъ; банкиръ долженъ имъ выдать av' руб. В концѣ 2-го года оставшіеся въ живыхъ отъ должныхъ выплачивать av'' и т. д.

Но ренты a , которыя банкиръ долженъ выплатить v' , v'' , v''' . . . , оставшіеся въ живыхъ вкладчики, обращаются въ концѣ 1-го, 2-го, 3-го . . . годовъ въ

$$a(1+r), \quad a(1+r)^2, \quad a(1+r)^3, \dots$$

v' вкладчиковъ, которые въ концѣ 1-го года должны получить ренты по a рубъ каждый, должны бы были внести $\frac{v'a}{1+r}$ р. въ началѣ 1-го года; v'' вкладчиковъ, которые въ концѣ 2-го года должны получить по a руб., должны бы были въ началѣ 1-го года внести $\frac{v''a}{(1+r)^2}$ руб. и т. д. Такъ что v' вкладчиковъ должны бы были внести въ началѣ 1-го года сумму

$$\frac{v'a}{1+r} + \frac{v''a}{(1+r)^2} + \dots$$

Такимъ образомъ капиталъ А, внесенный каждымъ, равенъ

$$A = \frac{a}{v} \left[\frac{v'}{1+r} + \frac{v''}{(1+r)^2} + \dots \right]$$

или, положивъ $\frac{1}{1+r} = q$:

$$A = \frac{aq}{v} [v' + v''q + v'''q^2 + \dots]$$

Если принять гипотетический законъ *Моавра*, что, ваяывая съ извѣстнаго возраста число смертей составляетъ величину постоянную, то, называя это число для ближайшаго года бывшаго d , можно предыдущей формулѣ дать видъ

$$\lambda = \frac{aq}{e} [(v = d) + (v - 2d)q + (v - 3d)q^2 + \dots + (v - nd)q^{n-1}],$$

гдѣ n — число лѣтъ періода.

Полнѣею формулу можно написать въ видѣ

$$\lambda = aq \{ 1 - q + q^2 - \dots + q^{n-1} \} \frac{aqd}{e} (1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots + nq^{n-1})$$

или, замѣчая, что

$$1 - 2q + 3q^2 - \dots + nq^{n-1} = \frac{1 - q^n}{(1 - q)^2} = \frac{nq^{n-1}}{1 - q},$$

то, имѣемъ:

$$\lambda = aq \left\{ \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{d}{e} \left[\frac{1 - q^n}{1 - q^2} + \frac{nq^{n-1}}{1 - q} \right] \right\}$$

845. Историческое примѣчаніе. — Еще въ 1544 г. *Миккиль Снорресонъ*, въ вѣкоторомъ родѣ, теорію логарифмовъ; однако же въ своемъ оцѣнѣ онъ не считалъ применимою къ упрощенію вычисленій. Позднѣе, тогда *Джонъ Неперъ*, шотландскій баронъ, примѣнилъ теорію логарифмовъ къ практикѣ вычисленій, опубликовавъ свое изслѣдваніе въ 1614 г. въ сочиненіи *Mirificae logarithmorum arithmetice descriptio*. Но онъ принялъ для своихъ логарифмовъ основаніе $e = 2,71828 \dots$, неудобное для вычисленій каждаго частнаго десятичнаго слагаема нумерація. Его другъ *Бригъ* (1556—1630), оксфордскій профессоръ, устранилъ этотъ недостатокъ, взявъ за основаніе системы логарифмовъ число 10, но указавъ самому Неперу Теорію логарифмовъ въ той формѣ, каково она изложена у насъ, дана *Эйлеромъ* въ 1748 г.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ И ИХЪ ПРИЛОЖЕНІЯ.

ГЛАВА LIII.

Непрерывныя дроби.

Определение — Происхожденіе непрерывныхъ дробей. — Свойства приближенія. Періодическія непрерывныя дроби. — Приложенія.

846. Непрерывною дробью наз. выраженіе, состоящее изъ цѣлаго числа (которое, въ частности, м. б. нулемъ), сложеннаго съ дробью, у которой знаменатель есть опять цѣлое съ дробью, и т. д.; другими словами, выраженіе вида

$$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \dots}}$$

Элементарная алгебра изучаетъ частный видъ такихъ дробей, а именно случаи, когда числители b, d, \dots равны ± 1 , а знаменатели c, e, \dots суть цѣлыя положительныя числа; слѣд., элементарная алгебра имѣетъ дѣло съ дробями вида

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}$$

Количества a_1, a_2, a_3, \dots наз. *неполными частными*, а „называютъ *n*-ый *неполнымъ частнымъ*“; *полнымъ* же частнымъ на этой ступени называютъ $a_n - \cfrac{1}{a_{n+1}}$. Дроби $\cfrac{1}{a_2}, \cfrac{1}{a_3}, \cfrac{1}{a_4}, \dots$ называютъ *членами*, или *звеньями* непрерывной дроби. Если число членовъ непрерывной дроби ограничено, дробь наз. *конечною*; при неограниченномъ числѣ членовъ она наз. *бесконечною*.

Сокращенно непрерывную дробь пишутъ въ видѣ:

$$a_1 | a_2, a_3, \dots | \quad \text{или} \quad | a_1; a_2, a_3, \dots |$$

дѣ a_1 — цѣлое число.

847. Происхожденіе непрерывныхъ дробей. — Лтого рода дроби совершенно натурально входятъ въ анализъ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ некоторое возмѣ-

чество x , союзимое или несоюзимое, оно необходимо содержится между двумя последовательными цѣлыми числами: a_1 и $a_1 + 1$. Слѣд. можно положить

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1} \dots (1)$$

если $x_1 > 1$. Изъ равенства (1) выводимъ

$$x_1 = \frac{1}{x - a_1}.$$

Количество $\frac{1}{x - a_1}$ также содержится между двумя последовательными цѣлыми числами a_2 и $a_2 + 1$, гдѣ a_2 по меньшей мѣрѣ равно 1, что ясно изъ (1). Такимъ образомъ можно написать

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

гдѣ $x_2 > 1$. Продолжая такимъ образомъ, имѣемъ для опредѣленія x формулу

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

Это — непрерывная дробь въ вышеуказанномъ тѣсномъ и обычномъ смыслѣ; a_1, a_2, a_3, \dots — числа цѣлыя и положительныя; изъ нихъ одно только a_1 и. б. нулемъ, когда $x < 1$.

848. ТЕОРЕМА. *Всякая конечная непрерывная дробь представляетъ некоторое союзимое число.*

Пусть
$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

отсюда
$$\frac{1}{x - a_1} = a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Переносъ a_2 въ лѣвую часть равенства, находимъ

$$\frac{x - a_1}{1 + a_1 a_2 - a_2 x} = a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Продолжая такимъ же образомъ, будемъ получать въ лѣвой части всегда частное двухъ линейныхъ относительно x выражений. Наконецъ, получимъ

$$\frac{a'x - \beta'}{a''x + \beta''} = a_n.$$

откуда

$$x = \frac{a_0}{a_1} - \frac{1}{a_1}$$

число, которое не равно ни 0, ни ∞ , но x содержится между a_1 и $a_1 + 1$).

849. ТЕОРЕМА ОБРАТНАЯ. *Всякое соизмеримое число может быть представлено под видом конечной непрерывной дроби*

Пусть данное соизмеримое число будет $\frac{a}{b}$, где a и b — целые, не равные между собою, числа; и пусть, вопреки, будет $a > b$. Совершая деление, представляем дробь, получаем в частном q_1 и в остатке r_1 ; так что

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$

совершая деление $\frac{b}{r_1}$ (частное q_2 , остаток r_2) находим

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

Продолжая таким же образом делить, таким же образом действия мы вынуждены выполнять над a и b такие же действия, какия пришлось бы совершать над этими числами при нахождении ВКЛ и КЛ; и как a и b — числа первые между собою, то необходимо дойдем до остатка $r_n = 1$. Таким образом действие закончится и получится *конечная* непрерывная дробь

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n + \frac{1}{r_{n-1}}}}}}$$

Если $a < b$ и дробь $\frac{a}{b}$ — правильная, то, разделив оба ее числа на a , находим

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$$

т. е. $\frac{b}{a}$ разворачивается, по предыдущему, в конечную непрерывную дробь.

850 ТЕОРЕМА. — *Развертывание соизмеримого числа в непрерывную дробь возможно единственным способом.*

Пусть предложенное число будет x , и пусть, по обращению в непрерывную дробь вышеуказанным способом, оно имеет результат

$$x = a_1; a_2, a_3, \dots, a_n | \dots (1).$$

Допустимъ, что какимъ либо инымъ способомъ оказалось возможнымъ найти для x другое разложение въ непрерывную дробь

$$x = | a_1; a_2, a_3, \dots, a_p \dots | \quad (2)$$

Докажемъ, что оба результата тождественны. Равенство (1) показываетъ, что x содержится между двумя последовательными цѣлыми числами a_1 и $a_1 + 1$; равенство (2) показываетъ, что x заключается между двумя последовательными нѣбольшими числами a_1 и $a_1 + 1$. Сближая эти два заключенія, видимъ, что $a_1 = a_1$.

Сдѣлавъ равенства (1) и (2) можно представить такъ:

$$\frac{1}{x - a_1} = | a_2; a_3, \dots, a_n |, \quad \frac{1}{a_1 - x} = | a_2; a_3, \dots, a_n |$$

Разуждая какъ выше указано, выводимъ, что $a_2 = a_2$.

Такимъ же образомъ найдемъ, что $a_3 = a_3$ и т. д.

851. Приближенія или подходящія дроби. Соединение нѣсколькихъ членовъ непрерывной дроби

$$x = a_1 | a_2, a_3, a_4, \dots, a_n \dots |$$

то включеніемъ всегда цѣлой части, т.е. выраженія

$$\frac{a_1}{1}; a_1 + \frac{1}{a_2}; a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}; \dots$$

представляющія величину непрер. дроби x приближенно, называются *приближеніями* или *подходящими дробями*. Занежемъ изучимъ свойства этихъ величинъ.

852. 1. Законъ составленія приближенія. Первое приближеніе получимъ, сохранивъ только цѣлую часть и отбросивъ дробную часть непрерывной дроби, такимъ образомъ *первое приближеніе* — $\frac{a_1}{1}$.

Второе приближеніе найдемъ, придавъ къ a_1 дробь $\frac{1}{a_2}$ и откинувъ все остальное; *второе приближеніе* будетъ потому: $a_1 + \frac{1}{a_2}$, или $\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$.

Третье приближеніе получается изъ второго прибавленіемъ къ его знаменателю звена $\frac{1}{a_3}$; потому 3-е приближеніе будетъ

$$\frac{a_1 \left(a_2 + \frac{1}{a_3} \right) + 1}{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_1 (a_2 a_3 + 1) + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1}.$$

Замѣчаемъ, что числитель этого приближенія получается умноженіемъ числителя $a_1 a_2 + 1$ предшествующаго приближенія на неполное частное a_3 составляемаго, и прибавленіемъ къ произведенію числителя a_1 предшредшествующаго приближенія. Точно такъ же знаменатель 3-го приближенія получается умноженіемъ знаменателя предшествующаго приближ. на неполное частное составляемаго, и при-

сравненіемъ къ этому произведенію знаменателя предыдущаго приближенія. Докажемъ, что законъ этотъ имѣетъ мѣсто для составленія приближенія какого угодно порядка. Пусть будутъ

$$\frac{P_{p-2}}{Q_{p-2}}, \frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}}, \frac{P_p}{Q_p} \text{ и } \frac{P_{p+1}}{Q_{p+1}}$$

четыре ряда стоящихъ приближенія; a_p — неполное частное, соответствующее приближенію $\frac{P_p}{Q_p}$ и a_{p-1} — соответствующее приближенію $\frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}}$. Допустивъ, что законъ, замѣченный нами на третьемъ приближеніи, справедливъ для приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$, докажемъ, что онъ будетъ имѣть мѣсто и для приближенія $\frac{P_{p+1}}{Q_{p+1}}$.

По допущенію, имѣемъ:

$$\frac{P_p}{Q_p} = \frac{P_{p-1} a_p + P_{p-2}}{Q_{p-1} a_p + Q_{p-2}}. \quad (1)$$

Для образованія слѣдующаго приближенія замѣняемъ въ (1) a_p биномомъ $a_p + \frac{1}{a_{p+1}}$; находимъ

$$\begin{aligned} \frac{P_{p-1}}{Q_{p+1}} &= \frac{P_{p-1} \left(a_p + \frac{1}{a_{p+1}} \right) + P_{p-2}}{Q_{p-1} a_p + \frac{1}{a_{p+1}} + Q_{p-2}} = \frac{P_{p-1} a_p + P_{p-2} a_{p+1} + P_{p-1}}{Q_{p-1} a_p + Q_{p-2} a_{p+1} + Q_{p-1}} \\ &= \frac{P_p a_{p+1} + P_{p-1}}{Q_p a_{p+1} + Q_{p-1}}. \end{aligned}$$

Докажемъ, что если законъ справедливъ для какого-либо приближенія, то онъ справедливъ и для слѣдующаго приближенія. Непосредственнымъ составленіемъ приближеній мы убѣдились въ справедливости закона для третьяго приближенія, слѣд. по доказанному, онъ вѣренъ и для четвертаго; будучи вѣренъ для четвертаго приближенія, онъ вѣренъ и для пятаго, и т. д.; общность закона такимъ образомъ доказана. Итакъ: *для составленія приближенія какого угодно порядка, нужно умножить оба члена предыдущаго приближенія на неполное частное составляемаго, и къ произведеніямъ прибавить соответственно члены приближенія, стоящаго двумя порядками ниже.*

Примѣръ. — Пусть имѣемъ непрерывную дробь

$$x = 0 \mid 36, 7, 1, 1, 1, 4, 2 \mid .$$

1-е приближеніе — $\frac{0}{1}$; второе — $\frac{1}{36}$; для составленія слѣдующихъ поступаемъ такъ: дѣлають столько графъ,

		7	1	1	1	4	2	
0	1	7	8	15	23	107	237	
1	36	253	289	542	831	3866	8563	

сколько слѣдуетъ составить приближеній, причѣмъ въ первыхъ двухъ графахъ помѣщаются 1-е и 2-е приближенія, а въ заголовкахъ слѣдующихъ графъ — неполная частная 3-го, 4-го, . . . приближеній. Для составленія какого-либо приближенія остается, слѣдуя правилу, помножить числит. на знамен. предыдущаго приближенія на цифру, стоящую въ заголовкѣ составляемой дроби, и къ произведенію прибавить соответственно числителя и знаменателя прирѣшенія, тѣмъ порядкомъ выше составленнаго. Такимъ образомъ, для третьяго приближенія находимъ $\frac{1.7+0}{35.7-1}$ или $\frac{7}{253}$; для 4-го: $\frac{7.1+1}{253.1-36}$ или $\frac{8}{289}$, и т. д.

Примѣчаніе. — Если данная непрерывная дробь не имѣетъ цѣлой части, то за первое приближеніе берутъ $\frac{0}{1}$.

853. II Приближенія четнаго порядка — больше, а нечетнаго — меньше величины непрерывной дроби.

Пусть дана непрерывная дробь

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

Первое приближеніе $\frac{a_1}{1}$, очевидно, меньше x на $\frac{1}{a_2 + \dots}$.

Второе приближеніе $a_1 + \frac{1}{a_2}$ больше x ; ибо знаменатель a_2 дроби $\frac{1}{a_2 + \dots}$ меньше $a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}$, слѣд. дробь $\frac{1}{a_2 + \dots} > \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$, а потому $a_1 + \frac{1}{a_2} > x$.

Третье приближеніе $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$ опять меньше x ; такъ какъ дробь $\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$ приравненная здѣсь къ знаменателю a_2 дроби $\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$ больше a_2 ; а потому знаменатель $a_2 + \frac{1}{a_3}$ больше встоящаго, а дробь $\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$ меньше стоя-

щей, потому и $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} < x$. И т. д.

854. Слѣдствіе. — Величина непрерывной дроби содержится между каждыми двумя смежными приближеніями.

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ приближенія четнаго порядка — больше, а нечетнаго — меньше величины непрерывной дроби; а какъ изъ двухъ смежныхъ приближеній одно — четнаго, а другое — нечетнаго пор., то очевидно, что величина непрерывной дроби заключается между ними.

855. III. Разность между двумя смежными приближеніями всегда равна ± 1 , раздѣленной на произведеніе ихъ знаменателей.

Пусть будутъ $\frac{P_{p-2}}{Q_{p-2}}$, $\frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}}$, $\frac{P_p}{Q_p}$ три смежныя приближенія, и a_p — неполное частное, соответствующее послѣднему.

По закону составленіе приближеній

$$\frac{P_p}{Q_p} = \frac{P_{p-1} a_p + P_{p-2}}{Q_{p-1} a_p + Q_{p-2}}.$$

Вычтя первое из второго, имеемъ

$$\frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}} - \frac{P_{p-2}}{Q_{p-2}} = \frac{P_{p-1} Q_{p-2} - P_{p-2} Q_{p-1}}{Q_{p-1} Q_{p-2}} \dots (1).$$

Вычтя второе из третьего:

$$\begin{aligned} \frac{P_p}{Q_p} - \frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}} &= \frac{P_{p-1} a_p + P_{p-2}}{Q_{p-1} a_p + Q_{p-2}} - \frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}} = \frac{P_{p-1} a_p + P_{p-2} - P_{p-1}}{Q_{p-1} a_p + Q_{p-2}} = \\ &= \frac{P_{p-1} Q_{p-2} - P_{p-2} Q_{p-1}}{Q_{p-1} Q_p} \dots (2). \end{aligned}$$

Сравнивая обе разности, замѣчаемъ, что знаменатель каждой изъ нихъ есть произведение знаменателей соответствующихъ приближеній; числители же ихъ равны по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку. Изъ равенства абсолютныхъ величинъ числителей въ двухъ разностяхъ слѣдуетъ, что для ихъ опредѣленія можно брать два какия угодно смежныхъ приближенія. Такъ, вычитая изъ второго первое, находимъ

$$\frac{a_1 a_2 - 1}{a_2} = \frac{a_1}{1} - \frac{1}{a_2};$$

отсюда заключаемъ, что абс. велич. числителей въ двухъ разностяхъ равна 1; знакъ же, очевидно, будетъ (-), когда изъ приближенія четнаго порядка вычитаемъ приближеніе нечетнаго (ибо первое больше второго), и (+) въ противномъ случаѣ. Такимъ образомъ

$$\frac{P_p}{Q_p} - \frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}} = \frac{\pm 1}{Q_{p-1} Q_p}$$

856. IV Простота разности между непрерывною дробью и однимъ изъ приближеній.

Такъ какъ величина непрерывной дроби заключается между двумя смежными приближеніями, напр., $\frac{P_p}{Q_p}$ и $\frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}}$, то, очевидно, разность между величиною этой дроби и однимъ изъ этихъ приближеній, по абсолютной величинѣ, меньше $\frac{1}{Q_p Q_{p-1}}$; такъ что, взявъ вмѣсто истинной величины непрерывной дроби приближеніе $\frac{P_p}{Q_p}$, можемъ быть увѣрены, что ошибка, которую мы при этомъ дѣлаемъ, меньше единицы, раздѣленной на произведение знаменателей взятаго приближенія и непосредственно за нимъ слѣдующаго.

Примѣръ. — Непрерывная дробь

$$x = 0 \mid 2, 11, 2, 1, 10 \mid$$

имѣетъ приближенія: $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{11}{23}, \frac{23}{48}, \frac{34}{71}, \frac{363}{756}$.

Взявъ вместо истинной величины непр. дроби, наприм., ея третье прибли-
жение, дѣлаемъ погрѣшность, меньшую $\frac{1}{48 \cdot 23}$ т.-е. $\frac{1}{1004}$.

Если бы мы пожелали имѣть предѣлъ погрѣшности приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$, не вы-
числяя знаменателя слѣдующаго приближенія, то достаточно взять въ сообра-
женіе, что $\frac{1}{Q_p Q_{p+1}} = \frac{1}{Q_p(Q_p a_{p+1} + Q_{p-1})}$, гдѣ $a_{p+1} \geq 1$, такъ-что наименьшая ве-
личина количества $\frac{1}{Q_{p+1}}$ равна $\frac{1}{Q_p + Q_{p-1}}$, чаще же больше этой суммы. Такимъ
образомъ дробь $\frac{1}{Q_p(Q_p + Q_{p-1})} < \frac{1}{Q_p Q_{p+1}}$, а слѣдов. ошибка приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$,
меньшая $\frac{1}{Q_p Q_{p+1}}$, и подавно меньше $\frac{1}{Q_p(Q_p + Q_{p-1})}$; таковъ второй, болѣе гру-
бый, предѣлъ погрѣшности приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$.

Если бы въ знаменателѣ дроби $\frac{1}{Q_p(Q_p + Q_{p-1})}$ мы откинули слагаемое Q_{p-1} ,
то этимъ уменьшили бы знаменателя; слѣд. $\frac{1}{Q_p^2} > \frac{1}{Q_p(Q_p + Q_{p-1})}$. Заключаемъ,
что и дробь $\frac{1}{Q_p^2}$ можетъ также служить предѣломъ погрѣшности приближе-
нія $\frac{P_p}{Q_p}$.

Итакъ, для опредѣленія погрѣшности приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$ служатъ неравенства

$$1. \quad x - \frac{P_p}{Q_p} < \frac{1}{Q_p Q_{p+1}}; \quad 2. \quad x - \frac{P_p}{Q_p} < \frac{1}{Q_p(Q_p + Q_{p-1})}; \quad 3. \quad x - \frac{P_p}{Q_p} < \frac{1}{Q_p^2}.$$

Примѣняя второй предѣлъ къ приближенію $\frac{11}{23}$, имѣемъ:

$$x - \frac{11}{23} < \frac{1}{23(23+2)}, \text{ или } \frac{1}{575}.$$

Формула для третьяго предѣла даетъ

$$x - \frac{11}{23} < \frac{1}{23^2}, \text{ т.-е. } \frac{1}{529}.$$

857. V. Всякое приближеніе есть дробь несократимая. Въ самомъ
цѣлѣ, пусть числ. и знам. приближенія $\frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}}$ имѣютъ общаго множителя k , от-
личнаго отъ 1, такъ что $P_{p-1} = kr$, $Q_{p-1} = kr'$. Если $\frac{P_p}{Q_p}$ есть слѣдующее при-
ближеніе, то

$$\frac{P_p}{Q_p} - \frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}} = \pm \frac{1}{Q_{p-1} Q_p}, \quad \text{откуда} \quad P_p Q_{p-1} - P_{p-1} Q_p = \pm 1.$$

Подставляя сюда вмѣсто P_{p-1} и Q_{p-1} соответственно kr и kr' , находимъ:
 $kr'P_p - krQ_p = \pm 1$, и слѣд. $r'P_p - rQ_p = \pm \frac{1}{k}$, т.-е. что разность двухъ цѣ-
лыхъ чиселъ равна правильной дроби: результатъ невозможный; сл. невозможно
и предположеніе, что P_{p-1} и Q_{p-1} имѣютъ общаго множителя.

858. VI. Всякое приближеніе ближе подходит къ величинѣ непрерывной дроби, нежели ему предшествующее. Пусть $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ будутъ три, рядомъ стоящія, приближенія непрерывной дроби

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \dots}}}}}}$$

и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ — неполное частное послѣдняго изъ нихъ. Имѣемъ

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n a_{n-1} + P_{n-2}}{Q_n a_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

Если въ это выраженіе вмѣсто a_{n-1} подставимъ полное частное

$$a_{n-1} = \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-3} + \dots}} \quad (1)$$

то получимъ точную величину дроби x . Обозначивъ (1) буквою y и замѣтивъ, что $y > 1$, ибо наименьшая величина a_{n-1} есть 1, найдемъ, что

$$x = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}}.$$

Намъ нужно доказать, что разность между x и приближеніемъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, по абсол. велич., больше разности между x и слѣдующимъ приближеніемъ $\frac{P_n}{Q_n}$.

Составимъ эти разности:

$$1) \quad x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) y}{Q_{n-1} Q_n y + Q_{n-1}^2}.$$

а какъ

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = \pm 1,$$

то

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\pm y}{Q_{n-1}(Q_n y + Q_{n-1})} = \Delta_1$$

$$2) \quad x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1}}{Q_n(Q_n y + Q_{n-1})} = \frac{\mp 1}{Q_n(Q_n y + Q_{n-1})} = \Delta_2.$$

Отсюда выводимъ абсолютную величину отношенія $\Delta_1 : \Delta_2$; именно

$$\Delta_1 : \Delta_2 = y Q_n : Q_{n-1}.$$

Такъ какъ $y > 1$, а $Q_n > Q_{n-1}$ (по закону составленія приближеній), то $y Q_n > Q_{n-1}$, а потому и $\Delta_1 > \Delta_2$, что и требовалось доказать.

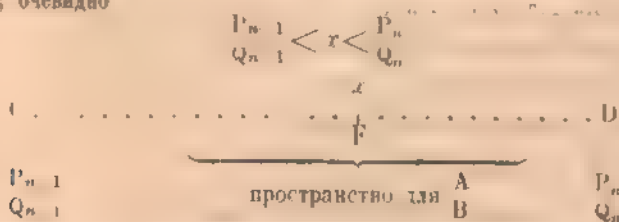
859. Слѣдствіе. Приближенія четвѣраго порядка всѣ *больше* непр. дроби x , а нечетнаго — всѣ *меньше* ея. Но каждое послѣдующее прибр. подходитъ къ величинѣ непр. дроби ближе предыдущаго, то 1-е, 3-е, 5-е, . . . т.е. приближенія *нечетнаго* порядка, хотя всегда остаются меньше x , но приближаясь болѣе и болѣе къ x , представляютъ рядъ *возрастающихъ* чиселъ. Приближенія *четнаго* порядка (2-е, 4-е, 6-е, . . .), оставаясь больше x и приближаясь болѣе и болѣе къ x , составляютъ рядъ *убывающихъ* чиселъ. Общимъ же предѣломъ тѣхъ и другихъ служить сама непр. дробь.

860 VII. Всякое приближение подводит къ величинѣ непрерывной дроби ближе всякой иной несократимой дроби съ меньшими членами.

Пусть $\frac{P_n}{Q_n}$ будетъ одно изъ приближеній непрерывной дроби x ; надо доказать, что не существуетъ никакой иной несократимой дроби, которая, имѣя меньшіе члены, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, подходила бы къ x ближе, нежели $\frac{P_n}{Q_n}$.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что существуетъ несократимая дробь $\frac{A}{B}$, выражающая величину x точнѣе, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, и вѣсть съ тѣмъ имѣющая члены меньшіе, чѣмъ взятое приближеніе; и посмотримъ, къ чему поведетъ это допущеніе. Во-первыхъ, ясно, что дробь $\frac{A}{B}$ не м. б. ни однимъ изъ приближеній предыдущихъ дроби $\frac{P_n}{Q_n}$, ибо послѣднія, по доказанному, ближе лежатъ къ x , чѣмъ въ предыдущія приближенія, а $\frac{A}{B}$, по допущенію, лежитъ къ x еще ближе, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$. Затѣмъ, $\frac{A}{B}$ не можетъ быть ни однимъ изъ приближеній, слѣдующихъ за $\frac{P_n}{Q_n}$; ибо эти приближенія, хотя и лежатъ ближе къ x , какъ и дробь $\frac{A}{B}$, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, но выражаются большими членами, нежели эта послѣдняя дробь (по закону составленія приближеній), между тѣмъ какъ члены дроби $\frac{A}{B}$ по условію, меньше членовъ дроби $\frac{P_n}{Q_n}$. Итакъ, убеждаемся, что $\frac{A}{B}$ не м. б. ни однимъ изъ приближеній.

Пусть, далѣе, $\frac{P_n}{Q_n}$ есть приближеніе четнаго порядка, и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ — ему предшествующее; очевидно



Такъ какъ всякое приближеніе выражаетъ величину непрерывной дроби точнѣе предшествующаго, то $\frac{P_n}{Q_n} - x < x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, что на чертежѣ указано тѣмъ, что промежуткъ CE (E мѣсто непрер. дроби x) больше ED .

Пусть $\frac{A}{B}$ выражаетъ величину x точнѣе, нежели $\frac{P_n}{Q_n}$, а потому и подавно точнѣе, нежели $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; слѣд. дробь $\frac{A}{B}$ должна лежать гдѣ-нибудь или въ промежуткѣ между x и $\frac{P_n}{Q_n}$, или въ промежуткѣ между x и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, а слѣд. непременно — между $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. **Такъ что**

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > \frac{A}{B} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \text{ или } \frac{P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n}{Q_n Q_{n-1}} > \frac{A Q_{n-1} - B P_{n-1}}{B Q_{n-1}},$$

или

$$\frac{1}{Q_n} > \frac{AQ_{n-1} - BP_{n-1}}{B}, \quad \text{откуда} \quad B > Q_n (AQ_{n-1} - BP_{n-1}).$$

Выраженіе въ скобкахъ есть число цѣлое, неравное нулю: цѣлое — потому, что A, Q_{n-1}, B и P_{n-1} — числа цѣлыя; неравное нулю — потому, что изъ допущенія $AQ_{n-1} - BP_{n-1} = 0$ вышло бы: $\frac{A}{B} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, чего, по доказанному, быть не можетъ. Такимъ образомъ, наименьшая величина скобокъ равна 1, а потому $B > Q_n \cdot 1$, или $B > Q_n$, т.-е. чтобы дробь $\frac{A}{B}$ выражала величину непрерывной дроби точнѣе приближенія $\frac{P_n}{Q_n}$, надо, чтобы знаменатель этой дроби былъ больше знаменателя рассматриваемаго приближенія.

Если $\frac{A}{B}$ заключается между $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, т.-е. $\frac{P_n}{Q_n} > \frac{A}{B} > \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, то, раздѣливъ 1 на каждую изъ этихъ дробей, найдемъ $\frac{Q_n}{P_n} < \frac{B}{A} < \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$; откуда

$$\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} - \frac{B}{A} < \frac{Q_n}{P_n} - \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{P_n} > \frac{AQ_{n-1} - BP_{n-1}}{A},$$

откуда $A > P_n (AQ_{n-1} - BP_{n-1})$; а какъ минимумъ скобокъ равенъ 1, то $A > P_n \cdot 1$ или $A > P_n$; это значитъ, что для выполнения вышесказаннаго требованія и числитель дроби $\frac{A}{B}$ долженъ быть больше числителя приближенія $\frac{P_n}{Q_n}$.

Такимъ образомъ доказано, что не существуетъ такой дроби, которая, имѣя простѣйшій видъ, чѣмъ нѣкоторое приближеніе, выражала бы величину непрерывной дроби точнѣе этого приближенія.

Примѣчаніе. — Теперь становится понятны выгоды, представляемыя обращеніемъ чиселъ въ непрерывныя дроби. Пусть, напр., рѣшеніе нѣкотораго вопроса привело къ несократимой дроби $\frac{M}{N}$, члены которой выражены большими числами, затрудняющими употребленіе этого результата въ приложенияхъ. Тогда мы обращаемъ дробь $\frac{M}{N}$ въ непрерывную и составляемъ подходящія дроби. Выбравъ одну изъ послѣднихъ и замѣнивъ ею дробь $\frac{M}{N}$, мы теперь увѣрены, что не существуетъ никакой иной дроби, которая имѣла бы меньшіе члены, нежели взятая подходящая, выражала бы величину дроби $\frac{M}{N}$ точнѣе.

861. VIII. — Если $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$ суть два послѣдовательныя приближенія къ непрерывной дроби x , то $\frac{P_{n-1} + P_n}{Q_{n-1} + Q_n}$ будетъ больше, либо меньше x^2 , смотря по тому, будетъ ли $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ больше или меньше чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$.

Пусть x будетъ полное частное, соответствующее приближенію $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, непосредственно слѣдующему за $\frac{P_n}{Q_n}$. Въ такомъ случаѣ $x = \frac{P_{n+1} + P_{n-1}}{Q_{n+1} + Q_{n-1}}$.

слѣдовательно

$$\frac{P_{n-1} P_n - x^2}{Q_{n-1} Q_n} = \frac{1}{Q_{n-1} Q_n (Q_n x + Q_{n-1})^2} \{ P_{n-1} P_n (x Q_n - Q_{n-1})^2 - Q_{n-1} Q_n (x^2 - P_{n-1})^2 \} \\ = \frac{(x^2 P_n Q_n - P_{n-1} Q_n)(P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1})}{Q_{n-1} Q_n (Q_n x + Q_{n-1})^2}.$$

Множитель $x^2 P_n Q_n - P_{n-1} Q_{n-1}$ положителенъ, такъ какъ $P_n > P_{n-1}$, $Q_n > Q_{n-1}$ и $x > 1$; а отсюда прямо слѣдуетъ, что $\frac{P_{n-1} P_n}{Q_{n-1} Q_n} >$, или $< x^2$, смотря по тому, будетъ ли $P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1} > 0$, или < 0 ; т.-е. смотря по тому, будетъ ли $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} >$, или $< \frac{P_n}{Q_n}$.

Слѣдствіе. Изъ этого доказательства слѣдуетъ, что разности

$$P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1}, \quad P_{n-1} P_n - Q_{n-1} Q_n x^2, \quad P_{n-1}^2 - Q_{n-1}^2 x^2, \quad Q_n^2 x^2 - P_n^2$$

имѣютъ одинаковый знакъ.

Періодическія непрерывныя дроби.

862. Опредѣленіе. Пусть дана непрерывная дробь

$$x = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots] \quad (1).$$

Положивъ, что число n непольныхъ частныхъ неограниченно возрастаетъ, рассмотримъ ряды (A) и (B)

$$(A) \quad \frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \dots$$

$$(B) \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_4}{Q_4}, \quad \frac{P_6}{Q_6}, \dots$$

изъ которыхъ въ первомъ содержатся подходящія дроби нечетнаго, во второмъ четнаго порядка. Рядъ (A) содержитъ дроби, возрастающія, но всегда меньшія $\frac{P_n}{Q_n}$; а потому члены этого ряда имѣютъ нѣкоторый предѣлъ f . Члены ряда (B), убывающія, но оставаясь всегда больше $\frac{P_1}{Q_1}$, также стремятся, въ силу этого, къ нѣкоторому предѣлу f' . Легко доказать, что $f = f'$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\frac{P_n}{Q_n}$

есть нѣкоторый членъ ряда (A); $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ — представляетъ въ такомъ случаѣ соответствующій членъ ряда (B); но

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n}{Q_n} + \frac{1}{Q_n Q_{n+1}},$$

причемъ Q_n и Q_{n+1} идутъ неограниченно возрастая, такъ что $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$ стремится къ нулю, по мѣрѣ того какъ n приближается къ ∞ . Такимъ образомъ, оба предѣла f и f' равны между собою. *Этотъ-то общий предѣлъ рядовъ (A) и (B) и рассматриваютъ какъ величину безконечной непрерывной дроби.*

Этот предѣлъ есть число несоизмѣримое. Въ самомъ дѣлѣ, предположить, что оно соизмѣримо, мы при обращеніи его въ непрерывную дробь, получили бы конечную непрерывную дробь.

863. Периодическая непрерывная дробь. Когда въ безконечной непрерывной дробѣ, значеніе которой теперь вполне определено, неполныя частныя воспроизводятся въ одномъ и томъ же неизмѣнномъ порядкѣ, дробь называютъ *периодическою*. Различаютъ два рода непрерывныхъ периодическихъ дробей: 1) *простую периодическую дробь*

$$x = | \overbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_p}^{p \text{ членовъ}}; \overbrace{a_1, a_2, \dots, a_p}^{p \text{ членовъ}}; \overbrace{a_1, \dots, a_p}^{p \text{ членовъ}}; \dots |$$

въ которой p первыхъ неполныхъ частныхъ повторяются въ одномъ и томъ же порядкѣ; 2) *смѣшанную периодическую дробь*

$$x = | a_1, a_2, \dots, a_h; \overbrace{a_1, a_2, \dots, a_p}^{p \text{ членовъ}}; \overbrace{a_1, a_2, \dots, a_p}^{p \text{ членовъ}}; \dots |$$

въ которой периодическая часть предшествуетъ части непериодической.

864. Теорема Лагранжа. *Всякій действительный ирраціональный корень квадратнаго уравненія съ соизмѣримыми коэффициентами разлагается въ непрерывную периодическую дробь.*

1-й случай. *Корни имѣютъ противоположные знаки.*

Пусть уравненіе, имѣющее такіе корни, освобождено отъ дробей и приведено къ виду

$$Ax^2 + 2Bx - C = 0 \dots (1).$$

A , B и C суть цѣлыя числа, а A и C — положительны. Если бы коэффициентъ B не былъ четнымъ числомъ, то, перемѣнивъ x на $2X$, могли бы разсматривать ур. въ X . $B^2 + AC$ не есть точный квадратъ, ибо въ противномъ случаѣ ур. имѣло бы корни соизмѣримые, которые разлагались бы въ конечную непрерывную дробь.

Разложеніе положительнаго корня. — Полагая, что вышеуказанныя условія относительно коэффициентовъ имѣютъ мѣсто въ ур—ніи (1), разложимъ въ непрерывную дробь его положительный корень

$$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A} \dots (2)$$

x содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a_1 и $a_1 + 1$, такъ что

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1} \dots (3)$$

гдѣ $x_1 > 1$. Уравненіе (1) беретъ видъ

$$A \left(a_1 + \frac{1}{x_1} \right)^2 + 2B \left(a_1 + \frac{1}{x_1} \right) - C = 0$$

или

$$Ax_1^2 + 2Bx_1 - C = 0 \dots (4)$$

дѣленному цѣлому h , то A_n , A_{n-1} и B_n , удовлетворяющія неопредѣленному ур—нію (9), могутъ быть взяты только въ *конечномъ числѣ* значений: въ самомъ дѣлѣ, изъ этого ур—нія непосредственно ясно, что должно быть: $B_n < h$, $A_n < h$, $A_{n-1} < h$. Число комбинацій изъ этихъ чиселъ, взятыхъ въ порядкѣ A_n , B_n , A_{n-1} , необходимо, *конечно*. А потому, составляя таблицу (8), непремѣнно найдемъ въ ней ур—ніе $A_k x_k^2 + 2B_k x_k + C_k = 0$, тождественное съ уравненіемъ $A_k x_k^2 + 2B_k x_k + C_k = 0$, ранѣе полученнымъ.

Отсюда неизбѣжно слѣдуетъ, что вычисленія приведутъ къ повторенію, въ найденномъ разѣ порядкѣ, однихъ и тѣхъ же неполныхъ частныхъ, и для x получится непрерывная периодическая дробь.

Разложене отрицательнаго корня. — Измѣнивъ въ предложеномъ ур—ніи x на $-x$, получимъ ур—ніе

$$Ax^2 - 2Bx - C = 0.$$

Разложивъ въ непрерывную дробь, указаннымъ приемомъ, положительный корень этого ур—нія и переимѣнивъ знакъ въ полученномъ результатѣ, найдемъ разложене отрицательнаго корня.

2-й случай. — *Оба корня положительны.* — Пусть будетъ α — большій корень, и пусть онъ содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a и $a + 1$. Пусть, затѣмъ, другой корень, β , не содержится въ этомъ интервалѣ. Положимъ $x = a + X$, найдемъ ур—ніе въ X , имѣющее два действительныхъ корня X' и X'' ; корни же α и β вычислимъ по формуламъ

$$\alpha = a + X', \quad \beta = a + X'',$$

гдѣ, слѣд., X' есть положит. количество, меньшее 1; напротивъ, X'' — отрицательно. Такимъ образомъ, X' и X'' можно разложить въ непрерывныя дроби вышеуказаннымъ приемомъ.

Въ томъ случаѣ, когда оба корня α и β содержатся между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a и $a + 1$, числа X' и X'' — оба положительны и < 1 . Въ этомъ случаѣ дѣлаемъ подстановку

$$x = a + \frac{1}{y}.$$

Ур—ніе въ y имѣетъ оба корня положительныя и большіе 1. Если большій корень этого уравненія содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами b и $b + 1$; а другой корень $< b$, то имѣемъ рассмотрѣнный уже случай. Въ противномъ случаѣ полагаемъ

$$y = b + \frac{1}{z}$$

и т. д. Непремѣнно дойдемъ до такого ур—нія, котораго большій корень содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами, а другой не заключается въ этихъ предѣлахъ. Это объясняется тѣмъ, что разность между корнями α и β есть количество конечное, между тѣмъ какъ разность двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей стремится къ нулю, когда число неполныхъ частныхъ неограниченно возрастаетъ. Слѣд. невозможно, чтобы оба корня α и β , разлагаемые въ непрерывныя дроби по формуламъ

$$x = a + \frac{1}{y}, \quad y = b + \frac{1}{z} \dots$$

имѣли, неопредѣленно, одни и тѣ же неполныя частныя.

3-й случай.— *Оба корня отрицательны.*— Этот случай непосредственно сводится къ предыдущему замѣною x на $(-x)$.

865. Примеръ 1.— *Развернуть въ непрерывныя дроби корни уравненія $3x^2 - 2x - 2 = 0$.*

Корни этого уравненія противоположны по знаку. Положительный корень

$$x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$$

$2 < \sqrt{7} < 3$; $3 < 1 + \sqrt{7} < 4$, слѣд. $1 < x < \frac{4}{3}$, и потому $a_1 = 1$, и

$$x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} = 1 + \frac{1}{x_1}$$

Отсюда

$$\frac{1}{x_1} = \frac{\sqrt{7} - 2}{3}, \quad x_1 = \frac{3}{\sqrt{7} - 2} = 2 + \sqrt{7}.$$

Находимъ, что x_1 содержится между 4 и 5; слѣд.

$$a_2 = 4; \quad \text{и} \quad x_1 = 2 + \sqrt{7} = 4 + \frac{1}{x_2}$$

Отсюда

$$\frac{1}{x_2} = \sqrt{7} - 2, \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = 2 + \frac{1}{3}.$$

Продолжая такимъ образомъ, найдемъ

$$a_3 = 1, \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2};$$

$$a_4 = 1, \quad x_4 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} = x.$$

Слѣд., начиная съ четвертаго, неполныя частныя будутъ периодически повторяться; періодъ будетъ 1, 4, 1, 1; и

$$x = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$$

Отрицательный корень, $\frac{1 - \sqrt{7}}{3} =$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$$

онъ выражается сѣмнанною періодическою дробью, и въ непериодической части ся — только одно полное частное, равное 0; періодъ же = 1, 1, 4, 1, т.е. равенъ обращенному періоду положительнаго корня.

Примѣръ II. — Развернуть въ непрерывную дробь корни уравненія $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

Оба корня положительны и суть

$$x' = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}, \quad x'' = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$$

x' содержится между 2 и 3; слѣд. $a_1 = 2$, и

$$x = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} = 2 + \frac{1}{x_1}; \quad \text{откуда} \quad x_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3},$$

что приводитъ къ предыдущему примѣру; слѣд.

$$x' = | 2; \overbrace{1, 4, 1, 1}, \overbrace{1, 4, 1, 1}, \dots |$$

Такъ какъ $x'' < 1$, то $a_1 = 0$; затѣмъ

$$\frac{3 - \sqrt{7}}{2} = \frac{1}{y}; \quad y = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}; \quad \text{затѣмъ}$$

$$a_1 = 5, \quad y_1 = \frac{2 + \sqrt{7}}{2}$$

$$a_2 = 1, \quad y_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$$

$$a_3 = 1, \quad y_3 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$$

что снова приводитъ къ предыдущему примѣру; слѣд.

$$x'' = | 0; 5, 1, 1, \overbrace{1, 4, 1, 1}, \overbrace{1, 4, 1, 1}, \dots |$$

Это еще можно написать такъ:

$$x'' = | 0; 5, 1, \overbrace{1, 1, 4, 1}, \overbrace{1, 1, 4, 1}, \dots |$$

866. ТЕОРЕМА (ОБРАТНАЯ ЛАГРАНЖЕВОЙ). — Всякая непрерывная періодическая дробь представляетъ корень квадратнаго уравненія съ соизмѣримыми коэффициентами.

Рассмотримъ два случая.

1. Случай чистой періодической непрерывной дроби. — Пусть дана чистая періодическая дробь

$$y = | \overbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}, \overbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}, \dots |$$

Назовемъ y_p и y_{p-1} конечныя непрерывныя дроби, полученныя, если взять p и $p+1$ періодовъ; имѣемъ

$$y_{p+1} = | a_1, a_2, \dots, a_n, y_p |$$

Если p приближать къ ∞ , то y_p и y_{p+1} стремятся къ y ; слѣд.

$$y = | a_1, a_2 \dots a_n, y |$$

и потому

$$y = \frac{yP_n + P_{n-1}}{yQ_n + Q_{n-1}},$$

т. е. $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$ суть два приближенія $n-1$ -го и n -го порядка къ конечной непрерывной дроби, образуемой періодами. Изъ послѣдняго ур. возьмемъ

$$Q_n y^2 + (Q_{n-1} - P_n) y - P_{n-1} = 0 \dots (1).$$

Отсюда видимъ, что чистая періодическая дробь y есть положительный корень квадратнаго ур—нія, коэффициенты котораго суть числа цѣлыя, а знаки корней противоположны.

II. *Данная дробь смѣшанная.* — Пусть дана смѣшанная періодическая дробь

$$x = | a_1, a_2 \dots a_q; \overbrace{a_1, a_2 \dots a_n}^{\dots} \dots |.$$

Если положить

$$| a_1, a_2 \dots a_n, \overbrace{a_1, a_2 \dots a_n}^{\dots} \dots | = y,$$

то

$$x = | a_1, a_2 \dots a_q, y |,$$

откуда

$$x = \frac{yA_q + A_{q-1}}{yB_q + B_{q-1}} \dots (2)$$

гдѣ $\frac{A_{q-1}}{B_{q-1}}$ и $\frac{A_q}{B_q}$ суть приближенія порядковъ $q-1$ и q къ конечной непрерывной дроби $| a_1, a_2 \dots a_q |$, образуемой непериодическою частью.

Съ другой стороны, y есть корень ур—нія (1). Если исключить y изъ (1) и (2), то получится квадратное ур. въ (x) съ соизмѣримыми коэффициентами.

867. Примѣчаніе. — Естественно изслѣдовать, что представляетъ отрицательный корень ур—нія (1), положительный корень котораго равенъ чистой періодической дроби

$$| a_1, a_2 \dots a_n; \overbrace{a_1, a_2 \dots a_n}^{\dots} \dots |.$$

Для этого докажемъ лемму:

Если $| a_1, a_2 \dots a_n |$ есть конечная непрерывная дробь, въ которую развѣтывается число $\frac{P}{Q}$ большее 1; то $\frac{P_n}{Q_{n-1}}$ равно непрерывной дроби $| a_n, a_{n-1} \dots a_2, a_1 |$, которая получится, если неполная частная данной написать въ обратномъ порядкѣ; а $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ есть предпослѣдняя подходящая дробь къ непрерывной $\frac{P}{Q}$.

Нужно доказать равенства:

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \dots + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1}}}, \quad \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \dots + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_2}}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} P_n &= a_n P_{n-1} + P_{n-2} & Q_n &= a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \\ P_{n-1} &= a_{n-1} P_{n-2} + P_{n-3} & Q_{n-1} &= a_{n-1} Q_{n-2} + Q_{n-3} \\ &\dots & &\dots \\ &\dots & &\dots \\ P_3 &= a_3 P_2 + a_1 & Q_3 &= Q_2 a_3 + 1 \\ P_2 &= a_2 a_1 + 1 & Q_2 &= a_2 \end{aligned}$$

Отсюда легко вывести требуемые равенства.

Если бы было $\frac{P}{Q} < 1$, тогда было бы $a_1 = 0$, и первое равенство, содержащее дробь $\frac{1}{a_1}$, не имело бы места. В этом случае $\frac{P}{Q}$ замѣняютъ обратную дробью, которая > 1 .

Пользуясь этою леммою, можно показать, что абсолютное значеніе отрицательнаго корня уравненія

$$Q_n y^2 - (Q_{n-1} + P_n) y + P_{n-1} = 0 \dots (1)$$

равно обратному значенію чистой периодической дроби, которая получится, если написать въ обратномъ порядкѣ звенья периода данной периодической дроби.

Группировать вмѣстѣ члены съ одинаковымъ указателемъ, можно ур. (1) написать въ видѣ

$$(Q_n y - P_n) y - P_{n-1} = y Q_{n-1},$$

отсюда

$$y = \frac{P_{n-1} + y Q_{n-1}}{Q_n y - P_n}.$$

и это ур—ніе удовлетворяется, если y замѣнить отрицательнымъ корнемъ y' ур—нія (1).

Положивъ $y' = \frac{1}{z}$, даемъ этому равенству видѣ

$$z = \frac{P_n z + Q_n}{P_{n-1} z + Q_{n-1}}.$$

Такъ какъ теперь положительный корень ур—нія (1) представляетъ простую периодическую дробь, то первое неполное частное a_1 уже не равно нулю, ибо во всякой непрерывной дробѣ все неполныя частныя, слѣдующія за первымъ, отличны отъ нуля.

При этих условіях можно применить нашу лемму, и это даетъ

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = |a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1|,$$

а $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ будетъ предпоследнею подходящею дробью къ этой непрерывной дроби; следовательно

$$x = | \overbrace{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1}, \overbrace{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1}, \dots, |$$

и теорема доказана.

Примѣръ. Пусть дана чистая дробь

$$x = a : a, a, \dots |.$$

Непосредственно имѣемъ

$$x = a + \frac{1}{x}, \text{ или } x^2 - ax - 1 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

число несоизмѣримое, ибо x — дробь безконечная.

Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что *квадратъ цѣлаго числа, увеличенный 4-мя, не можетъ быть точнымъ квадратомъ.*

Отрицательный корень

$$x' = \frac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

равенъ непрерывной дроби

$$1 : a - \frac{1}{a} \dots$$

Приложенія.

868. Превращеніе обыкновенныхъ и десятичныхъ дробей въ непрерывныя.

Когда числитель и знаменатель обыкновенной дроби выражены въ большихъ числахъ, удобнѣе, для болѣе яснаго сужденія о ея величинѣ, обратить ее въ непрерывную, составить приложенія. Приемъ для обращенія простой дроби въ непрерывную, указанъ въ § 849.

Примѣръ. Обратить дробь $\frac{76895}{19527}$ въ непрерывную.

Дѣлимъ числ. на знам. знаменателя на 1-й остатокъ, 1-й остатокъ на 2-й и т. д.; дѣйствія эти располагаемъ такъ

	3	1	15	10	5	5	1	3
76895	19527	18314	1213	119	23	4	3	1
18314	1213	119	23	4	3	3	0	

Такъ какъ $\sqrt{N - a_1}$ есть положительное число меньшее 1, то изъ (1) следуетъ, что $\sqrt{N + a_1} > 1$.

Пусть наибольшее цѣлое, содержащееся въ $\frac{\sqrt{N + a_1}}{r_1}$, будетъ b_1 ; то

$$\begin{aligned} \sqrt{N + a_1} &= b_1 + \frac{\sqrt{N - (b_1 r_1 - a_1)^2}}{r_1 [\sqrt{N + (b_1 r_1 - a_1)}]} \\ &= b_1 + \frac{1}{\sqrt{N + a_2}}, \end{aligned}$$

гдѣ $a_2 = b_1 r_1 - a_1$ и $r_2 = \frac{N - a_2^2}{r_1}$.

Затѣмъ снова $\sqrt{N + a_2} > 1$; и если b_2 будетъ наибольшее цѣлое, содержащееся въ $\frac{\sqrt{N + a_2}}{r_2}$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{N + a_2} &= b_2 + \frac{\sqrt{N - (b_2 r_2 - a_2)^2}}{r_2 [\sqrt{N + (b_2 r_2 - a_2)}]} \\ &= b_2 + \frac{1}{\sqrt{N + a_3}}, \end{aligned}$$

гдѣ $a_3 = b_2 r_2 - a_2$ и $r_3 = \frac{N - a_3^2}{r_2}$.

Можно вести вычисленіе такимъ способомъ какъ угодно далеко; такъ что вообще

$$\frac{\sqrt{N + a_{n-1}}}{r_{n-1}} = b_{n-1} + \frac{\sqrt{N - a_n}}{r_{n-1} [\sqrt{N + a_n}]} = b_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{N + a_n}},$$

гдѣ $a_n = b_{n-1} r_{n-1} - a_{n-1}$ и $r_n = \frac{N - a_n^2}{r_{n-1}}$. Следовательно

$$\sqrt{N - a_1} + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$$

Выше было показано, что эта непрерывная дробь безконечна. Докажемъ теперь, что эта дробь будетъ периодическая непрерывная дробь.

Для этого, вспомогательнѣе, докажемъ, что всѣ количества a_1, a_2, a_3, \dots ; r_1, r_2, r_3, \dots суть цѣлыя положительныя числа.

Будемъ называть \sqrt{N} , $\sqrt{N - a_1}$, $\sqrt{N - a_2}$, \dots , полными частными.

Пусть будутъ $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$ три последовательныя приближенія къ \sqrt{N} , изъ каждъ $\frac{P''}{Q''}$ пусть будетъ приближеніе, соответствующее неполному частному b_n .

Полное частное на этой стадіи процесса обращенія будетъ $\sqrt{N + a_n}$.

Извѣстно, что $\frac{P''}{Q'} = \frac{b_n P' + P}{b_n Q' + Q}$, и если сюда вмѣсто b_n подставить

$$b_n = \frac{1}{b_{n+1}} \dots, \text{ или } \sqrt{N} + a_n,$$

то найдемъ \sqrt{N} . Итакъ

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N} + a_n \cdot P' + P}{r_n \cdot Q' + Q} = \frac{P \sqrt{N} + a_n P' + r_n P}{Q' \sqrt{N} + a_n Q' + r_n Q}.$$

Освобождая отъ знаменателя и приравнивая раціональную часть раціональной, а иррациональную иррациональной, находимъ

$$a_n P' + r_n P = N Q', \quad a_n Q' + r_n Q = P',$$

откуда

$$a_n (P'Q' - P'Q) = P'P' - Q'Q'N, \quad r_n (P'Q' - P'Q) = NQ'^2 - P'^2.$$

Такъ какъ $P'Q' - P'Q = \pm 1$, то отсюда, во-первыхъ, очевидно, что a_n и r_n суть числа цѣлыя; а какъ, по § 861, $P'Q' - P'Q$, $P'P' - Q'Q'N$ и $NQ'^2 - P'^2$ имѣютъ одинаковый знакъ, то ясно, что a_n и r_n положительны.

Теперь легко показать, что неполная и полная частныя повторяются. Мы видѣли, что $r_n r_{n-1} = N - a_n^2$, а какъ r_n и r_{n-1} положительны, то заключаемъ, что $a_n^2 < N$, откуда $a_n < \sqrt{N}$, и потому a_n не можетъ быть больше a_1 . Отсюда слѣдуетъ, что a_n не можетъ имѣть иныхъ значений, кромѣ 1, 2, 3, . . . , a_1 . Итакъ, число различныхъ значений a_n не можетъ превосходить a_1 .

Затѣмъ, $a_{n+1} = r_n b_n - a_n$, т.-е. $r_n b_n = a_n + a_{n+1}$, и слѣд. $r_n b_n$ не можетъ быть больше $2a_1$; а какъ b_n есть положительное цѣлое, то r_n не можетъ быть больше $2a_1$. Итакъ, r_n не можетъ имѣть иныхъ значений, кромѣ 1, 2, 3, . . . , $2a_1$, т.-е. число различныхъ значений r_n не можетъ быть больше $2a_1$.

Такимъ образомъ, полное частное $\sqrt{N} + a_n$ не можетъ имѣть болѣе $2a_1 \cdot a_1$ различныхъ значений, т.-е. некоторое полное частное, а потому и вся последующая, должны повториться.

Такъ какъ b_n есть наибольшее цѣлое, заключающееся въ $\frac{\sqrt{N} + a_n}{r_n}$, то неполная частная также должны повторяться, и число ихъ въ каждомъ циклѣ не можетъ быть больше $2a_1^2$.

Заключаемъ, что всякій несоизмѣримый квадратный корень разкрывается въ периодическую непрерывную дробь.

870. ПРИМѢРЪ I. — Развернуть $\sqrt{13}$ въ непрерывную дробь.

Вычисляя $\sqrt{13}$ съ точностью до 1, находимъ, что онъ содержится между 3 и 4, такъ что

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{y}, \text{ гдѣ } y > 1.$$

Для нахождения y пользуемся этимъ ур—нъ; изъ него

$$y = \frac{1}{113-3} \cdot \frac{113-3}{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)} = \frac{113-3}{4}.$$

Но $3 < \frac{1}{4} 113 < 4$; отсюда $6 < \frac{1}{4} 113 - 3 < 7$, т. е. $\frac{113-3}{4}$ содержится между $\frac{6}{4}$ и $\frac{7}{4}$, т. е. больше 1, но < 2 , такъ что

$$y = \frac{113-3}{4} = 1 + \frac{1}{y_1}, \text{ гдѣ } y_1 > 1.$$

Отсюда

$$y_1 = \frac{4}{113-1} = \frac{4(\sqrt{13}+1)}{12} = \frac{\sqrt{13}+1}{3}.$$

Замѣчая, что $3 < \frac{1}{3} 113 < 4$, имѣемъ отсюда $4 < \frac{1}{3} 113 - 1 < 5$, т. е. $\frac{113-1}{3}$ содержится между $\frac{4}{3}$ и $\frac{5}{3}$, т. е. > 1 , но < 2 ; потому

$$y_1 = \frac{113-1}{3} = 1 + \frac{1}{y_2}.$$

Продолжая такъимъ образомъ, имѣемъ

$$\frac{1}{4} 113 - 3 = 1 + \frac{1}{y}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y} = \frac{1}{4} 113 - 3$$

$$y = 1 + \frac{1}{y_1}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_1} = \frac{113-1}{4}$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{y_2}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_2} = \frac{113-2}{3}$$

$$y_2 = 1 + \frac{1}{y_3}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_3} = \frac{111-1}{3}$$

$$y_3 = 1 + \frac{1}{y_4}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_4} = \frac{113-1}{4}$$

$$y_4 = 6 + \frac{1}{y_5}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_5} = \frac{1}{4} 113 - 3.$$

Отсюда заключаемъ, что $y_5 = y$, такъ что начиная съ этого мѣста будутъ повторяться прежнія неполныя частныя, и потому

$$\sqrt{113} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}}}$$

Для проверки результата, обратимъ найденную периодическую дробь въ иррациональность, изъ которой она возникла. Перенеся 3 въ первую часть, имѣемъ

$$x - 3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}}$$

Это есть періодическая дробь съ пятичленнымъ періодомъ; къ знаменателю 6 пятого члена прикладываемъ и снова вся періодическая дробь $x - 3$; такъ что

$$x - 3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + x - 3}}}}}$$

Обращаемъ вторую часть этого ур—ния въ обыкновенную дробь.

$$1 + \frac{1}{3 + x} = \frac{4}{3 + x}; \quad 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 - x}} = \frac{7 - 2x}{4 - x}; \quad 1 + \frac{1}{7 + 2x} = \frac{11 + 3x}{7 + 2x};$$

$$1 + \frac{1}{11 + 3x} = \frac{18 + 5x}{11 + 3x}; \quad \text{наконецъ } x - 3 = \frac{11 + 3x}{18 + 5x}.$$

Это ур—ние приводится къ квадратному $x^2 = 13$, откуда положит. корень $x = \sqrt{13}$.

Примѣръ II. Разложить $\sqrt{a^2 + 1}$ въ непрерывную дробь, полагая, что a — целое положительное число.

Пусть $x = \sqrt{a^2 + 1}$, такъ какъ x содержится между a и $a + 1$, то можемъ положить $x = a + \frac{1}{x_1}$, а слѣд. $\sqrt{a^2 + 1} = a + \frac{1}{x_1}$, откуда $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} - a} = a + \sqrt{a^2 + 1}$.

Замѣчаемъ, что x_1 содержится между $2a$ и $2a + 1$, такъ что $x_1 = 2a + \frac{1}{x_2}$, или $a + \sqrt{a^2 + 1} = 2a + \frac{1}{x_2}$, откуда $x_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} - a}$. Отсюда видно, что $x_2 = x_1$ в потому

$$\sqrt{a^2 + 1} = [a; 2a, 2a, 2a, \dots].$$

Пологая здесь последовательно $a = 1; 2; 3; \dots$ найдемъ

$$\sqrt{2} = | 1; 2, 2, \dots |$$

$$\sqrt{5} = | 2; 4, 4, \dots |$$

$$\sqrt{10} = | 3; 6, 6, \dots |$$

Примѣръ III. — Развернуть въ непрерывную дробь $\sqrt{a^2 - 2}$, гдѣ a — целое положительное число.

Пусть $x = \sqrt{a^2 - 2a}$; x содержится между a и $a - 1$; слѣд. $x = a - \frac{1}{x_1}$, откуда $x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 2a}}{2a}$; замѣвъ, $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$, откуда $x_2 = a - 1 + \sqrt{a^2 - 2a}$.

Число x_2 содержится между $2a$ и $2a + 1$; положивъ $x_2 = 2a + \frac{1}{x_3}$, найдемъ $x_3 = x_1$; такимъ образомъ

$$x = | a; \overbrace{1, 2a}, \overbrace{1, 2a}, \dots |.$$

Напр., положивъ $a = 1$, найдемъ

$$\sqrt{3} = | 1; \overbrace{1, 2}, \overbrace{1, 2}, \dots |.$$

Примѣръ IV. — Развернуть корни уравненія $x^2 - 5x - 3 = 0$ въ непрерывныя дроби.

Имѣемъ $x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$; взявъ большій корень, находимъ $x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}$, $5 + \sqrt{37} = 5 + \frac{6}{1 + \sqrt{37} - 5}$ и т. д. Получаемъ послѣдующія частныя: 1, 1, 5, 1, 1, . . . и $x' = \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{61}{11}, \frac{72}{13}$ и т. д.

Замѣвъ: — $x'' = \frac{1}{2}(\sqrt{37} - 5) = 0 + \frac{6}{1 + \sqrt{37} - 5} = 0; \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{7}{13}$ и т. д.

871. Вычисленіе логарифмовъ.

Примѣръ. — Найти $\lg_{10} 200$?

Вопросъ приводится къ рѣшенію уравненія $10^x = 200$.

Пологая x последовательно 1, 2, 3, находимъ для 10^x величины 10, 100, 1000, . . . Такъ какъ 200 содержится между двумя послѣдними числами, то x заключается между 2 и 3; слѣд. можно положить

$$x = 2 + \frac{1}{x_1} \dots (1)$$

причемъ $x_1 > 1$. Подставляя это выраженіе вмѣсто x въ начальное уравненіе находимъ $10^{2 + \frac{1}{x_1}} = 200$, или $10^2 10^{\frac{1}{x_1}} = 200$, или $10^{\frac{1}{x_1}} = 2$; а отсюда, возвышенія въ степень x_1 :

$$2^{x_1} = 10 \dots (2).$$

Полагая $x_1 = 2, 3, 4, \dots$ находим для 2^{x_1} величины 4, 8, 16, Такъ какъ 10 содержится между 8 и 16, то x_1 находится между 3 и 4, такъ что

$$x_1 = 3 + \frac{1}{x_2}, \dots (3)$$

гдѣ $x_2 > 1$. Подставляя это значеніе x_1 въ уравненіе (2):

$$2^{3+\frac{1}{x_2}} = 10, \text{ или } 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{x_2}} = 10 \text{ или } 2^{\frac{1}{x_2}} = \frac{10}{8};$$

отсюда, по возвышеніи въ степень x_2 :

$$\left(\frac{10}{8}\right)^{x_2} = 2, \dots (4)$$

Полагая x_2 послѣдовательно равнымъ 2, 3, 4 . . . находимъ для $\sqrt[10]{8}$ числа $\frac{100}{64}, \frac{1000}{512}, \frac{10000}{4096} \dots$

Число 2 содержится между послѣдними двумя дробями; слѣд. x_2 заключается между 3 и 4, а потому

$$x_2 = 3 + \frac{1}{x_3}, \dots (5)$$

гдѣ $x_3 > 1$. По подстановкѣ въ (4), получимъ

$$\left(\frac{10}{8}\right)^{3+\frac{1}{x_3}} = 2, \text{ или } \left(\frac{10}{8}\right)^{\frac{1}{x_3}} = \frac{1024}{1000}$$

откуда

$$\frac{1024}{1000}^{\frac{1}{x_3}} = \frac{10}{8} \dots (6)$$

Подставляя вмѣсто x_3 числа 2, 3, . . . , найдемъ, что $9 < x_3 < 10$, такъ что можно положить

$$x_3 = 9 + \frac{1}{x_4}, \text{ гдѣ } x_4 > 1.$$

Сближая результаты (1), (3) имѣемъ

$$x = | 2; 3, 3, 9, 9, \dots |.$$

Первыя четыре приближенія къ x будутъ: $\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{23}{1}, \frac{214}{93}$, изъ которыхъ последнее точно до $\frac{1}{9579}$.

Впрочемъ этотъ методъ вычисленія логарифмовъ непрактиченъ, такъ какъ требуетъ кропотливыхъ вычисленій; потому-то для вычисленія логарифмовъ и употребляютъ болѣе совершенный методъ безконечныхъ рядовъ.

872. Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія $ax = by$ съ цѣлыхъ числахъ.

Примѣръ *Рѣшить ур—ніе* $x - 13y = 159$.

Рѣшимъ отношение коэффициентовъ $\frac{8}{13}$ въ непрерывную дробь, найдемъ

$$\frac{8}{13} = 0; 1, 1, 1, 1, 2$$

соотвѣтствующія дроби:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}$$

Взять разность двухъ послѣднихъ и замѣтивъ, что $\frac{8}{13}$ есть приближеніе чет-
ного порядка, по § 855 имѣемъ

$$\frac{8}{13} - \frac{3}{5} = \frac{1}{13 \cdot 5}, \text{ откуда } 8 \cdot 5 - 13 \cdot (-3) = 1.$$

Умноживъ обѣ части на -159 , найдемъ

$$8 \cdot (5 \cdot 159) - 13 \cdot (-3 \times 159) = 159.$$

Сравняя это тождество съ даннымъ ур—ніемъ, замѣчаемъ, что послѣднее
сводится **тождествомъ**, если положить

$$x = 5 \times 159 = 795; y = -3 \times 159 = -477.$$

Такимъ образомъ одна пара цѣлыхъ рѣшеній; всѣ прочія цѣлыя рѣшенія содержатся
въ формулахъ

$$x = 795 + 13t \quad \text{и} \quad y = -477 - 8t.$$

Посредствомъ этого метода заключается въ томъ, что обыкновенно формулы
для x и y получаются достаточно простыми.

Обобщимъ этотъ приемъ. Если подѣ a и b разумѣть абсолютныя значенія
коэффициентовъ, то, измѣнявъ, если это окажется нужнымъ, знаки неизвестныхъ
 x и y , можно всегда дать ур—нію видъ $ax - by = c$.

Если $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ будетъ предпослѣдняя подходящая дробь къ непрерывной, въ ко-
торую разлагается $\frac{a}{b}$; то

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = (-1)^n.$$

откуда умноживъ обѣ части на $c \cdot (-1)^n$, найдемъ

$$a(-1)^n c Q_{n-1} - b(-1)^n c P_{n-1} = c.$$

Сравненіе съ даннымъ ур—ніемъ покажетъ, что данное ур—ніе обратится въ
тождество, если положить

$$\alpha = (-1)^n c Q_{n-1}, \quad \beta = (-1)^n c P_{n-1},$$

такимъ образомъ одна пара цѣлыхъ рѣшеній данного ур—нія

873. Историческое примѣчаніе. Изобрѣтеніе непрерывныхъ дробей приписываютъ лорду *Бринкери* 1655. Онъ вывелъ на это открытие, пытаясь представить безъ посылки выраженіи, читая Вальдемуъ для послѣднихъ арабскихъ *Индійцевъ* указаль примѣны непрерывныхъ дробей къ приближенной арифметическимъ отношеніямъ прѣдѣльными. Изъ являя теоріи непрерывныхъ дроби была *Джиролимо* и усовершенствована *Джиролимо*, *Гардано* и другими.

ГЛАВА LIV.

Неопредѣленный анализъ второй степени

874. Намеетъ рассмотримъ простѣйшій случай рѣшенія въ целыхъ числахъ системъ уравненія второй степени съ двумя неизвестными

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dx + ey + f = 0$$

гдѣ a, b, c, \dots суть числа цѣлыя.

1. $c \neq 0$. Изъ уравненія выдѣлаетъ членъ въ квадратъ одного изъ неизвестныхъ; пусть, наприм., $c \neq 0$. Выразивъ x чрезъ y , найдемъ

$$x = -\frac{ay^2 + ey + f}{by + d}$$

или, совершая дѣленіе:

$$x = -\frac{a}{b}y - \frac{ad + e}{b^2} - \frac{\frac{ad^2 + de}{b} + f}{by + d}.$$

а умноживъ обѣ части на b^2 , получимъ

$$b^2x = -aby - ad - be - \frac{ad^2 + bde + b^2f}{by + d}.$$

Чтобы для b^2x имѣть число цѣлое. Символъ $by + d$ долженъ дѣлить на цѣло $ad^2 + bde + b^2f$. Полагая въ этомъ множителѣ $by + d$ въ квадратъ b^2 и дѣля на b^2 все $by + d$, получимъ, къ этому множителю $by + d$ мы получимъ остатокъ. Символъ для y число цѣлое и если возмѣстимъ это значеніе x будетъ такъ, какъ и вѣдомъ. Такимъ, то цѣлыя будутъ достигнаты. Тогда какъ число множителѣ $by + d$ не равно нулю, то число цѣлыхъ рѣшеній необходимо будетъ сравнительное.

Въ частномъ случаѣ, если числитель $ad^2 + bde + b^2f$ обращается въ нуль, уравненіе приметъ видъ

$$(b^2x + aby - ad + be)(by + d) = 0.$$

Приравнивая нулю того или другого множителя, найдемъ, имѣя предѣльное значеніе для y при произвольномъ x , такъ d дѣлится на b или наоборотъ. Если число цѣлыхъ значеній для y и x , когда можетъ быть рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленное уравненіе $b^2x - aby - ad + be = 0$.

Оба эти рода рѣшеній могутъ случиться и одновременно, какъ, напримъ въ уравненіи.

$$2y^2 + 3xy - 2y - 6x + 10 = 0,$$

котораго коэффициенты удовлетворяютъ соотношенію $ad^2 + bde + b^2f = 0$, и которое поэтому можно представить подъ видомъ

$$(2y - 3x - 5)(y - 2) = 0$$

Приравнявая нулю первый множитель, получимъ рѣшенія $y = 1 + 3x$, $x = 1 - 2y$. Приравнявъ нулю второго множителя, найдемъ $y = 2$, т. е. содержащая между предыдущими рѣшеніями, причемъ x остается совершенно произвольнымъ.

Если $x = 0$ и $a = 0$, въ уравненіи не остается членовъ съ квадратами обѣихъ переменныхъ; заключенія относятся тѣ-же, а дробныя члены принимаютъ видъ

$$\frac{by}{by + d} = \frac{b^2x}{b^2x + d}.$$

Если числитель этой дроби обращается въ нуль, что можетъ имѣть мѣсто только при соотношеніи

$$b^2x + d = 0,$$

тогда такъ $b \neq 0$ ибо уравненіе было бы въ такомъ случаѣ только 1-н ст., уравненію можно дать видъ

$$b^2x^2 + b^2x + b^2x + d = 0 \quad \text{или} \quad by + d)(bx + e) = 0.$$

Что уравненіе или вовсе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній; или оно можетъ быть удовлетворено опредѣленнымъ значеніемъ одного изъ переменныхъ при произвольномъ значеніи другого, или, наконецъ, когда и e и d дѣлятся на b , каковы бы ни были изъ произвольныхъ остаются совершенно произвольными, а уравненіе получаетъ опредѣленное значеніе.

Итакъ цѣлымъ рѣшеніямъ, остается выбрать изъ нихъ положительныя

875. Примеры.—1. Решить въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$2xy - 4x^2 + 12x - 5y = 11.$$

Это есть уравненіе первой степени относительно y . Выразивъ y чрезъ x , получимъ:

$$y = \frac{4x^2 - 12x + 11}{2x - 5},$$

и исключая дѣловъ, имѣемъ:

$$y = 2x - 1 + \frac{1}{2x - 5}.$$

Чтобы y было числомъ цѣлымъ, необходимо должно быть, чтобы $\frac{1}{2x - 5}$ было цѣлымъ; мы найдемъ это цѣлое, приравнявъ $2x - 5$ дѣлителю числа 1, т. е. $1, -1, 2, -2, 3, -3$. Такимъ образомъ получаемъ уравненія

$$2x - 5 = 1, \quad 2x - 5 = -1, \quad 2x - 5 = 3, \quad 2x - 5 = -3.$$

Изъ этихъ второе и четвертое не допускаютъ цѣлыхъ рѣшеній, а первое даетъ для x значенія 3, 2, 4, 1. Вычисляя соответствующія y , найдемъ рѣшенія

$$x = 3, \quad y = 11; \quad x = 2, \quad y = -3; \quad x = 4, \quad y = 9; \quad x = 1, \quad y = -1.$$

Изъ которыхъ оставляемъ только положительныя рѣшенія, и получаемъ для насъ двѣ пары:

$$x = 3, \quad y = 11; \quad x = 4, \quad y = 9.$$

2). Решить въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$3x^2 - 7y - 2x - 5y - 7 = 0.$$

Решая относительно y , имеем

$$y = \frac{4x^2 + 2x - 5}{7x - 5}.$$

Исключая целое число, для чего обе части множим на 7, получим

$$7y = 4x + 1 - \frac{245}{7x - 5}.$$

Умножим обе части на 7, и снова исключая целое имеем

$$49y = 28x + 7 - \frac{1710}{7x - 5}.$$

Приравнявая, как и в предыдущем примере, $7x - 5$ к делителям числа 1710, найдем, что единственными положительными целыми решениями будут

$$x = 2, \quad y = 3, \quad x = 1, \quad y = 17.$$

III. В уравнении $3x + 4xy - 4y = 14$, выражая y через x , имеем

$$y = \frac{14 - 3x}{4x - 4} = 1 + \frac{10}{4x - 4};$$

затем

$$3x - 4 = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10,$$

откуда

$$x = 2, \quad y = 4; \quad x = 3, \quad y = 1.$$

876 Покажем теперь, как решается в положительных целых числах общее уравнение второй степени с 2 неизвестными, которому для удобства придадим вид:

$$ay^2 + 2hxy + bx^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Решая его как квадратное относительно y , найдем

$$ay + hx + f = \pm \sqrt{h^2 - abx^2 - 2(hf - af)x - f^2 + ac}. \quad (1)$$

Чтобы y и x могли иметь положительные целые значения, подкоренное выражение, которое для краткости представим в виде $px^2 + 2qx + r$, должно быть точным квадратом; пусть

$$px^2 + 2qx + r = z^2.$$

Решая это уравнение как квадратное в x , имеем

$$x + q = \pm \sqrt{q^2 - pr} = pz^2.$$

Положив предположенному подкоренному выражению равно быть некоторому квадратному; пусть оно $= p^2$, так что

$$p^2 = q^2 - pr = pz^2.$$

Если это уравнение не может быть решено в целых положительных числах, то и данное уравнение не может иметь положительных целых решений.

Если a, b, h — все положительны, то ясно, что ни одно решение не будет отрицательным; в самом деле, при достаточно больших отрицательных значениях x и y знак первой части уравнения зависит от знака выражения $ax^2 + 2hxy + by^2$; след., первая часть при больших положительных целых значениях x и y может быть нулем.

Таким образом, если $h^2 - ab$ в (1) отрицательно, число решений будет ограничено.

Примемъ, *Решить въ целыхъ положительныхъ числахъ ур—не*.

$$x^2 - 4xy + 6y^2 - 2x - 20y = 29.$$

Решая это ур—не какъ квадратное относительно x , имеемъ

$$x = 2y + 1 \pm \sqrt{30 + 24y - 2y^2}.$$

Написать подрадикальное количество въ видѣ $102 - 2(y^2 + 2)$ имеемъ, что $y - 6^2$ не можетъ быть. Слѣды 51. Попытками убеждаемся, что подрадикальное количество является точнымъ квадратомъ, когда будетъ $y - 6^2 = 1$, или 49. Отсюда находимъ, что положительныя цѣлыя значения y суть 5, 7 и 3. Когда $y = 5$, будетъ $x = 21$, или 1; когда $y = 7$, тогда $x = 25$, или 3; когда $y = 13$, будетъ $x = 29$, или 25.

877. Уравнение $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2gx + 2fy + e = k$ можетъ быть решено въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ, если лѣвая часть его можетъ быть разложена на два рациональных линейныхъ множителя. Напр., пусть требуется решить ур—не

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 = 16.$$

Первая часть разлагается въ произведение $(3x - 2y)(2x - 3y)$; и какъ $3x$ и $2y$ должны быть числами цѣлыми, то оба множителя числа цѣлыя, для которыхъ одно должно равняться одному изъ множителей 16-ти, а другое — другому, или кратному, и наоборотъ, и притомъ произведение въ равенство съ множителемъ ур—не.

$$3x - 2y = \pm 16, \quad 2x - 3y = \pm 1;$$

$$3x - 2y = \pm 8, \quad 2x - 3y = \pm 2;$$

$$3x - 2y = \pm 4, \quad 2x - 3y = \pm 4;$$

$$3x - 2y = \pm 2, \quad 2x - 3y = \pm 8;$$

$$3x - 2y = \pm 1, \quad 2x - 3y = \pm 16;$$

Отсюда находимъ, что $5x$ должно равняться

$$+ (48 - 2), \quad + (24 - 4), \quad \pm (12 - 8), \quad \pm (6 - 16), \quad \pm (3 - 32),$$

и для вѣстности, соответственныя цѣлыя значения x суть 4 и 2, а соответствующія значения y суть 2 и 4.

878. Мы знаемъ, что решение общаго ур—ния можно привести къ виду часть отъ решения ур—ния вида $x^2 + Ny^2 = \pm a$, гдѣ N и a положительныя цѣлыя числа.

Уравненію $x^2 + Ny^2 = a$, очевидно, не имѣть действительныхъ решений, такъ какъ сумма положительныхъ чиселъ не можетъ равняться отрицательному. Уравненію $x^2 + Ny^2 = a$ имѣть спротивное число решений можно доказать попытками. Остается рассмотреть ур—ния вида $x^2 - Ny^2 = \pm a$.

879. Теорема. Уравненіе $x^2 - Ny^2 = 1$ всегда можетъ быть решено въ положительныхъ числахъ.

Обратимъ N въ непрерывную дробь; пусть $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$ будутъ три последовательныя послѣднія дроби, и пусть полное частное, стоящее передъ дробью $\frac{p'}{q'}$, будетъ $\frac{1}{N} + a_n$. Изъ теории непрерывныхъ дроби (см. стр. 102) имѣемъ, что

$$r_n(pq' - p'q) = Nq^2 - p^2 \dots (1).$$

Но въ коэфф періода $r_n = 1$. Въ самомъ дѣлѣ пусть $\frac{1}{N} + a_n$ будетъ полное частное, непосредственно предшествующее второму полному частному $\frac{1}{N} + a_1$.

и 11-ю повторяется, то $\frac{1}{N} - \frac{a_1}{r_1}$ и $\frac{1}{N} - \frac{a_1}{r_1}$ будут два последовательных полных частных; слѣд.

$$a_1 = a_1 - r_1 b_1, \quad r_1 r_1 - N = a_1^2$$

но $N - a_1^2 = r_1$, слѣд. $r_1 = 1$. Итакъ, $Nq^2 = p^2 - p'q - pq$ или $\frac{p}{q}$ есть предпослѣднее приближеніе въ некоторомъ періодѣ.

Если число частныхъ въ періодѣ четное, то $\frac{p}{q}$ есть четное приближеніе; слѣд., оно больше $\frac{1}{N}$, и потому больше $\frac{p}{q}$ такъ, что $p'q - pq = 1$. Въ такомъ случаѣ, $p^2 - Nq^2 = 1$, и слѣд.

$$x = p, \quad y = q'$$

даютъ рѣшеніе ур-нія $x^2 - Ny^2 = 1$.

Такъ какъ $\frac{p}{q}$ есть предпослѣднее приближеніе какого угодно періода, то это рѣшеніе неограниченно.

Если число частныхъ въ періодѣ нечетное, то предпослѣднее приближеніе въ первомъ періодѣ есть приближеніе нечетное; но предпослѣднее приближеніе во второмъ періодѣ есть приближеніе четное. Слѣд., данныя рѣшенія и частныя, входящія въ $x = p, y = q$, или $\frac{p}{q}$ есть предпослѣднее приближеніе во второмъ, четвертомъ, шестомъ, . . . , періодахъ. Значимъ, что число рѣшеній неограниченно.

880. Рѣшеніе въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ ур-нія $x^2 - Ny^2 = 1$

Если число частныхъ въ періодѣ нечетное, и если $\frac{p}{q}$ есть нечетное предпослѣднее приближеніе въ какомъ нибъ періодѣ, то $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, и слѣд., $p'q - pq = 1$.

Въ этомъ случаѣ $p^2 - Nq^2 = 1$, и цѣлое рѣшеніе ур-нія $x^2 - Ny^2 = 1$ принимая, положимъ $x = p'$, $y = q'$, или $\frac{p}{q}$ есть предпослѣднее приближеніе въ первомъ, третьемъ, пятомъ, . . . , періодахъ.

881 Примеръ. Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ уравненіе $x^2 - 13y^2 = 1$

Имѣемъ: $\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6; . . .}]$.

Число частныхъ въ періодѣ нечетное, предпослѣднее приближеніе въ первомъ періодѣ $\frac{18}{5}$; слѣд., $p = 18$, $q = 5$ представляетъ одно изъ рѣшеній ур-нія $x^2 - 13y^2 = 1$.

Предпослѣднее приближеніе во второмъ періодѣ $\frac{649}{180}$; слѣдоват., $x = 649$, $y = 180$ есть еще одно рѣшеніе ур-нія $x^2 - 13y^2 = 1$.

Слѣдывая послѣдующими приближеніями періодовъ, можно такимъ путемъ получить сколько угодно другихъ рѣшеній предложеннаго ур-нія.

882. Если известно одна пара цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній ур-нія $x^2 - Ny^2 = 1$, можно получить сколько угодно такихъ рѣшеній слѣдующимъ способомъ

Пусть будутъ $x = \alpha$, $y = \beta$, одна пара цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній ур-нія $x^2 - Ny^2 = 1$, въ такомъ случаѣ при всякомъ цѣломъ n имѣемъ $x^2 - Ny^2 = 1$ слѣд. вѣдливо, $x^2 - Ny^2 = (x + y\sqrt{N})^n (x - y\sqrt{N})^n$ или

$$(x + y\sqrt{N})(x - y\sqrt{N}) = (\alpha + \beta\sqrt{N})^n (\alpha - \beta\sqrt{N})^n.$$

$$p = q + 1 \quad x = \beta \sqrt{N}, \quad x = q + 1 \quad x = \beta \sqrt{N}.$$

получим отсюда

$$x = \frac{(x + \beta \sqrt{N})^n + (x - \beta \sqrt{N})^n}{2},$$

$$y = \frac{(x + \beta \sqrt{N})^n - (x - \beta \sqrt{N})^n}{2\sqrt{N}}.$$

Значения x и y , представляемые этими выражениями, суть значения x и y в формуле (1), если положить в них $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, получим значения x и y для положительных значений n . Так:

n	x	y
0	1	0
1	$x = \sqrt{N}$	β
2	$x^2 = N$	$2x\beta$
3	$x^3 = 3Nx\beta$	$3x^2\beta + N\beta$
4	$x^4 = 6Nx^2\beta^2 + N^2\beta^2$	$4x^3\beta + 4Nx\beta^3$
5	$x^5 = 10Nx^3\beta^2 + 5Nx\beta^4$	$5x^4\beta + 10Nx^2\beta^3 + Nx\beta^5$
6	$x^6 = 15Nx^4\beta^2 + 15Nx^2\beta^4 + N^2\beta^4$	$6x^5\beta + 20Nx^3\beta^3 + 6Nx\beta^5 + N^2\beta^5$

Положив $x = a$, $y = \beta$ вст. одна из формул получает вид $x^2 - Ny^2 = 1$, и если n нечетное, то до предела x и y достигают

$$x^2 - Ny^2 = (a^2 - N\beta^2)^n.$$

Следовательно, те же формулы x и y , что и вышеизведенные, но n нужно считать только 1, 3, 5, ...

883. Положив $x = a^2$, $y = a$, мы приведем уравнение $x^2 - Ny^2 = 1$ к виду $z^2 - N^2 = \pm 1$, решит которое умеем.

884. Мы видели, что

$$p^2 - Nq^2 = -r_n(pq' - p'q) = \pm r_n.$$

Отсюда видно, что если a есть знаменатель некоторого подмножия $\frac{p}{q}$ в дробях, дающих при обращении \sqrt{N} в непрерывную дробь, и если $\frac{p}{q}$ есть дробь, ближайшая к \sqrt{N} , предшествующая этому подмножию, то $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q'}$ являются $x^2 - Ny^2 = \pm a$ удовлетворяются значениями $x = p$, $y = q$.

Почетные приближения все меньше \sqrt{N} , четные — все больше \sqrt{N} . Если $\frac{p}{q}$ есть четное приближение, то $x = p$, $y = q'$ есть решение уравнения $x^2 - Ny^2 = +a$; если же $\frac{p}{q'}$ есть нечетное приближение, то $x = p$, $y = q$ есть решение уравнения $x^2 - Ny^2 = -a$.

Таким путем мы можем найти решения одного из уравнений $x^2 - Ny^2 = \pm a$ только в том случае, когда a есть один из знаменателей дробей, дающих при обращении \sqrt{N} в непрерывную дробь. Так, обратая в $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (17), найдем:

$$17 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}$$

Полные частные

$$\frac{17}{3} = 2 + \frac{1}{3}, \quad \frac{17}{2} = 1 + \frac{1}{2}, \quad \frac{17}{3} = 1 + \frac{1}{3}, \quad \frac{17}{4} = 2 + \frac{1}{4}.$$

и т. д., имевшие знаменателями числа 3, 2, 3, 4.

Последовательныя приближенія суть:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{37}{14}, \frac{45}{17}, \frac{82}{51}, \frac{127}{48}, \dots$$

и если взять цикл уравненій

$$x^2 - 7y^2 = -3, \quad x^2 - 7y^2 = 2, \quad x^2 - 7y^2 = -3, \quad x^2 - 7y^2 = 1,$$

то найдемъ, что они удовлетвоpяются значениями

$$\begin{aligned} x &= 2, 3, 5, 8, 37, 45, 82, 127, \dots \\ y &= 1, 1, 2, 3, 14, 17, 81, 48, \dots \end{aligned}$$

Иногда можно найти пару положительных целыхъ рѣшеній уравненія $x^2 - Ny^2 = a$, когда a не есть одинъ изъ вышеуказанныхъ значений a , путемъ попытокъ.

Такъ, легко убѣдиться, что уравненіе $x^2 - 7y^2 = 51$ удовлетворяетъ x , если положить $x = 9$, $y = 2$. Имѣя одну пару целыхъ рѣшеній, можемъ найти сколько угодно такихъ рѣшеній.

885. До сихъ поръ мы предполагали, что N не есть точный квадратъ, тогда N будетъ точнымъ квадратомъ, уравненіе $x^2 - ny^2 = a$, и рѣшается такъ:

Пусть $a = b \cdot c$ т. е. b и c суть целыя положительные числа, и b, c , уравненіе можно написать такъ:

$$(x + ny)(x - ny) = b \cdot c.$$

Положивъ $x + ny = b$, $x - ny = c$, рѣшаемъ эту систему.

Если найденныя рѣшенія x и y будутъ целыя, и тогда мы имѣемъ пару рѣшеній, принимая b и c за произвольными значениями, найдемъ друга.

Примѣръ. Найти для какаго положительнаго числа, если разность его квадратовъ равна 60?

Назовемъ искомымъ числа буквами x и y , имѣемъ уравненіе $x^2 - y^2 = 60$, или $(x + y)(x - y) = 60$.

60 разлагается на слѣдующія пары сомножителей:

$$1 \times 60, \quad 2 \times 30, \quad 3 \times 20, \quad 4 \times 15, \quad 5 \times 12, \quad 6 \times 10.$$

Искомыя значенія получаются изъ уравненій

$$x + y = 30, \quad x - y = 2; \quad x + y = 10, \quad x - y = 6.$$

Эти значенія суть: 16 и 14; 8 и 2.

Остальныя системы дадутъ дробныя значенія для x и y .

У. 100р.

КОНЕЦЪ.

2. 1000



